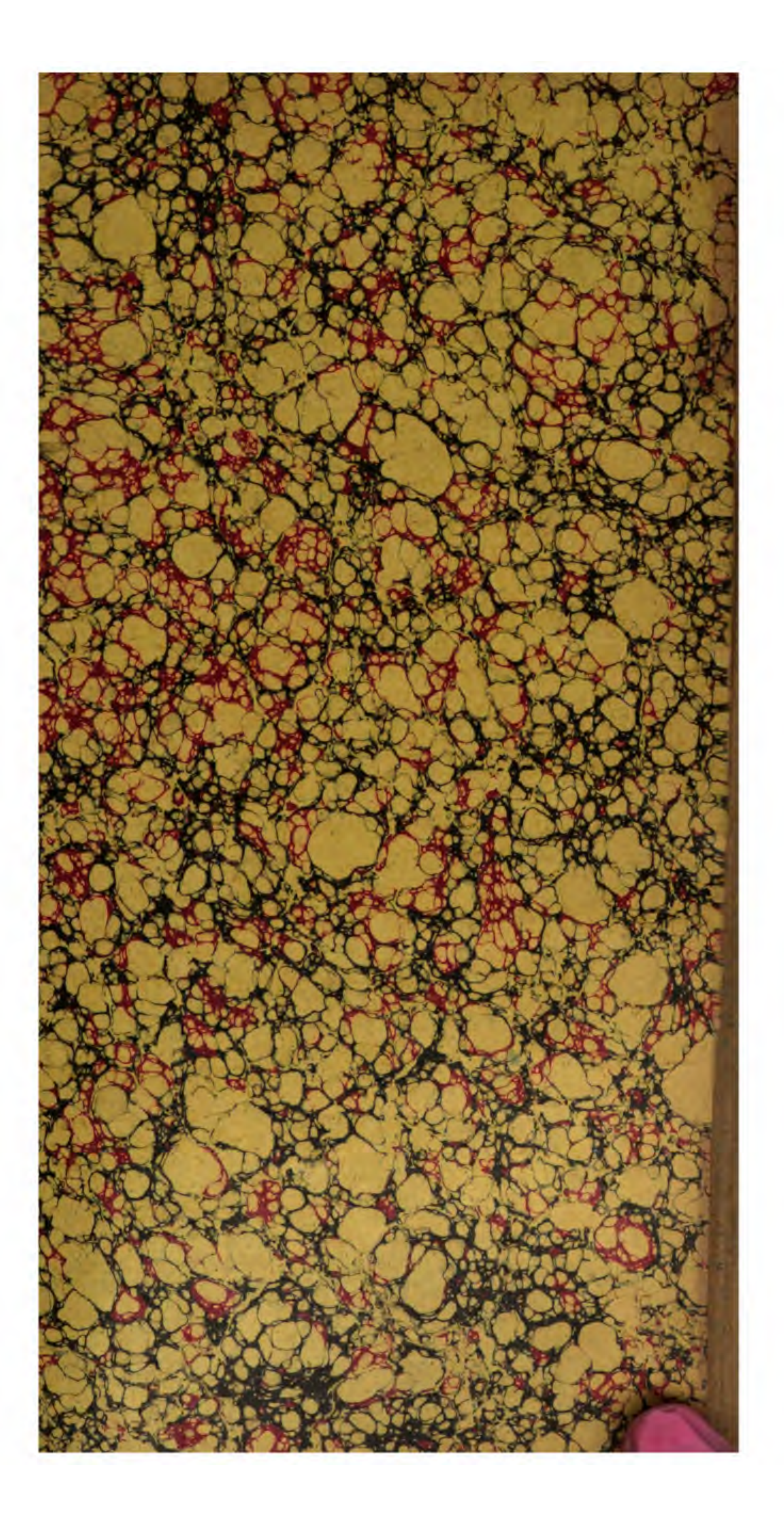
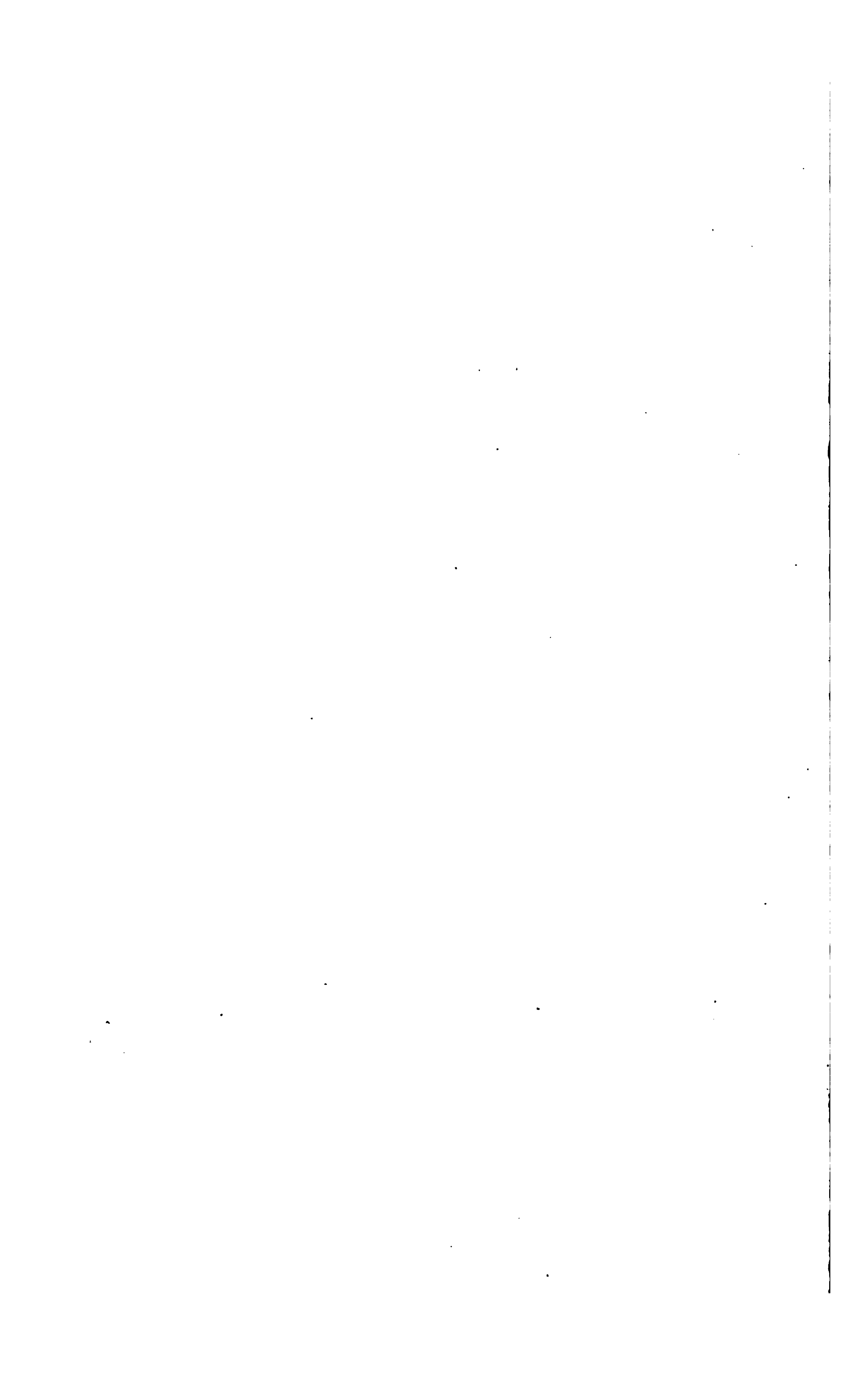








DER

BAU DER BRÜCKENTRÄGER

MIT

BESONDERER RÜCKSICHT AUF

EISEN-CONSTRUCTIONEN

VON

FR. LAISSLE UND AD. SCHÜBLER.

ERSTER THEIL.

VIERTE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

STUTTGART.
VERLAG VON PAUL NEFF.
1876.

Druck von Karl Kirn in Stuttgart.

Vorrede

zur ersten Auflage.

Das Endziel vorliegender Arbeit ist die genaue Ermittlung der Querschnittdimensionen der Brückenträger, wie solche in jedem gegebenen Falle festzustellen sind.

Mit Ausschluss der Bogen- und Kettenbrücken fassen wir alle übrigen Brücken-Constructionen unter den Begriff der Balkenbrücken zusammen; in den Kreis unserer Untersuchungen fallen daher die meisten der in neuester Zeit ausgeführten Eisenbahnbrücken; aber auch zur Beurtheilung der Bogen- und Kettenbrücken, sowie der Bau-Constructionen im Allgemeinen ist ein richtiges Verständniss der Balkenbrücken erste Bedingung

Die bisher allgemein angewendete Theorie ist schon von Navier in der Hauptsache zusammengestellt; der ungemeine Fortschritt der Technik hat nicht die Unrichtigkeit, wohl aber die Unvollständigkeit der gewöhnlichen Verfahrungsweise gezeigt; es hat sich die Nothwendigkeit ergeben, die Theorie auf breiterer Unterlage aufzubauen.

Unsere Bauliteratur zeigt denn auch ein lebhaftes Bestreben, die Lücken der Wissenschaft auszufüllen; besonders bemerkenswerth scheinen uns zwei gleichzeitig veröffentlichte Aufsätze: »Die Theorie der Brückenbalkensysteme von Fr. Schwedler« (Berliner Zeitschrift für Bauwesen 1851) und »der Bau der hölzernen und eisernen Brücken in England und Nordamerika von K. Culmann« (Förster'sche Bauzeitung 1851. 1852). Diesen beiden Arbeiten sind alljährlich neue Beiträge nachgefolgt und durch die technischen Zeitschriften mitgetheilt worden.

Gleichzeitig sehen wir die ausgezeichnetsten Ingenieure mit dem Bau von grossen eisernen Brücken beschäftigt; wir sehen dieselben Grundsätze, welche kaum erst in die Wissenschaft aufgenommen sind, in überraschender Weise practisch angewendet; wir sehen in Folge dessen eine Material-Ersparniss erzielt, welche dem Baue der eisernen Brücken eine immer allgemeinere Anwendung zuwenden muss.

stimmt werden kann, vielmehr ein Wechsel in der Construction der Fahrzeuge voraussichtlich und zum Oeftern eintreten wird. — Der richtigste Massstab für die Vergleichung verschiedener Reihen von Einzellasten ergiebt sich dadurch, dass man diese Lasten auf eine auf den laufenden Meter je gleichförmig vertheilte Belastung reducirt, beziehungsweise diejenige gleichförmig vertheilte Last bestimmt, welche in den einzelnen Abständen dieselben Maximalmomente und dieselben Vertikalkräfte hervorbringen würde. Unsere bezüglichen Untersuchungen weisen darauf hin, dass die Wirkung, welche eine Reihenfolge von Lokomotiven auf einen Brückenträger hervorruft, in der Hauptsache davon abhängt, welches Gewicht der laufende Meter Lokomotive sammt Tender aufweist, und könnten somit unschwer allgemein gültige Anhaltspunkte für die Berechnung von Brücken verschiedener Kategorien, wie sie z. B. für Hauptbahnen, für Gebirgsbahnen, für sekundäre Bahnen nothwendig sind, gewonnen werden. — Nicht unwichtig ist die Vereinfachung des ganzen Rechnungsverfahrens, wie solche durch Einführung passend gewählter gleichförmiger Belastungen sich erzielen lässt.

Unter den Factoren, welche die Bestimmung der Querschnittdimensionen beeinflussen, ist das Verhalten der betreffenden Baumaterialien von besonderer Wichtigkeit, und sind neuerdings sehr eingehende Untersuchungen über die molecularen Veränderungen der Metalle — insbesondere Stahl, Schmiedeisen, Gusseisen — angestellt worden, wobei wir auf die betreffenden Veröffentlichungen der Herren Wöhler, Gerber, Bauschinger u. A. verweisen. — Die von uns aufgeführten Durchschnitts-Coefficienten erleiden zunächst keine Veränderung, doch erscheint es geboten, diese Coefficienten für solche Fälle, wo starker Wechsel zwischen Druck und Zug stattfindet, wesentlich zu modifiziren, und haben wir ein bezügliches Verfahren eingeschaltet, welches auch die zwischenliegenden Fälle nach bestimmter Scala berücksichtigt.

Trotz der wesentlichen Ausdehnung, welche der vorliegende erste Theil erfahren, ist es doch möglich geworden, die Nummern der Tafeln, Figuren und Gleichungen, sowie die Zahl der Paragraphen und Hauptabsätze (Nummern) des Textes insoweit beizubehalten, dass der im Jahre 1871 erschienene zweite Theil sich unmittelbar anschliesst und eine directe Fortsetzung der neuen Ausgabe des ersten Theiles bildet.

Stuttgart und **Strassburg,**
im October 1876.

Fr. Laissle,
Professor der Ing.-Wissenschaft am K. Polytechnikum zu Stuttgart.
A. Schübler,
K. Eisenbahn-Director zu Strassburg.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Erster Abschnitt.
Die Entwicklung der Fundamentalsätze.

§. 1. Einleitung.

§. 2. Die Entwicklung der Bedingungen des Gleichgewichts mit specieller Anwendung auf Balkenbrücken.

§. 3. Die Lehre von der Festigkeit stabförmiger Körper.

Zweiter Abschnitt.

Erfahrungsresultate über die Festigkeit der Baumaterialien.

§. 4. Die Festigkeitscoefficienten.

§. 5. Von der Stärke der Verbindungen.

Dritter Abschnitt.

Bestimmung der Vertikalkräfte und Angriffsmomente.

§. 6. Frei aufliegende Träger.

§. 7. Belastungen und Eigengewicht frei aufliegender Brückenträger.

§. 8. Continuirliche Träger.

§. 9. Anordnung der Auflager und Einfluss der Trägeranzahl.

§. 10. Angriffsmomente kleiner Träger.

Vierter Abschnitt.

Entwicklung der praktischen Regeln für Brückenträger mit vollen Wandungen.

§. 11. Homogene Träger.

§. 12. Die Blechwandbrücken.

§. 13. Beispiel einer Blechbalkenbrücke von 15 M. Spannweite.

§. 14. Die Eisenbahnbrücke bei Langon.

Anhang.

Nachtrag.

Uebersicht

der angewendeten Bezeichnungen.

Nachstehend zusammengestellte häufiger vorkommende Zeichen haben in dem Buche durchgehends dieselbe Bedeutung und sind die allgemein gebräuchlichen Buchstaben thunlich beibehalten. Es ist

P — eine an einem Punkte thätige Kraft von bestimmter Richtung und Intensität.

G — eine (vertikal wirkende) Einzellast.

g — die Abscisse des Angriffspunkts derselben.

E — der Elastizitätsmodul.

𝔄 — die in einem gezogenen Körpertheil per Quadrateinheit herrschende Spannung.

𝔅 — die in einem gedrückten Körpertheil per Quadrateinheit herrschende Pressung.

ℭ — die per Quadrateinheit herrschende Schubspannung, welche längs einer Fläche durch Scheerkräfte hervorgerufen ist.

Θ — das Trägheitsmoment einer Querschnittfläche.

Ω — der Querschnitt der Gurtung eines Trägers.

H — die ganze Höhe eines Trägers.

ℌ — die Distanz der Mittelpunkte von Zug und Druck in dem Querschnitt eines belasteten Trägers.

$ℌ_0$ — die Distanz der Schwerpunkte der beiden Gurtungen eines Trägers.

𝔞 (𝔟) — die Entfernung der äussersten gespannten (gepressten) Längenfaser von der neutralen Axe.

$𝔞_0$ ($𝔟_0$) — die Entfernung des gespannten (gepressten) Gurtungs-Schwerpunkts von der neutralen Axe.

δ — die Dicke der Mittelrippe eines Trägers mit voller Wandfläche.

l — eine beliebige Trägerlänge oder Spannweite.

p — das Eigengewicht einer Brücke per Längeneinheit, bei Eisenbahnbrücken in der Regel für ein Geleise berechnet.

k — ebenso die zufällige (variable) Belastung per Längeneinheit.

$p = q + k$ — die Totalbelastung per Längeneinheit.

$\mathfrak{M}$ — das Angriffsmoment der äusseren Kräfte (*moment de rupture*)

ΣXy — das numerisch gleiche Widerstandsmoment des betrachteten Trägerquerschnitts.

$\mathfrak{V}$ — die in dem Querschnitt wirkende Vertikalkraft (*effort tranchant*)

ΣY — der numerisch gleiche Vertikal-Widerstand in dem betrachteten Trägerquerschnitt.

Die Zahlencoefficienten der praktischen Formeln beziehen sich auf Meter-Mass und Gewicht, insofern nichts Besonderes bemerkt ist; mittelst der Redutionstabellen des Anhangs lassen sich dieselben leicht auf andere Masse und Gewichte übertragen. Die theoretischen Formeln sind für jedes Mass und Gewicht gültig.

Erster Abschnitt.

Die Entwicklung der Fundamentalsätze.

---

§. 1. Einleitung.

1. Die wesentlichen Bestandtheile einer Brücke sind: die *Auflager* (Widerlager und Pfeiler), die *Brückenträger* und die *Fahrbahn*; letztere kann eine für Fuhrwerke und Fussgänger passende Plattform, oder auch eines oder mehrere Schienengeleise enthalten; die Fahrbahn kann unmittelbar auf den Brückenträgern aufliegen, wie z. B. bei Brücken von kleiner Spannweite, meist ist sie jedoch durch ein System von *Querträgern* oder *Zwischenträgern* mit den Brückenträgern verbunden. — Weitere Bestandtheile einer Brücke bilden die *Diagonal-Verbindungen* oder *Windkreuze* (*Contreventements*), welche nur dann entbehrt werden können, wenn Fahrbahn oder Brückenträger (wie z. B. bei massiver Fahrbahn) hinreichende Festigkeit gegen Seitenbewegungen haben, und endlich das *Brückengeländer*, insofern letzteres nicht durch die Brückenträger selbst schon gebildet ist.

Da wir hauptsächlich den Bau der Brückenträger im Auge haben, so sind uns letztere auch für die Classification der Brücken massgebend. — Die Brückenträger, soweit sie nicht homogene, volle Balken sind, zeigen stets ihrer ganzen Länge nach *durchlaufende Bänder*, welche wir *Gurtungen*, Tragbänder, Längsbänder nennen. Nach der Gestalt und Wirkungsweise dieser Bänder unterscheiden wir:

1) *Bogenbrücken*; es ist für jeden Träger ein für sich bestehendes, nach oben convexes Band, der *Bogen*, vorhanden; dieser ist vermöge seiner Steifigkeit in Ruhe.

2) *Ketten-* oder *Hängebrücken*; es ist für jeden Träger nur ein nach oben concaves Band, die *Kette*, vorhanden; letztere strebt bei jeder Art der Belastung einem stabilen Gleichgewicht zu, und insoferne dieses meist nur durch Aenderungen

in der Gestalt der Kette möglich ist, so entstehen hiedurch Oscillationen und Seitenschwankungen. — Man kann letzteren dadurch begegnen, dass man die Kette in ähnlicher Weise wie den Bogen als steifes Band herstellt, doch gehen hiedurch die hauptsächlichsten Vortheile der Kette verloren, und wird die Theorie der Kettenbrücken stets von der Bogentheorie zu unterscheiden sein.

3) Balkenbrücken; es sind stets für jeden Träger zwei Tragbänder oder Gurtungen vorhanden; dieselben können gerade oder beliebig gekrümmt sein, wesentlich ist, dass beide Gurtungen auf ihre ganze Länge fest mit einander verbunden sind; die Verbindung geschieht durch einzelne Streben oder durch mehr oder weniger dicke volle Wandungen; hiedurch ist bewirkt, dass keine der beiden Gurtungen ohne die andere eine Formänderung annehmen kann, und wird letztere, wenn sie in Folge der Belastung des Trägers eintritt, wie beim homogenen Balken als eine Biegung des ganzen Trägers sich darstellen.

Bogen und Kette üben einen Horizontalschub auf die Widerlager aus, eben weil sie im Allgemeinen nur ein Band haben; es kann jedoch dieser Horizontalschub auch durch ein gerades Band, durch eine Bogensehne aufgenommen werden, ohne dass hiedurch eine Balkenbrücke erhalten wird, da die innige Verbindung zwischen Band und Sehne fehlt; letztere ist nur als eine Hilfsconstruktion, als Ersatz für die Stabilität der Widerlager anzusehen. — Es ist denkbar, dass eine Brücke zugleich Bogen-und Kettenbrücke ist; eine solche Brücke hätte den Vortheil, dass die convexen und concaven Bogen ihren Horizontalschub gegenseitig aufnehmen, ohne dass die Wandausfüllungen wie bei der Balkenbrücke nothwendig werden. — Ihre praktische Anwendung ist jedenfalls auf ganz besondere Fälle beschränkt.

2. Wir theilen die Abhandlung in einzelne Abschnitte; im ersten Abschnitte werden die Gesetze des Gleichgewichts und der Festigkeitslehre entwickelt, erstere mit vorzugsweiser Berücksichtigung der Balkenbrücken; es ist nicht nur die Anwendung der Balkenbrücken ganz besonders ausgebreitet, sondern es bilden auch die balkenförmigen Träger bei fast allen anderen Bauconstruktionen wesentliche Zwischenglieder.

Die nächstfolgenden zwei Abschnitte dienen zur Ergänzung einzelner Parthien der im ersten Abschnitt entwickelten Theorie, und zwar werden im zweiten Abschnitt die Erfahrungsresultate der Festigkeitslehre (die sogenannten Festigkeitscoefficienten) übersichtlich zusammengestellt, während im dritten Abschnitt für Balkenbrücken die jedem Querschnitt eigenthümlichen Kräftesummen und Kraftmomente für die verschiedenen Anordnungen und verschiedene Spannweiten in eingehender Weise entwickelt werden.

Mit dem vierten Abschnitt beginnt die Aufstellung von praktischen Formeln für einzelne Construktionsgattungen auf Grundlage der im ersten Abschnitt entwickelten Theorie und mit steter Benützung der im zweiten und dritten Abschnitt gesammelten Resultate. — Diese praktischen Formeln sind der Art eingerichtet, dass man aus den Hauptabmessungen und Querschnittdimensionen der Brücke die im Material herrschende Spannung oder Pressung möglichst direct erhält, oder aber in ebenso einfacher Weise unter Annahme einer zulässigen Spannung des Materials die Querschnittdimensionen aus den Hauptabmessungen der Brücke bestimmen kann; zu diesen beiden Zwecken sind unsere praktischen Formeln in gleicher Weise dienlich.

§. 2. Entwicklung der Bedingungen des Gleichgewichts mit specieller Anwendung auf Balkenbrücken.

3. Wenn irgend ein Körper in Ruhe sein soll, so müssen die an ihm thätigen äusseren Kräfte im Gleichgewicht sein.

Im Brückenbau ist die Schwere die hauptsächlichste Kraft, welcher die Construktionen zu widerstehen haben; es ist diess das Eigengewicht der Construktion und die zufällige Last; letztere ist für Strassenbrücken durch ein Menschengedränge und grösste Lastwagen, für Fisenbahnbrücken durch das Gewicht einer oder mehrerer Lokomotiven sammt Tender gegeben, wozu bei grösseren Spannweiten belastete Güterwagen hinzukommen. — Andere vertikale Kräfte sind zu gering, als dass sie besonders in Betracht gezogen werden müssten; man kann sie durch eine kleine Vermehrung der zufälligen Last berücksichtigen.

In mehr oder weniger horizontalem Sinne wirkt nun die

Tabelle I.

Geschwindigkeit des Windes in Metern per Sekunde.	Druck in Kilogrammen per Quadrat-Meter.
3,00 Meter.	1,047 Kilogr.
5,00 „	2,908 „
8,00 „	7,443 „
10,85 „	13,691 „
14,00 „	22,790 „
20,00 „	46,520 „
40,00 „	186,080 „

Kraft der Windstösse; im Vergleich zu der Schwere sind diese Kräfte allerdings unbedeutend, aber insofern ihre Richtung,

wie bemerkt, eine ganz verschiedene ist, so erfordern diese Kräfte besondere Anordnungen, welche unter dem Namen Windkreuze (*Contreventements*) bekannt sind. — Während die Dimensionen der Brücke im Allgemeinen durch die vertikalen Kräfte, also hauptsächlich Eigengewicht und zufällige Last, bestimmt sind, so muss die Brücke auch in horizontalem Sinne richtig construirt sein, d. h. die umgelegte (um einen rechten Winkel gedrehte) Brücke muss wiederum einen richtig construirten Träger von allerdings bedeutend geringerer Tragkraft bilden. — Wenn man in besonderen Fällen die Stärke der Windkreuze berechnen will, so dient hiefür vorstehende Tabelle von Morin. Gewöhnlich benützt man die Gurtungen der Brückenträger selbst auch als Gurtungen für die dem Winddruck widerstehenden horizontalen Träger, deren Streben die Windkreuze bilden, und ist die Anstrengung der Gurtungen, welche aus dem Winddruck resultirt, zu der durch die Belastung der Brücke (Eigengewicht und Verkehrslast) hervorgerufenen Inanspruchnahme zu addiren. Stürme, welche einen Druck von 180 Kil. pro □^{m} ausüben, kommen indess in unseren Gegenden kaum vor: es sind dieselben schon so stark, dass belastete Bahnzüge umgeworfen würden, es genügt desshalb, in der Praxis solche excessive Belastungen von 180 Kil. nur für die unbelastete Brücke in Rechnung zu nehmen, und auch diess nur für besonders dem Wind ausgesetzte Objecte, wie hohe Viaducte etc. Für gewöhnliche Fälle wird es hinreichend sein, 100—150 Kil. pro □^{m} zu nehmen, wobei jedoch bezüglich der Berechnung der Gurtungen die Brücke belastet gedacht wird.

Den als bekannt vorauszusetzenden angreifenden Kräften steht zur Herstellung des Gleichgewichts gegenüber die Reaktion der Auflager; sie ist nach Richtung und Intensität in jedem Augenblicke gerade so wirksam, wie es die Herstellung des Gleichgewichts verlangt.

Dass die Auflagerreaktionen in der so eben angedeuteten Weise ihre Richtung und Intensität wechseln können, ist die Folge unendlich kleiner Formänderungen, welche die Auflager durch die wechselnde Belastung erleiden; wir werden in der Folge zeigen, wie diese zunächst unbekannten Auflagerreaktionen stets aus den angreifenden Kräften bestimmt werden können.

Erst wenn sämmtliche äussere Kräfte bekannt sind, kann zur Bestimmung der sogenannten inneren Kräfte, d. h. der im System stattfindenden Spannungen und Pressungen, geschritten werden.

Die zweite Operation einer jeden statischen Berechnung ist daher: aus den gegebenen äusseren Kräften die an jedem Punkte des Systems thätigen inneren Kräfte, d. h. den per Quadrateinheit herrschenden Druck, Zug oder Schub zu bestimmen.

Hiezu dient folgende Betrachtung. Eine Construktion, die unter Einwirkung beliebiger äusserer Kräfte im Gleichgewicht ist, werde durch eine beliebige Fläche in zwei Fragmente getheilt; die jedem Fragmente zukommenden äusseren Kräfte werden im Allgemeinen nicht im Gleichgewicht sein; jedes Fragment müsste sich in Bewegung setzen, wenn nicht die an der Trennungsfläche thätigen inneren Kräfte gerade hinreichend wären, den betreffenden äusseren Kräften das Gleichgewicht zu halten. Hiedurch findet man nach den Bedingungen des Gleichgewichts die Resultante der in jedem Querschnitt thätigen inneren Kräfte, welche im Allgemeinen aus einer Kraft und einem Gegenpaar bestehen wird.

Es wird nun allerdings ein beliebig gedachter Körper derartige Formänderungen erleiden, dass es äusserst schwierig erscheinen muss, aus der so gefundenen Resultante die an jedem Theil des Querschnitts herrschenden Kräfte zu bestimmen; anders verhält es sich mit den Bauconstruktionen und mit den Brückenbauten insbesondere; die einzelnen Bestandtheile sind nach dem Bedürfniss angeordnet und durch diese Regelmässigkeit der Anordnung ist die Möglichkeit gegeben, die Gesetze zu finden, nach welchen die Kräfte auf jeden Querschnitt sich vertheilen; — da diese Vertheilung lediglich von den Eigenthümlichkeiten jeder Construktion abhängt, so ist auch das zu beobachtende Verfahren in jedem Falle ein anderes, wie wir in der Folge sehen werden.

4. Die Bedingungen des Gleichgewichts bilden einen integrirenden Theil jeder Untersuchung; denn sie sind stets nothwendig, um die inneren Kräfte aus den bekannten äussern Kräften zu bestimmen. Gewöhnlich sind aber auch einzelne der letzteren (Reaktion der Widerlager etc.) nicht vorweg bekannt, und es dienen in erster Linie wieder die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zur Bestimmung der unbekannten äussern Kräfte.

Die Bedingungen des Gleichgewichts sprechen sich für die äusseren Kräfte folgendermassen aus:

Werden sämmtliche an einem Körper thätige Kräfte P nach drei zu einander senkrechten Axen, x, y, z nach dem Parallelogramm der Kräfte in ihre Composanten P_x, P_y, P_z zerlegt, so ist, wenn Gleichgewicht bestehen soll, erstens die algebraische Summe dieser Composanten nach jeder der 3 Axen gleich Null. Es ist somit:

$$\Sigma P_x = 0 \quad . \; . \; . \quad 1)$$
$$\Sigma P_y = 0 \quad . \; . \; . \quad 2)$$
$$\Sigma P_z = 0 \quad . \; . \; . \quad 3)$$

Wenn man zweitens in Bezug auf jede der 3 Axen die Momente bildet und bedenkt, dass das Moment der Kraft P in

Bezug auf die Axe der z ausgedrückt ist durch die Produkten-Summe

$$yP_x + xP_y,$$

wo x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P bezeichnen, so erfordert das Gleichgewicht, dass die Summe der Momente aller Kräfte bezogen auf jede der 3 Axen gleich Null sei. Es ist somit:

$$\Sigma yP_x + \Sigma xP_y = 0 \quad . \; . \; . \quad 4)$$
$$\Sigma zP_x + \Sigma xP_z = 0 \quad . \; . \; . \quad 5)$$
$$\Sigma yP_z + \Sigma zP_y = 0 \quad . \; . \; . \quad 6)$$

Die Axe der y wird im Folgenden immer parallel der Richtung der Schwere angenommen werden, die Axe der x ist somit horizontal und wird in die Längenaxe des Baues gelegt, die meisten Kräfte, die wir zu betrachten haben, sind so parallel der Ebene xy und wir haben daher meist blos die 3 Gleichungen 1) 2) und 4) anzuwenden.

Uebergehend auf die inneren Kräfte denken wir uns, wie in voriger N° angedeutet, den Körper durch einen Querschnitt x in 2 Fragmente getheilt, und an jedem derselben die im Querschnitt thätigen inneren Kräfte je nach entgegengesetzten Richtungen angebracht. Bezeichnen für das eine Körperfragment P'_x und P'_y die horizontalen und vertikalen Composanten der an demselben wirkenden äusseren Kräfte, ferner ΣX und ΣY die Summe der horizontalen beziehungsweise vertikalen Composanten der in der Trennungsfläche thätigen innern Kräfte, so sprechen sich die Bedingungen des Gleichgewichts nach Gleichung 1) 2) und 4) für dieses Körperfragment folgendermassen aus:

$$\Sigma P'_x + \Sigma X = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad 7)$$
$$\Sigma P'_y + \Sigma Y = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad 8)$$
$$\Sigma xP'_y + \Sigma yP'_x + \Sigma Xy = 0 \quad 9)$$

Für Balkenbrücken sind die Reaktionen der Auflager gewöhnlich parallel der Richtung der Schwere anzunehmen, indem man absieht von kleinen horizontalen Kräften, welche z. B. in Folge von Temperaturveränderungen und hiedurch hervorgerufener Reibung entstehen. Wir haben es desshalb nur mit vertikalen äusseren Kräften (in der Ebene xy) zu thun, die horizontalen Composanten P_x der äusseren Kräfte, somit auch ΣP_x sind $= 0$, und ebendarum fällt auch das Glied ΣyP_x aus, und die Gleichungen 7) — 9) nehmen folgende einfache Gestalt an:

$$\Sigma X = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$
$$\Sigma P'_y + \Sigma Y = 0$$

woraus

$$\Sigma Y = - \Sigma P'_y \quad . \; . \; . \; . \quad 11)$$
$$\Sigma xP'_y + \Sigma X_y = 0$$

woraus

$$\Sigma X_y = - \Sigma xP'_y \quad . \; . \; . \; . \quad 12)$$

Aus Gleichung 10) folgt, dass für Balkenbrücken die innern Kräfte ein Gegenpaar bilden, dessen Moment ΣXy unabhängig ist von der Wahl des Coordinatenursprungs, wo immer auch derselbe gewählt wird, erhalten wir für dasselbe eine für den fraglichen Querschnitt constante Grösse. Das Moment ΣXy der inneren Kräfte und somit auch das demselben numerisch gleiche Moment ΣxP_y der äusseren Kräfte bleibt somit auch unverändert, wenn wir den Coordinatenursprung in den fraglichen Querschnitt selbst verlegen. Wir nennen desshalb in der Folge das Moment $\Sigma xP'_y$ der äusseren Kräfte das Angriffsmoment in Beziehung auf den Querschnitt x, und bezeichnen dasselbe mit $\mathfrak{M}$, und nennen ferner das Moment ΣXy der inneren Kräfte das Widerstandsmoment.

Nach Gleichung 11) ist ferner die Resultante ΣP_y der äusseren Kräfte gleich und entgegengesetzt der vertikalen Composante ΣY der inneren Kräfte, wir nennen in der Folge die Resultante der äusseren Kräfte die Vertikalkraft und bezeichnen dieselbe mit $\mathfrak{V}$, die Grösse ΣY nennen wir den Vertikalwiderstand.

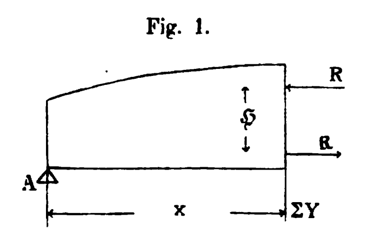
Unter Einführung dieser Bezeichnungen schreiben sich die Gleichungen 10)—12) so an:

$$\Sigma X = 0 \quad . \quad . \quad 10^a)$$
$$\Sigma Y = -\mathfrak{V} \quad . \quad 11^a)$$
$$\Sigma Xy = -\mathfrak{M} \quad . \quad 12^a)$$

Von den äusseren Kräften bezeichnen wir die Reaktionen der Auflager immer mit den für dieselben Auflagerpunkte gewählten Buchstaben A, B, C ...., das Eigengewicht der Brücke per Längeneinheit mit p, sodann in gleicher Weise die zufällige Last mit k und die Gesammtbelastung mit q, je auf die Längeneinheit reduzirt. Es kann hiebei p, k und q für jeden Querschnitt einen anderen numerischen Werth haben.

5. Für Balkenbrücken besteht zwischen dem Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ und der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ eine einfache Relation:

Fig. 1.



Wir betrachten das eine Ende eines auf zwei Stützen A und B frei aufliegenden Balkens und nehmen den Coordinatenursprung in A an, x sei die Abscisse irgend eines Querschnitts, die Belastung sei beliebig und durch ein Gesetz $q = F(x)$ gegeben, wo q, wie schon in N⁰. **4.** bemerkt, die auf die Längeneinheit reducirte Belastung im Querschnitt x bezeichnet, so dass $\int_0^x q \, . \, dx$ die zwischen A und x vertheilte Last

angibt. ΣY und ΣXy, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ haben die in N°. **4.** erläuterte Bedeutung, und ebenso bezeichnet A den am Auflagepunkt A wirkenden nach oben gerichteten Auflagerdruck.

Nehmen wir die Richtung der Schwerkraft als die positive an, und ebenso die Drehrichtung eines Momentes von links nach rechts als die positive, so sind (nach Gleichung 10) bis 12) für vorstehende Annahmen die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\Sigma X = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

$$\Sigma Y + \int_0^x q\,dx - A = 0 \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

$$\Sigma Xy + \int_0^x q\,x\,dx + x\,\Sigma Y = 0 \quad \ldots \quad 15)$$

oder wenn man statt ΣY und ΣXy die (nach Gleichung 11ª) und 12ª) denselben gleichen aber entgegengesetzten Grössen $\mathfrak{V}$ (Vertikalkraft) und $\mathfrak{M}$ (Angriffsmoment) einführt:

$$\mathfrak{V} = \int_0^x q\,dx - A \quad \ldots\ldots \quad 14^a)$$

$$\mathfrak{M} = \int_0^x qx\,dx - \mathfrak{V}x \quad \ldots\ldots \quad 15^a)$$

differenzirt man diese Gleichungen nach x, so erhält man:

$$d\mathfrak{V} = q dx$$

$$\frac{d\mathfrak{V}}{dx} = q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

$$d\mathfrak{M} = qx\,dx - \mathfrak{V}dx - d\mathfrak{V}.x$$

woraus folgt (nach Gleichung 16)

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = -\mathfrak{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17)\,^{*})$$

Die Gleichungen 14)—17) geben Anhaltspunkte für die Bestimmung der Grösse und Vorzeichen der Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für verschiedene Abscisse x:

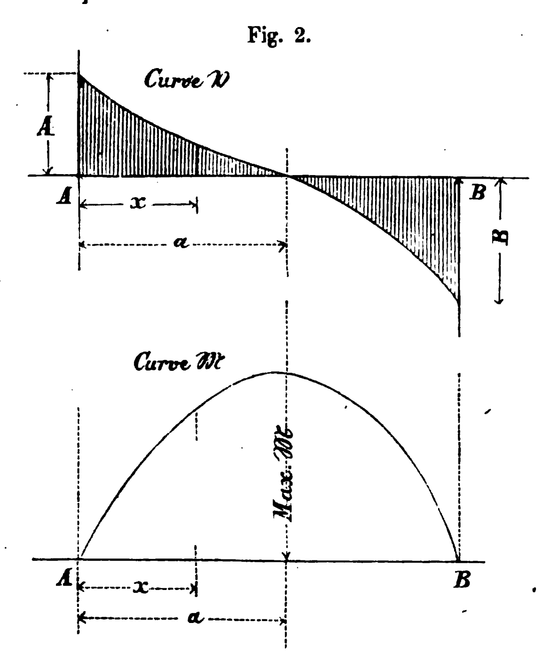
Nach Gleichung 14ª) ist für $x = 0$ $\mathfrak{V} = -A$, somit negativ (aufwärts gerichtet), numerisch gleich dem Auflagerdruck. Für wachsendes x erhält $\mathfrak{V}$ immer kleinere negative Werthe: denken wir uns eine Abscisse $x = a$ so gewählt, dass $A = \int_0^a q dx$, was ja immer möglich ist, so erhalten wir aus Gleichung 14)

$$\mathfrak{V} = \int_a^x q dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

*) Auf diese Relation hat zuerst W. Schwedler aufmerksam gemacht (Zeitschrift für Bauwesen 1851).

d. h. die Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ ist immer gleich dem zwischen a und x vertheilten Gewichte. Für $x = a$ wird $\mathfrak{V} = 0$, für Werthe $x > a$ wird sodann $\mathfrak{V}$ positiv, und erhält beim zweiten freien Auflager B seinen grössten positiven Werth.

Fig. 2.



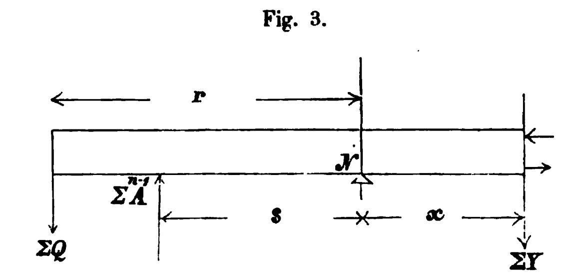
Trägt man, wie in Fig. 2 geschehen, für genügend viele Werthe von x als Abscissen die zugehörigen Werthe von $\mathfrak{V}$ als Ordinaten auf, so erhalten wir eine Curve, deren trigonometrische Tangente gleich der dem betreffenden x entsprechenden Belastung per Längeneinheit $= q$. Ist q eine constante Grösse, so geht die Curve $\mathfrak{V}$ in eine g e r a d e L i n i e über.

Uebergehend auf das Angriffsmoment, so lehrt uns zunächst Gleichung 17), dass die trigonometrische Tangente der Curve $\mathfrak{M}$ (die wir uns auf ähnliche Weise aufgetragen denken, wie oben die Curve $\mathfrak{V}$) n u m e r i s c h g l e i c h i s t d e r V e r t i k a l k r a f t $\mathfrak{V}$. In der Nähe des Auflagers ist $\mathfrak{V}$ negativ, somit nach Gleichung 15^a) $\mathfrak{M}$ positiv, dasselbe ist $= o$ für $x = o$ und erreicht seinen grössten Werth nach Gleichung 17), wenn $\mathfrak{V} = o$, somit für die Abcisse $x = a$.

Die durch Gleichung 17) ausgedrückte Relation zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ gibt ein einfaches Mittel an die Hand, aus der Gleichung für $\mathfrak{V}$ sogleich die Maximal- oder Minimalwerthe von $\mathfrak{M}$ zu erkennen, es ist nun leicht, diese Relation auch für einen nicht frei aufliegenden Träger nachzuweisen:

Denken wir uns den Auflagerpunkt N als n^{ten} Stützpunkt eines continuirlichen Trägers und führen wir links vom Punkt N als Coordinatenursprung die Resultante der Belastungen ΣQ und die Resultante der n — 1 Auflagerdrücke $\overset{n-1}{\Sigma A}$ mit ihren respec-

Fig. 3.



tiven Hebelsarmen r und s ein, so erhalten die Gleichungen 13) bis 15) folgende Form:

$$\Sigma X = 0$$

$$\int_0^x q dx + \Sigma Q - \left(\overset{n-1}{\Sigma A} + N\right) + \Sigma Y = 0$$

$$\int_0^x qx\, dx + s . \overset{n-1}{\Sigma A} - r\, \Sigma Q + x\, \Sigma Y = 0$$

und wenn wir wieder statt ΣY und ΣXy die Werthe von $\mathfrak{V}$ und und $\mathfrak{M}$ einführen:

$$\mathfrak{V} = \int_0^x q dx + \Sigma Q - \left(\overset{n-1}{\Sigma A} + N\right) \quad . \quad 14^b)$$

$$\mathfrak{M} = \int_0^x qx\, dx + s . \overset{n-1}{\Sigma A} - r\, \Sigma Q \quad . \quad 15^b)$$

Denken wir uns eine Abscisse a so gewählt, dass

$$\overset{n-1}{\Sigma A} + N - \Sigma Q = \int_0^a q dx$$

so ist wie oben:

$$\mathfrak{V} = \int_a^x q dx$$

d. h. $\mathfrak{V}$ ist auch hier gleich dem zwischen x und a vertheilten Gewicht.

Ferner sieht man bei Betrachtung der Gleichungen 14^b) und 15^b) sogleich, dass durch Differenziren der Gleichungen dieselben Werthe für $d\mathfrak{V}$ und $d\mathfrak{M}$ erhalten werden, wie aus den Gleichungen 14^a) und 15^a), und dass somit Gleichung 17) für continuirliche Träger ebenso unbedingt gültig ist, wie für Balken, welche blos über eine Oeffnung gespannt sind.

Wenn ausser der stetig vertheilten Last q auch Einzelkräfte P auf den Träger wirken, so behalten die Gleichungen 14^b) und 15^b) ihre Form bei, wir dürfen uns nur in ΣQ die Resultante sämmtlicher Gewichte links von N und aller am betrachteten Fragment wirkenden Einzelkräfte denken. Die Formel 17) gilt desshalb auch, wenn ein beliebiger Balken ausser der stetigen Last q von Einzelkräften belastet gedacht wird.

6. Nach Gleichung 13) ist die Summe der horizontalen Composanten der innern Kräfte $\Sigma X = 0$. Dieselben bilden somit ein Gegenpaar, dessen Moment von der Wahl des Coordinatenursprungs unabhängig ist (vgl. N^0. **4.**). Wenn die Relation $q = F_x$ durch ein einfaches Gesetz dargestellt ist, so ist es gewöhnlich einfacher, den Coordinatenursprung nicht nach A, sondern in den Querschnitt selbst zu verlegen und erhält man $\mathfrak{M}$ direct aus dem Auflagerdruck und der Belastung.

Ist beispielsweise q constant, so ist für den frei aufliegenden Träger:

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{qx^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

was übrigens auch aus Gleichung 15^a) folgt, denn es ist nach Gleichung 14^a)

$$\mathfrak{V} = qx - A \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

somit

$$\mathfrak{M} = \frac{qx^2}{2} - x\,(qx - A)$$

$$= Ax - \frac{qx^2}{2} \quad \text{wie oben.}$$

Führt man in die Gleichungen I. und II. noch den Werth für $A = \frac{ql}{2}$ ein, so erhält man:

$$\mathfrak{M} = \frac{ql}{2} \, . \, x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}\,(l - x)$$

$$\mathfrak{V} = q\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

Die Gleichung für $\mathfrak{M}$ stellt eine Parabel dar mit vertikaler Achse, deren Ordinaten stets positiv sind: bei einem frei aufliegenden Träger dreht das Angriffsmoment stets im Sinne des Auflagedrucks. Die Curve $\mathfrak{V}$ ist eine gerade Linie, deren Ordinaten von $x = 0$ bis $\frac{l}{2}$ negativ, von $x = \frac{l}{2}$ bis l positiv sind.

Ganz ähnliche Betrachtungen sind für continuirliche Träger anzustellen: vorgreifend dem Gange der spätern Entwicklung be-

merken wir, dass in den graphischen Darstellungen Tafel II. und folgenden die Curven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für frei aufliegende und continuirliche Träger zur Anschauung gebracht sind in der Weise, dass in diesen Darstellungen die negativen Werthe von $\mathfrak{V}$ nach unten, die negativen Werthe von $\mathfrak{M}$ nach oben angeklappt sind, so dass nur die numerischen Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ aus den Figuren erhältlich sind.

Bezüglich der Vorzeichen muss desshalb stets auf Gleichung 14) und 15) a und b zurückgegriffen werden.

Was die inneren Kräfte anbelangt, so ist ΣY und ΣXy numerisch gleich $\mathfrak{V}$ respective $\mathfrak{M}$, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen. Nachdem desshalb aus Obigem $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ nach Grösse und Vorzeichen bekannt sind, unterliegt die Bestimmung von ΣY und ΣXy nach Grösse und Vorzeichen keinem Anstande.

7. Wenn man sich für die inneren Kräfte eines Querschnitts die Summe der positiven und negativen horizontalen Composanten abgesondert bildet (vergleiche Figur 1) und diese numerisch gleichen Resultanten R und R′ der beiderlei horizontalen Kräfte in ihren respektiven Angriffspunkten wirksam denkt, so dass mit $\mathfrak{H}$ der Abstand der Angriffspunkte der Resultanten bezeichnet ist, so ist nach der Definition der Gegenpaare

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \mathfrak{H}R = \mathfrak{H}R' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Wenn z. B. die sämmtlichen horizontalen Kraftcomposanten an irgend einer Stelle eines Trägers in einem gezogenen oder in einem gedrückten Bande vereinigt sind, und die Druck- und Zugmittelpunkte in diesen Bändern mit hinreichender Genauigkeit sich vorab bestimmen lassen, so gibt Gleichung 19) die in jedem Band wirkende horizontale Kraft R direkt aus dem Angriffsmoment $\mathfrak{M}$, und lässt sich die ganze im Band wirkende Kraft sofort bestimmen durch Dividiren mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den das Band an dieser Stelle mit dem Horizont bildet.

§. 3. Die Lehre von der Festigkeit stabförmiger Körper.

8. Die Theorie der absoluten und absolut rückwirkenden Festigkeit beruht auf der Wahrnehmung, dass ein stabförmiger Körper, der nach seiner Längenrichtung gezogen oder gedrückt wird, diesen Druck oder Zug auf seinen Querschnitt gleichförmig vertheilt, so dass stets die Relation stattfindet:

$$P = \mathfrak{A}\omega = \mathfrak{B}\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

Die Grösse P bezeichnet die einwirkende Kraft, ω den Querschnitt des fraglichen Stabs, $\mathfrak{A}$ die per Quadrateinheit herrschende Spannung, $\mathfrak{B}$ ebenso die per Quadrateinheit herrschende Pressung.

(Wir werden die Ausdrücke »Spannung« und »Pressung« stets nur für eine per Quadrateinheit berechnete Kraft gebrauchen.)

Bezeichnen wir mit P_a denjenigen Zug, mit P_b denjenigen Druck, der eine Zerstörung des Stabes (Zerreissen, beziehungsweise Zerdrücken) zur Folge hat, ferner mit $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ die betreffende Spannung und Pressung pro Quadrateinheit, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} P_a = \mathfrak{A}_0\, \omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ P_b = \mathfrak{B}_0\, \omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{array}\right\} \quad 21)$$

Es ist Erfahrung, dass $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ für ein und dasselbe Material einen nahezu constanten Werth haben. In der Praxis nimmt man einen bestimmten Bruchtheil von $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ als grösste zulässige Spannung oder Pressung an.

Anmerk. Für diesen sowie die folgenden Fälle sei darauf hingewiesen, dass die praktischen Coefficienten im zweiten Abschnitt zusammengestellt sind.

9. Ein Stab erleidet durch einen nach seiner Länge gerichteten Zug eine Verlängerung, durch einen Druck eine Verkürzung, welche erfahrungsgemäss seiner Länge und der per Quadrateinheit herrschenden Spannung $\mathfrak{A}$ oder Pressung $\mathfrak{B}$ proportional ist. Diese Verlängerung oder Verkürzung ist somit ausgedrückt durch die Formel:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathfrak{A}}{E} = \frac{\mathfrak{B}}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 22)$$

hierin bezeichnet:

l die ursprüngliche Länge des Stabes,
λ die Verlängerung oder Verkürzung,
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wie oben die Spannung oder Pressung (pro Quadrateinheit),
E einen Coefficienten, der von der Natur des Materials abhängig ist und für Druck und Zug verschiedenen Werth haben kann. Man hat diesem Coefficienten den Namen Elasticitäts-Modul gegeben.

Für diejenigen Spannungen und Pressungen, welche bei Baueonstruktionen nicht überschritten werden sollen, ist der Elasticitätsmodulus eine für jedes Material bestimmte constante Grösse und hat innerhalb dieser Grenzen auch für Druck und Zug denselben Werth. Wenn wir nämlich in Gleichung 22) die Spannung $\mathfrak{A}$ oder Pressung $\mathfrak{B}$ in Kilogrammen per Quadratcentimeter angeben und l und λ in demselben, übrigens beliebigen Maassstab, ausdrücken, so ist der Werth von E gleichfalls in Kilogrammen durch folgende Tabelle II. gegeben:

Tabelle II.

Für Holz	E = 100000 Kilogr. pro □Cent.
„ Schmiedeisen . . .	E = 1'800000 „ „ „
„ Gusseisen	E = 900000 „ „ „
„ Stahl, weich . . .	E = 1'800000 „ „ „
„ „ gehärtet . .	E = 3'000000 „ „ „

Versuche mit weichem Stahl haben theilweise sehr niedrige Elasticitätsmodule und eine sehr rasche Abnahme derselben bei zunehmender Belastung ergeben; die Verschiedenartigkeit des Materials und die geringe Anzahl der Versuche lassen noch keine unbedingt gültigen Angaben zu.

Der Elasticitäts-Modul E stellt eine Kraft dar, welche die Länge eines gezogenen Stabes von 1 □Cent. Querschnitt verdoppeln würde; eine derartige Spannung können aber die Baumaterialien nicht ertragen, vielmehr bewegen sich die Statt habenden Verlängerungen und Verkürzungen innerhalb weit geringerer Beträge; nachstehende Tabelle III. zeigt die Formänderungen, welche in Folge der bei Bauten zulässigen Spannungen und Pressungen eintreten, indem die in Tabelle II. aufgestellten Werthe der Elasticitäts-Module zu Grunde gelegt sind.

Tabelle III.

Spannung oder Pressung pro Quadratcentim. in Kilogr.	Ausdehnung oder Verkürzung $\frac{\lambda}{l}$		
	Holz	Schmiedeisen	Gusseisen
100	$^1/_{1000}$	$^1/_{18000}$	$^1/_{9000}$
200	—	$^1/_{9000}$	$^1/_{4500}$
400	—	$^1/_{4500}$	$^1/_{2250}$
600	—	$^1/_{3000}$	$^1/_{1500}$
800	—	$^1/_{2250}$	$^1/_{1125}$
1000	—	$^1/_{1800}$	$^1/_{900}$
1200	—	$^1/_{1500}$	$^1/_{750}$
1400	—	$^1/_{1286}$	$^1/_{643}$
1600	—	$^1/_{1125}$	$^1/_{562}$

10. Das durch diese Tabelle ausgesprochene Gesetz ist nicht in aller Strenge richtig; es ändert sich nicht nur wesentlich, wenn die Spannungen die in der Praxis üblichen überschreiten, sondern auch innerhalb dieser Grenzen sind die in Tabelle II. gegebenen Elasticitäts-Module nur Mittelwerthe.

Für Schmiedeisen ist nach den Versuchen von Hodgkinson bei Belastungen bis zu 1600 Kilo pro Quadrat-Centimeter

für Zug $E = 1'634000$,
für Druck $E = 1'968000$,

somit im Mittel, wie in Tabelle II. angenommen, $E = 1'800000$. — Bei gsösseren Belastungen nimmt der Elasticitätsmodul wesentlich ab, so dass er z. B. bei einer Spannung von 2400 Kilo pro Quadrat-Centimeter nur etwa $^1/_3$ des obigen Mittelwerths von 1'800000 beträgt: und ähnlich, nur in geringerem Maasse, nimmt

der Elasticitäts-Modul für gepresstes Schmiedeisen ab. Bei diesen grösseren Belastungen und hauptsächlich in der Nähe des Bruchs ist der Elasticitäts-Modul für verschiedene Eisengattungen wesentlich verschieden, so dass für die beim Zug beobachtete Bruchbelastung $\frac{\lambda}{l}$ zwischen $^1/_8$ und $^1/_{60}$ schwankt; ersterer Werth gilt für sehr sehniges, letzteres für schlechtes, crystallinisches Schmiedeisen.

Es zeigt sich ferner, dass bei diesen grösseren Belastungen ein vollständiges Zurückgehen in die frühere Lage nach Wegnahme der Belastung nicht mehr eintritt, sondern eine gewisse bleibende (permanente) Verlängerung oder Verkürzung zurückbleibt; diess findet beim Schmiedeisen im Allgemeinen in bemerkbarer Weise dann Statt, wenn die Belastung 1600 Kilo pro Quadrat-Centimeter übersteigt; man erhält hiedurch den Begriff der Grenze der Elasticität und haben einzelne Constructeure die zulässige Belastung von der Elasticitätsgrenze abgeleitet; es setzt diess jedoch voraus, dass diese Grenze durch subtile Beobachtung der Formänderungen erhoben sei, und insofern diese Grenze von der Qualität des Materials wesentlich abhängt, im gegebenen Falle neu erhoben werde, was stets erhebliche Schwierigkeiten mit sich bringen dürfte. — Andererseits ist es nicht nur Thatsache, dass die Erscheinungen des Bruchs weit präciser sich darstellen, somit weit leichter zu beobachten sind, sondern es ist auch die Bruchbelastung für die verschiedenen Eisensorten durchaus nicht so unter sich abweichend und schwankend, als die Elasticitätsgrenze.

Aus diesen Gründen scheint uns die zulässige Belastung aus der Bruchbelastung abzuleiten zu sein, wie diess schon im Eingang von N°. **8** angenommen ist; wir stellen keine besonderen Untersuchungen über die Nähe der Elasticitätsgrenze an, sondern es genügt für unsere Berechnungen zu wissen, dass die zulässigen Spannungen und Pressungen sich noch hinreichend innerhalb der Elasticitätsgrenze bewegen; innerhalb dieser Grenze hat für Schmiedeisen der Elasticitäts-Modul den für Druck und Zug annähernd gleichen Werth von 1'800000 Kil.

11. Beim Gusseisen treten ähnliche Erscheinungen ein, nur ist der Elasticitäts-Modul noch mehr verschieden, und zwar wiederum abnehmend mit steigender Belastung. — Eine bestimmte Elasticitätsgrenze lässt sich gar nicht angeben, denn das Gusseisen zeigt fast bei jeder Belastung eine bleibende Formänderung.

Zur nähern Erläuterung dienen nachfolgende Tabellen, welche den Versuchen des Eaton Hodgkinson entnommen sind.

Tabelle IV.

Elasticitätsmodule für Gusseisen beim Zug.

Belastung pro Quadratcentim. in Kilogr.	Verlängerung pro lauf. Meter. total.	Verlängerung pro lauf. Meter. permanent	Elasticitätsmodul pro Quadrat-Centimeter.
Kilo	Meter	Millimeter	Kilo
74	0,000075	0	985567
111	0,000114	0,00183	977467
148	0,000155	0,00454	956369
221	0,000239	0,00891	923100
296	0,000326	0,01460	909650
370	0,000416	0,02200	889255
444	0,000551	0,03100	870385
517	0,000611	0,04300	846490
592	0,000715	0,05590	828180
666	0,000828	0,07030	804407
740	0,000946	0,08840	782785
815	0,001068	0,10880	762420
887	0,001206	0,13390	754117
963	0,001392	0,17460	693111
1040	0,001548	0,20070	672313

Tabelle IV^a.

Elasticitätsmodule für Gusseisen beim Druck.

Belastung pro Quadratcentim. in Kilogr.	Verlängerung pro lauf. Meter. total.	Verlängerung pro lauf. Meter. permanent.	Elasticitätsmodul pro Quadrat-Centimeter.
Kilo	Meter	Millimeter	Kilo
145	0,00015605	0,003914	929278
290	0,00032396	0,01882	898608
439	0,00049784	0,03331	874407
580	0,00065625	0,05371	884580
725	0,00082808	0,07053	876147
871	0,00100253	0,09053	868443
1015	0,0011795	0,11700	861172
1161	0,0013606	0,14258	853178
1305	0,0015411	0,17085	847426
1451	0,0017175	0,20685	844839
1741	0,0020786	0,36810	837678
2032	0,0024733	0,45810	821648
2327	0,0029432	0,50768	788718

Nimmt man die Mittelwerthe dieser Elasticitäts-Module bis zu den Belastungen von 592^k beziehungsweise 1741 Kilo inclusive, so erhält man

für die Ausdehnung:

$$E = 909607^k \text{ pro Quadrat-Centimeter,}$$

für die Zusammendrückung:

$$E = 880476^k$$

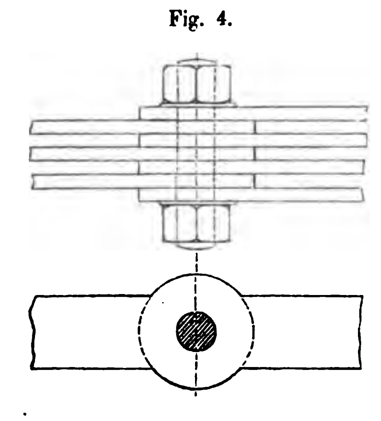
oder im Mittel:

$$E = 895042^k$$

wofür wir oben annähernd 900000^k gesetzt haben.

12. Die Festigkeit gegen Abscheeren wird in Anspruch genommen, wenn zwei Theile eines Körpers längs einer gemeinschaftlichen Ebene nach verschiedenen Richtungen gedrängt werden. Wenn der Körper frei wäre, so würde hiedurch eine Drehung hervorgebracht; ist aber diese Drehung durch andere Kräfte verhindert, so ist längs der gemeinschaftlich gedachten Trennungsfläche für beide Körperfragmente das Bestreben vorhanden, an einander vorbeizugleiten. Als einfachstes Beispiel führen wir einen Bolzen an, der mehrere Kettenglieder verbindet, wie solches in Fig. 4 dargestellt ist; der in die Berührungsfläche der Kettenglieder fallende Bolzenquerschnitt ist auf Abscheeren in Anspruch genommen; auf gleiche Weise sind die Nieten aller Blechverbindungen angegriffen etc.

Fig. 4.



Denken wir uns allgemein in einem Körper, der von einer Kraft nach beliebiger Richtung angegriffen ist, eine Trennungsfläche, welche einen Winkel mit der Richtung der Kraft bildet und zerlegen wir diese Kraft in zwei Composanten senkrecht und parallel zur gedachten Trennungsfläche, so wirkt die senkrechte Composante auf absolute oder absolut rückwirkende Festigkeit und bringt eine Spannung hervor, welche nach Gleichung 20) zu berechnen ist. — Die parallel der Ebene gerichtete Composante nimmt den Körper auf Abscheeren in Anspruch, sie erzeugt innere Kräfte in dem Körper, welche wir Schubkräfte nennen; dieselben sind gleichförmig über die Trennungsfläche vertheilt, so dass die Relation stattfindet:

$$P = \mathfrak{S}\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23)$$

P bedeutet die längs der Trennungsebene wirkende Kraft, ω den Querschnitt und $\mathfrak{S}$ die per Quadrateinheit wirkende Schubkraft, welcher wir den Namen **Schubspannung** beilegen wollen. Ist P_0 diejenige Kraft, welche die Trennung wirklich hervorbringt, $\mathfrak{S}_0$ die dem Bruch entsprechende Schubspannung, so findet die Gleichung statt:

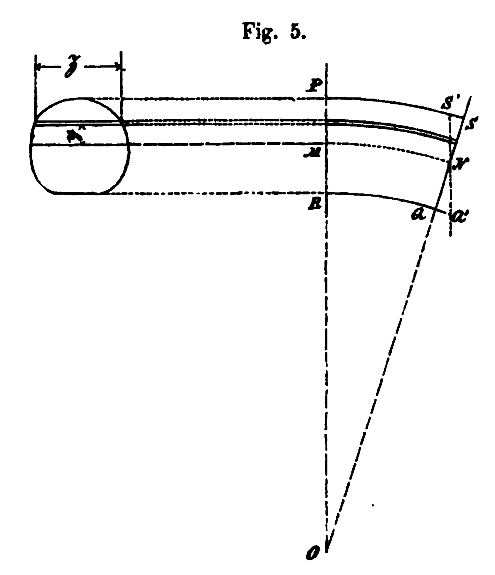
$$P_0 = \mathfrak{S}_0 \, \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

Die Festigkeit gegen Abscheeren ist für Schmiedeisen im Allgemeinen gleich der absoluten Festigkeit gegen Zug zu setzen; vorausgesetzt, dass die betrachtete Fläche gleichförmig auf Abscheeren in Anspruch genommen ist, was bei Nieten oder Schraubenbolzen nicht immer stattfindet; hierüber und über die Reibung an den Bolzen wird unten Näheres angeführt werden.

Die Festigkeit gegen Abscheeren ist übrigens auch verschieden in Folge der Textur der Materialien; so z. B. hat man beobachtet, dass Walzeisen senkrecht zur Richtung der Bahn, d. h. senkrecht zur Längenrichtung, grössere Abscheerungsfestigkeit zeigt, als nach der Längenrichtung selbst. — Beim Holz ist in Folge der Faserbildung die Verschiedenheit eine sehr bedeutende; das Holz spaltet sich parallel der Längenrichtung sehr leicht, während es einem seitlichen Abscheeren mit grosser Zähigkeit widersteht.

13. Die relative Festigkeit eines Stabes wird in Anspruch genommen, wenn eine zu seiner Längenrichtung senkrechte Kraft auf ihn einwirkt. Der Stab erleidet hiedurch eine Biegung, seine concave Seite verkürzt sich, seine convexe Seite verlängert sich, innerhalb des Stabes liegt irgendwo eine Schichte, welche weder verkürzt noch verlängert wird und die „neutrale Faser“ heisst. Zwischen der neutralen Faser und den äussersten Fasern nimmt Verkürzung und Verlängerung allmälig zu. Ein Mass für die Verkürzung und Verlängerung erhalten wir durch die einigermassen willkürliche Annahme, dass Schnitte, welche vor der Biegung normal zur neutralen Faser sind, diess auch nach der Biegung bleiben. Da die mit Hülfe dieser Vor-

Fig. 5.



aussetzung gewonnenen Resultate mit der Wirklichkeit ziemlich übereinstimmen, so ist dadurch rückwärts die Zulässigkeit dieser Voraussetzung bestätigt.

Betrachten wir ein kleines Stück eines gebogenen Balkens, so werden im Längenschnitt (s. Fig. 5) alle vor der Biegung geraden Faserelemente nunmehr kleine Kreisbögen bilden, welche aus einem und demselben Mittelpunkt beschrieben sind. — Linien vor der Biegung normal und parallel werden nun Normallinien auf allen Kreisbögen sein und zwei beliebig gezogene Normalen PR und SQ geben zu erkennen, um wie viel die einelnen Elemente des zwischen ihnen gelegenen Balkentücks verkürzt oder verlängert sind; gemäss Gleichung 22) giebt diese Verlängerung oder Verkürzung direkt die im Material herrschende Spannung, beziehungsweise Pressung an. Diese Spannung ist demgemäss proportional dem Abstand y von der neutralen Faser; wenn wir daher mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Spannung und Pressung in den äussersten Fasern, mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Entfernung dieser letztern von der neutralen Faser bezeichnen, so ist der in einem Element vom Querschnitt z . dy herrschende Zug $\mathfrak{A}_y$ oder Druck $\mathfrak{B}_y$ nach Gleichung 20) ausgedrückt durch

Fig. 6.

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_y &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\, y \,.\, z dy \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \mathfrak{B}_y &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\, y \,.\, z dy \quad . \quad . \quad . \quad .\end{aligned}\right\} 25)$$

somit ist die Summe sämmtlicher Spannungen und Pressungen:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X_{\mathfrak{a}} &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\int_0^{\mathfrak{a}} y \,.\, z dy \quad . \quad . \quad . \\ \Sigma X_{\mathfrak{b}} &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\int_0^{\mathfrak{b}} y \,.\, z dy \quad . \quad . \quad .\end{aligned}\right\} 26)$$

Da für alle Balkenbrücken gemäss Gleichung 10) stets

$$\Sigma X_{\mathfrak{a}} - \Sigma X_{\mathfrak{b}} = \Sigma X = 0$$

so ist somit:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\int_0^{\mathfrak{a}} y\ z dy - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\int_0^{\mathfrak{b}} y\ z dy = 0 \quad . \quad . \quad 27)$$

So lange E für Druck und Zug denselben Werth hat, ist auch stets $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, dieses vorausgesetzt, enthält Gleichung 27) die Bedingung:

die neutrale Faser geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Wir haben in 7. die Summe aller horizontalen Spannungen gleich der Summe aller horizontalen Pressungen mit R bezeichnet, d. h. es ist

$$\Sigma X_{\mathfrak{a}} = \Sigma X_{\mathfrak{b}} = R$$

Wir können nunmehr für homogene Stäbe einen mathematischen Ausdruck für R geben, indem wir für ΣX_a und ΣX_b die so eben entwickelten Werthe einsetzen, d. h. es ist

$$\left.\begin{array}{l} R = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\int_0^a y \,.\, z dy \,\ldots\ldots \\ R = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\int_0^b y \,.\, z dy \,\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 28)$$

Um diesen Ausdruck durch Zahlenwerthe darstellen zu können, muss die neutrale Faser vorab bekannt sein, d. h. es muss der Schwerpunkt des Querschnitts bestimmt worden sein.

Die Kräfte ΣX_a und ΣX_b bilden, wie nun schon mehrfach hervorgehoben, ein Gegenpaar, welches wir das Widerstandsmoment ΣXy des betreffenden Querschnitts genannt haben, und welches dem Angriffsmoment der äusseren Kräfte $\mathfrak{M}$ numerisch gleich ist.

Um für ΣXy einen geordneten übersichtlichen Ausdruck zu erhalten, legen wir den Coordinatenursprung in den Schwerpunkt des Querschnitts und bilden die Summe der Kraftmomente

$$\text{für Zug} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\int_0^a zy^2 \,.\, dy$$

$$\text{für Druck} \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\int_0^b zy^2\, dy$$

wonach sich ergibt:

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\int_0^a zy^2 \,.\, dy + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\int_0^b zy^2\, dy \quad .\ . \quad 29)$$

Den Ausdruck $\int zy^2\, dy$ nennt man in der Mechanik das **Trägheitsmoment** der Fläche zy, und ist dieser Ausdruck lediglich von der Gestalt des Querschnitts abhängig; wenn nun wiederum wie oben $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$ gesetzt werden darf (d. h. wenn die Elasticitätsmodule für Druck und Zug gleich sind), so können die Trägheitsmomente der gedrückten und der gezogenen Fläche sofort addirt werden und ist das **Trägheitsmoment** Θ **des Querschnitts** ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\Theta = \int_0^a y^2 \,.\, z dy + \int_0^b y^2\, z dy \quad .\ .\ . \quad 30)$$

Es folgt nun aus den Gleichungen 29) und 30):

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\Theta \quad .\ .\ . \quad 31)$$

Indem man die Gleichung 31) mit der Gleichung 19) in N⁰. 7 combinirt, und für R seinen Werth aus Gleichung 28) einsetzt, erhält man für die in Nr. 7 definirte Grösse $\mathfrak{H}$

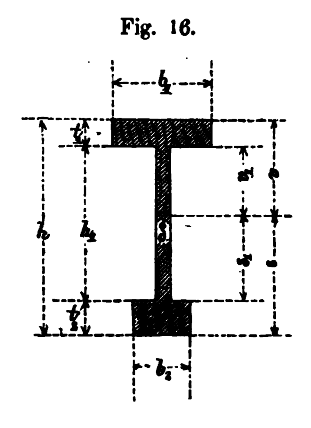
$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\int_0^a yz\, dy} = \frac{\Theta}{\int_0^b yz\, dy} \quad .\ . \quad 32)$$

Die Integrale in Gleichung 32) bedeuten die Momente des gezogenen (beziehungsweise gedrückten) Theils des Querschnitts in Bezug auf die neutrale Faser; da letztere im Schwerpunkt liegt, so erklärt sich die Identität der beiden Momente aus der Definition des Schwerpunkts; für geradlinig begrenzte Querschnittformen ist das Moment des Querschnitts, bezogen auf die neutrale Faser, sehr leicht anzuschreiben, indem nur elementare Rechnungsarten in Anwendung kommen.

14. Das Widerstandsmoment eines Querschnittes ist nach dem Vorhergehenden direct proportional dem Trägheitsmoment, und indem man letzteres für die einzelnen Querschnittformen vorab bestimmt, so sind für diese Querschnitte alle umständlichen Rechnungen abgeschnitten; wir geben daher in Tabelle V. und Folgendem eine Zusammenstellung der häufiger vorkommenden Trägheitsmomente Θ und der zugehörigen Grössen $\frac{\Theta}{a}$ und $\frac{\Theta}{b}$.

In den nachfolgenden Querschnitten Fig. 16 und 17 ist angenommen, dass der obere Theil des Querschnitts gepresst, der untere Theil gezogen sei, wie diess bei einem frei aufliegenden Balken der Fall ist; findet der umgekehrte Fall statt (oder wenn der Querschnitt umgedreht gedacht wird), so würden die Werthe $\frac{\Theta}{a}$ und $\frac{\Theta}{b}$ ihre Werthe vertauschen, während Θ unverändert bleibt.

Fig. 16.



Man findet zunächst die Lage des Schwerpunkts durch folgende Gleichung:

$$s = \frac{b_2\, t_2 \cdot \frac{t_2}{2} + h_1\, \delta \cdot \frac{h_1 + 2\, t_2}{2} + b_1\, t_1\, \frac{t_1 + 2\,(h_1 + t_2)}{2}}{b_1\, t_1 + b_2\, t_2 + h_1\, \delta}$$

Es ist nunmehr das Trägheitsmoment:

Tabelle V.

Nr. d. Fig.	Form des Querschnitts.	Trägheitsmoment Θ.	$\frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{b}$
7		$\frac{1}{12}\,bh^3$	$\frac{1}{6}\,bh^2$
8		$\frac{1}{12}\,b\,(h^3 - h_1^3)$	$\frac{b\,(h^3 - h_1^3)}{6\,.\,h}$
9	a. b. c.	$\frac{1}{12}\,(bh^3 - b_1\,h_1^3)$ oder $\frac{1}{12}\left[bh^3 - (b-\delta)h_1^3\right]$	$\frac{bh^3 - b_1\,h_1^3}{6\,.\,h}$ oder $\frac{bh^3 - (b-\delta)\,h_1^3}{6\,.\,h}$
10	a. b. c.	$\frac{b_1h^3 + (b-b_1)h_1^3}{12}$	$\frac{b_1h^3 + (b-b_1)h_1^3}{6\,.\,h}$

Tabelle V. (Fortsetzung.)

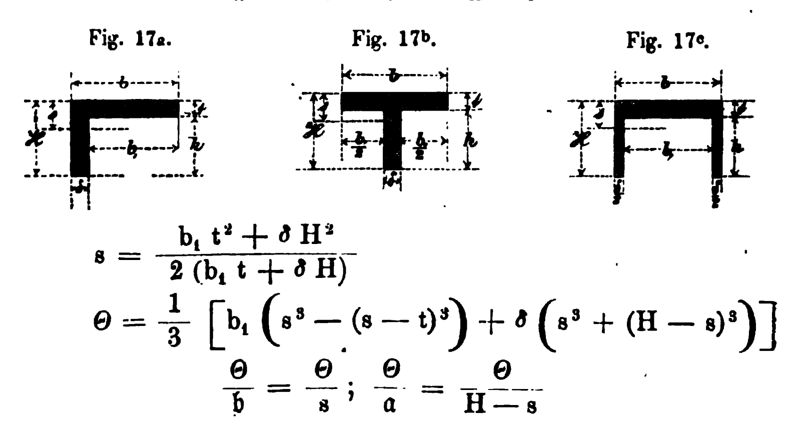
Nr. d. Fig.	Form des Querschnitts.	Trägheitsmoment Θ.	$\frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{b}$
11		$\frac{1}{12}\left[b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3\right]$	$\frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 - b_3 h_3^3}{6\,h_1}$
12		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$
13		$\frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$ $= 0{,}0491\,(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi\,(D^4 - d^4)}{32\,.\,D}$
14		$0{,}0601\,(D^4 - d^4)$	$\frac{0{,}1202\,(D^4 - d^4)}{D}$
15		$\frac{\pi}{64}\,(\alpha^3 \beta - \alpha_1^3 \beta_1)$	$\frac{\pi\,(\alpha^3 \beta - \alpha_1^3 \beta_1)}{32\,\alpha}$

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[b_1 v^3 - (b_1 - \delta)\, v_1{}^3 + b_2\, s^3 - (b_2 - \delta)\, s_1{}^3\right]$$

und hieraus das Widerstandsmoment:

$$\frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{s};\ \frac{\Theta}{b} = \frac{\Theta}{h - s}$$

Fig. 17a. Fig. 17b. Fig. 17c.

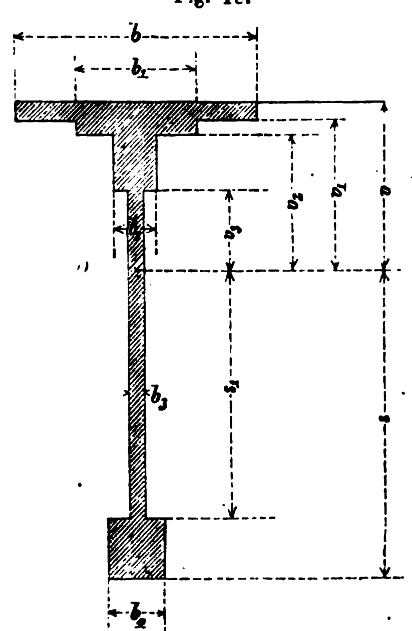


$$s = \frac{b_1\, t^2 + \delta\, H^2}{2\,(b_1\, t + \delta\, H)}$$

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[b_1\left(s^3 - (s - t)^3\right) + \delta\left(s^3 + (H - s)^3\right)\right]$$

$$\frac{\Theta}{b} = \frac{\Theta}{s};\ \frac{\Theta}{a} = \frac{\Theta}{H - s}$$

Fig. 18.



Beispielsweise soll nun das Trägheitsmoment für einen complicirteren Querschnitt bestimmt werden (s. Fig. 18). — Wir

nehmen an, der Schwerpunkt des Querschnittes sei bereits gefunden und die Linie OM sei durch diesen Punkt gelegt. Wir finden dann das Trägheitsmoment durch Addition der Trägheitsmomente des gedrückten und gezogenen Theils, wie solche durch die Linie OM abgeschieden sind. Wir haben für den obern Theil, indem man von dem Trägheitsmoment $\int_0^v by^2dy = \frac{1}{3} bv^3$ des Vierecks $b \, . \, v$ die Trägheitsmomente der hohlen Räume abzieht,

$$\Theta_o = \frac{1}{3}\left(bv^3 - (b - b_1)\, v_1{}^3 - (b_1 - b_2)\, v_2{}^3 - (b_2 - b_3)\, v_3{}^3\right) \quad \text{I.}$$

und für den untern Theil

$$\Theta_s = \frac{1}{3}\left(b_4 s^3 - (b_4 - b_3)\, s_1{}^3\right) \quad . \text{ II.}$$

das Trägheitsmoment Θ des ganzen Querschnitts ist aber

$$\Theta = \Theta_o + \Theta_s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{III.}$$

Um dieses Verfahren an einem Zahlenbeispiel zu zeigen, sei unter Beibehaltung der vorstehenden Anordnung des Querschnitts die Höhe $H = v + s = 100$ Cent., die Dicke der Mittelrippe $b_3 = 1$ Cent.; das untere Band habe (inclus. Mittelrippe) eine Breite von $b_4 = 5$ Cent. und eine Höhe von 16 Cent.; die obere Gurtung, bestehend aus 2 Winkeln und dem breiten horizontalen Band, habe 100 Quadrat-Centim. Querschnitt; nämlich zwei Winkel von 9 Cent. Schenkelbreite und 1 Cent. Dicke, gibt je 17, zusammen 34 Quadrat-Centim., während das oberste Band 33 Cent. breit und 2 Cent. dick ist; die untere Gurtung hat dann $^4/_5$ des Querschnitts der oberen Gurtung. — Diese Maasse sind in nachstehender Figur 19. eingetragen und muss nun zunächst der Schwerpunkt dieser Fläche bestimmt werden. — Zu diesem Behufe sind die Abstände y der einzelnen Abtheilungsschwerpunkte von der untern Kante, dessgleichen der Abstand s der Gesammtfläche in der Figur eingetragen. Nach der Definition des Schwerpunktes findet die Relation statt:

$$\begin{aligned} s \times (\text{Gesammtfläche}) = {} & 33.\ 2.\ y_5 + 18.\ 1.\ y_4 \\ & + \ 8.\ 2.\ y_3 = 98.\ 1.\ y_2 \\ & + 16.\ 4.\ y_1 \end{aligned}$$

woraus, indem man die Flächeninhalte ausrechnet und die Werthe für die einzelnen y einsetzt, folgt:

$$s = \frac{15107}{262} = 57{,}_{66} \text{ Cent.,}$$

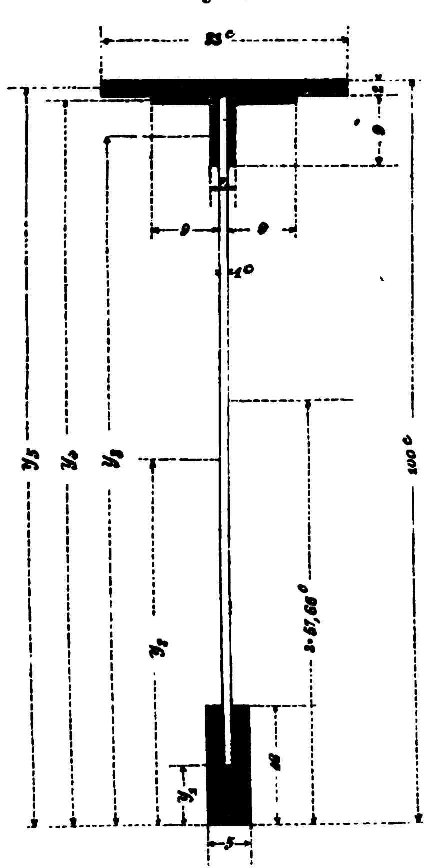
wonach für die einzelnen v und s der Figur 19 folgt:

$$\begin{aligned} v &= 42{,}_{33} \text{ Centim.} \\ v_1 &= 40{,}_{33} \quad " \\ v_2 &= 39{,}_{33} \quad " \\ v_3 &= 31{,}_{33} \quad " \\ s &= 57{,}_{66} \quad " \\ s_1 &= 41{,}_{66} \quad " \end{aligned}$$

ferner ist

$$
\begin{aligned}
b &= 33 \text{ Centim.} \\
b_1 &= 19 \quad " \\
b_2 &= 3 \quad " \\
b_3 &= 1 \quad " \\
b_4 &= 5 \quad ".
\end{aligned}
$$

Fig. 19.



und nach Einsetzung dieser Werthe in den Gleichungen I.—III.:

$$\Theta = \frac{1}{3}\left(33.\,42{,}_{33}{}^3 - 14.\,40{,}_{33}{}^3 - 16.\,39{,}_{33}{}^3 - 2.\,31{,}_{33}{}^3) + 5.\,57{,}_{66}{}^3 - 4.\,41{,}_{66}{}^3\right)$$

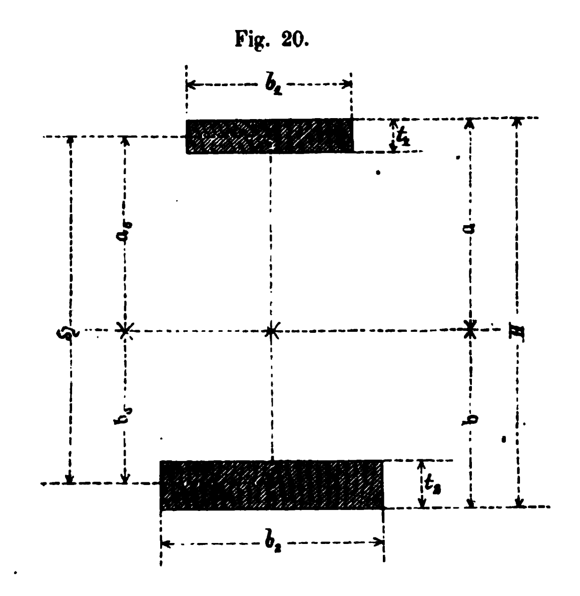
somit

$$\Theta = 398113 \text{ Centim.}^4$$

15. Für die meisten Fälle der Praxis kann das Trägheitsmoment Θ, beziehungsweise das Widerstandsmoment ΣXy durch ein Näherungsverfahren schnell mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden, wie diess an dem Beispiel eines Trägers mit rechteckigem Gurtungs-Querschnitt entwickelt und nachgewiesen werden soll.

In nachstehender Figur 20 sei mit $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{b}_0$ der Abstand der Schwerpunkte der beiden Gurtungs-Querschnitte vom gemeinsamen Schwerpunkt der Gesammtfläche bezeichnet; die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist aus der Figur selbst ersichtlich.

Fig. 20.



Das Trägheitsmoment dieses Trägers ist

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[\mathfrak{b}_1 (\mathfrak{a}^3 - [\mathfrak{a} - t_1]^3) + \mathfrak{b}_2 (\mathfrak{b}^3 - [\mathfrak{b} - t_2]^3)\right]$$

substituirt man in diesen Gleichungen

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} - \frac{t_1}{2} \qquad \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b} - \frac{t_2}{2}$$

$$\Omega_a = t_1 \mathfrak{b}_1 \qquad \Omega_b = t_2 \mathfrak{b}_2$$

so dass Ω_a und Ω_b die Flächeninhalte der beiden Gurtungen bezeichnen, so erhält man

$$\Theta = \frac{1}{3}\left[\Omega_a (3\mathfrak{a}_0^2 + \frac{t_1^2}{4}) + \Omega_b (3\mathfrak{b}_0^2 + \frac{t_2^2}{4})\right]$$

Wenn nun die Gurtung verhältnissmässig niedrig ist, im Vergleich zur ganzen Trägerhöhe, so kann man $\frac{t_1^2}{4}$ und $\frac{t_2^2}{4}$ gegenüber von $3\mathfrak{a}_0^2$ beziehungsweise $3\mathfrak{b}_0^2$ vernachlässigen und erhält als hinreichend genau

$$\Theta = \Omega_\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}_0^2 + \Omega_\mathfrak{b}\, \mathfrak{b}_0^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 33)$$

Berücksichtigt man ferner, dass nach der Definition des Schwerpunkts $\Omega_\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}_0 = \Omega_\mathfrak{b}\, \mathfrak{b}_0$ und dass $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{H}_0$, so ist

$$\Theta = \Omega_\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a}_0\, \mathfrak{H}_0 = \Omega_\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{b}_0\, \mathfrak{H}_0 \quad . \; . \; . \quad 34)$$

und für Träger von gleichem Gurtungs-Querschnitt

$$\Theta = \frac{1}{2}\, \Omega \,.\, \mathfrak{H}_0^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 34^a)$$

Wenn man den Näherungswerth für Θ aus Gleichung 34) in die Gleichung 31) einsetzt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \,.\, \mathfrak{A} \,.\, \Omega_\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{H}_0 \\ \mathfrak{M} &= \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \,.\, \mathfrak{B} \,.\, \Omega_\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{H}_0 \end{aligned}\right| \quad . \; . \quad 35)$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Spannung, beziehungsweise Pressung in den äussersten im Abstande $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ befindlichen Fasern bezeichnen.

Wir hätten Gleichung 35) auch unmittelbar erhalten, indem wir uns Druck und Zug je im Schwerpunkte der betreffenden Gurtung vereinigt gedacht hätten (vergl. Gleichung 19); indem man sich Rechenschaft darüber gibt, wie nahe der Gurtungsschwerpunkt im vorliegenden Falle dem Mittelpunkt von Druck und Zug liegt, erhält man eine weitere Anschauung von dem unbedeutenden Einfluss, den die Vernachlässigung der Glieder $\frac{t_1^2}{4}$ und $\frac{t_2^2}{4}$ ausübt.

Bei Trägern, deren Höhe sehr gross ist im Verhältniss zu der Gurtungshöhe t, kann man in Gleichung 35) weiterhin mit ziemlicher Annäherung $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}$ setzen und erhält dann die einfache Formel

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \mathfrak{A}\Omega_\mathfrak{a}\, \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{B}\Omega_\mathfrak{b}\, \mathfrak{H}_0 \quad . \; . \quad 35^a)$$

Diese Formel würde nur dann vollständig richtig sein, wenn man sich die ganze Querschnittsfläche im Druckmittelpunkt vereinigt denken könnte.

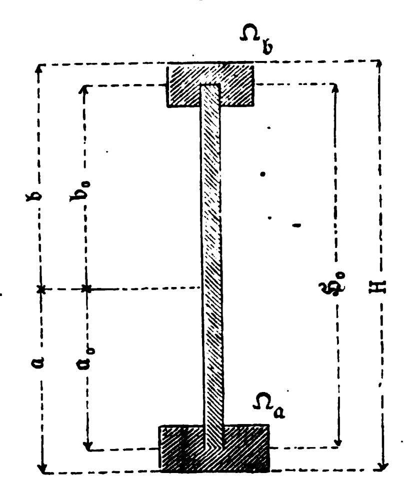
Wie man sieht, ist bei Anwendung der Näherungsformeln 33) bis 35) das Widerstandsmoment unabhängig von der Form des Gurtungs-Querschnitts, was aber nur unter der Voraussetzung annähernd richtig ist, dass die Gurtungshöhe gegenüber der ganzen Trägerhöhe hinreichend klein ist.

16. Wenn man unter sonst gleichen Voraussetzungen, wie in der vorhergehenden Nummer, einen Träger mit voller, dünner Wand betrachtet, und sich das Trägheitsmoment der beiden Gurtungen nach der Annäherungsformel Gleichung 33) gebildet denkt, so erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts dadurch, dass man zu den Trägheitsmomenten der Gurtungen die Trägheitsmomente der gedrückten und der gezogenen Mittelrippe addirt; es ist

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \Omega_a\,\mathfrak{a}_0^2 + \Omega_b\,\mathfrak{b}_0^2 + \frac{1}{3}\,\delta\,.\,\mathfrak{a}_0^3 + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0^3 \\ \Theta &= \mathfrak{a}_0^2\left(\Omega_a + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0\right) + \mathfrak{b}_0^2\left(\Omega_b + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 36)$$

Wir denken uns nämlich der Einfachheit halber die Mittelrippe gerade bis zum Gurtungsschwerpunkt reichend, was in der Praxis wenig abweicht; derjenige Theil der Mittelrippe, der über

Fig. 21.



den Gurtungsmittelpunkt etwa hinausreicht, wird, insofern er von Belang ist, zum Gurtungsquerschnitt gerechnet.

Sind die beiden Gurtungen von gleich grossem Querschnitt, so ist $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 = \frac{\mathfrak{H}_0}{2}$ und

$$\Theta = \frac{\mathfrak{H}_0^2}{2}\left(\Omega + \frac{1}{6}\,\delta\mathfrak{H}_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

Für Träger, deren Gurtungen gleichen Querschnitt haben, wird also der Einfluss der Mittelrippe auf die Tragfähigkeit da-

durch berücksichtigt, dass man jedem Gurtungsquerschnitt $1/6$ des Querschnitts der Mittelrippe hinzufügt und nunmehr das Trägheitsmoment eines offenen Balkens (ohne Mittelrippe) anschreibt. — Bei Trägern mit ungleichen Gurtungen muss auf Gleichung 36) zurückgegriffen werden; um auch letztere Gleichung in eine einfachere Form zu bringen, bemerken wir, dass nach der Definition der neutralen Faser die Relation stattfinden muss:

$$\mathfrak{a}_0 \left(\Omega_\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\,\delta\mathfrak{a}_0\right) = \mathfrak{b}_0 \left(\Omega_\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\,\delta\mathfrak{b}_0\right) \quad . \; . \; . \quad \text{I.}$$

Indem man nun links der Gleichung $\frac{1}{6}\,\delta\mathfrak{a}_0^{\,2}$, rechts $\frac{1}{6}\,\delta\mathfrak{b}_0^{\,2}$ abzieht und bedenkt, dass die Differenz dieser beiden abzuziehenden Werthe gegenüber Θ vernachlässigt werden darf, so erhält man:

$$\mathfrak{a}_0 \left(\Omega_\mathfrak{a} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0\right) = \mathfrak{b}_0 \left(\Omega_\mathfrak{b} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0\right) \quad . \; . \; . \quad \text{II.}$$

Letztere Gleichung darf man für die gewöhnlichen Fälle der Praxis in Gleichung 36) einsetzen und erhält als meist ausreichende Näherungsformel für den in Figur 21 dargestellten Querschnitt:

$$\Theta = \mathfrak{H}_0\mathfrak{a}_0 \left(\Omega_\mathfrak{a} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0\right) = \mathfrak{H}_0\mathfrak{b}_0 \left(\Omega_\mathfrak{b} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0\right) \quad . \; . \; . \; . \quad 38)$$

woraus nach Gleichung 29)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} = \Sigma Xy &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{a}_0\left(\Omega_\mathfrak{a} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0\right) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{b}_0\left(\Omega_\mathfrak{b} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0\right) \\ \mathfrak{M} = \Sigma Xy &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{b}_0\left(\Omega_\mathfrak{b} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0\right) = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{a}_0\left(\Omega_\mathfrak{a} + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0\right) \end{aligned}\right\} \quad 39)$$

Wir zeigen die Anwendung der Formel 38) und zugleich den Grad ihrer Genauigkeit an einem Zahlenbeispiel.

Für den in nachstehender Figur 22 dargestellten Querschnitt sei der Schwerpunkt der Gesammtfläche auf irgend eine Art gefunden; wir wissen aus der früheren Berechnung in **14.**, dass er $42{,}_{33}$ Cent. von der obersten Gurtungskante absteht, indem wir hier wie oben zunächst von der etwaigen Verschwächung der Querschnitte durch Nietlöcher etc. absehen. — Den Druckmittelpunkt denken wir uns mit der untern Kante des obern Gurtungsbands zusammenfallend, der Zugmittelpunkt ist im Mittelpunkt des untern Bands anzunehmen; es ist alsdann

$\mathfrak{b}_0 = 40{,}_{33}$ Centim.
$\mathfrak{a}_0 = 49{,}_{66}$ „
$\mathfrak{H}_0 = 90{,}_0$ „

ferner ist

$$\mathfrak{Q}_a + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0 = 72 + \frac{49{,}_{66}}{3} = 88{,}_{55}$$

$$\mathfrak{Q}_b + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0 = 100 + \frac{40{,}_{33}}{3} = 113{,}_{44}$$

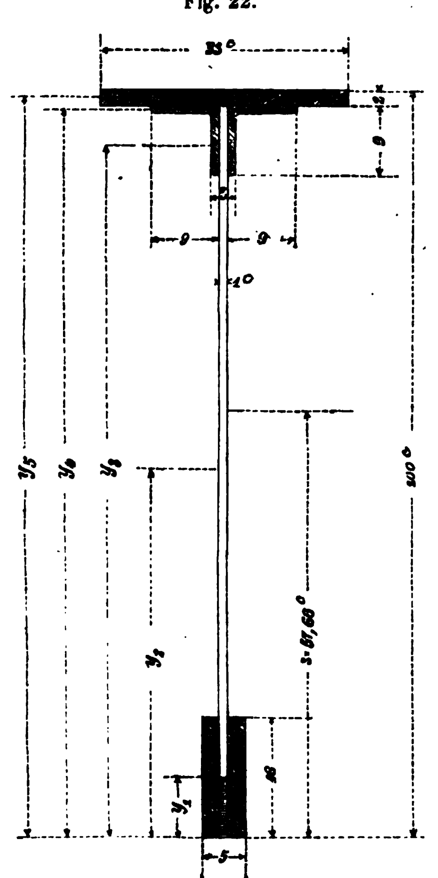
woraus sich ergibt

$$\Theta = 90 \times 88{,}_{55} \times 49{,}_{66} = 395765{,}_{370}$$

oder $\Theta = 90 \times 113{,}_{44} \times 40{,}_{33} = 411753{,}_{168}$

im Mittel $\Theta = 403759{,}_{269}$ Centim.^{4}

Fig. 22.

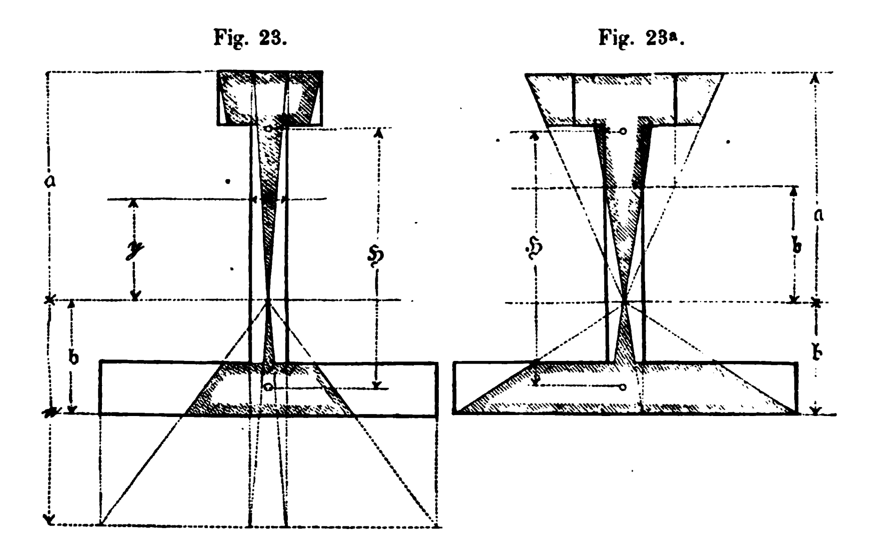


Vergleicht man dieses Resultat mit der mathematisch genauen Berechnung in **14.**, so ergibt sich eine mittlere Differenz von etwa 1 pCt., welche Annäherung für die meisten praktischen Fälle

ausreichend ist. — Wir haben aber absichtlich ein Beispiel eines sehr unsymmetrischen Querschnitts gewählt, bei dem zudem die eine Gurtung verhältnissmässig ziemlich hoch ist; es lässt sich hieraus der Schluss ziehen, wie verschwindend die Ungenauigkeit wird, wenn beide Gurtungen ziemlich gleich gross und insbesondere beide gegenüber dem ganzen Träger verhältnissmässig niedrig sind.

17. Wie der Abstand $\mathfrak{H}$ der Mittelpunkte von Druck und Zug in Gleichung 32) aus dem Trägheitsmoment bestimmt worden ist, so kann man umgekehrt bei complicirteren Querschnitten die Grösse $\mathfrak{H}$ graphisch bestimmen und hieraus das Trägheitsmoment Θ, beziehungsweise das Widerstandsmoment ΣXy ableiten.

Fig. 23. Fig. 23a.



Um $\mathfrak{H}$ graphisch darzustellen, bestimmt man, wie in Fig. 23 geschehen, für jeden Höhenabstand y den Werth $\frac{zy}{a}$, welcher nach Gleichung 25) der in den Elementen von der Breite z, im Abstande y von der neutralen Faser wirkenden Kraft A_y, beziehungsweise B_y, proportional ist, und trägt die so gefundene Grösse als Ordinate parallel der Axe der z auf; indem man ferner die Endpunkte der Ordinaten durch eine gerade oder gekrümmte Linie verbindet, und die zwischenliegende Fläche durch Schraffirung bezeichnet, so stellt jede der beiden schraffirten Figuren eine Fläche dar, welche mit der Spannung beziehungsweise Pressung im obern Band gleichförmig in Anspruch genommen der Kraft R, d. h. der Summe sämmtlicher Spannungen, beziehungsweise Pressungen gleich ist; dass beiderlei schraffirte Flächen

gleichen Querschnitt haben müssen, folgt aus Nr. **7**. — Indem man endlich die Schwerpunkte der schraffirten Flächen bestimmt, so erhält man in deren Abstand $\mathfrak{H}$ den gesuchten Abstand der Mittelpunkte von Druck und Zug und erhält endlich nach Gleichung 19)

$$\Sigma Xy = \mathfrak{H}R$$

wobei $\mathfrak{H}$ und R nach Obigem graphisch bestimmt worden sind.

In gleicher Weise kann ΣXy aus Figur 23[a]) berechnet werden, wenn die im untern Band herrschende Pressung oder Spannung als Einheit angenommen wird.

Das Trägheitsmoment Θ bestimmt sich, indem man ΣXy mit der Grösse $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$ oder $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$ dividirt; die Grösse $\frac{\Theta}{\mathfrak{a}}$ einfach durch Multiplication einer der schraffirten Flächen mit $\mathfrak{H}$.

In der graphischen Darstellung, Tafel VIII., sind auf diese Weise für das Schienenprofil der Metropolitan Railway in London die Widerstandsmomente berechnet worden und zwar für die beiden Fälle, dass der Kopf der Schiene einmal auf Zug, das anderemal auf Druck in Anspruch genommen ist.

18. Dieselbe Betrachtung, mittelst welcher man die Widerstandsvermögen berechnet, lehrt auch für jede Belastung die Gestalt der neutralen Faser, die sogenannte elastische Linie, aufzufinden. Bezeichnen wir nämlich in der schon oben erklärten Figur 5 mit OM $= \varrho$ den Krümmungshalbmesser der neutralen Faser am fraglichen Balkenelement, nennen wir dl die Länge des Elements, $d\lambda$ die Verlängerung der am meisten gezogenen äusseren Faser, so ist, wie aus der Figur 5 zu ersehen:

$$\varrho : \mathfrak{a} = dl : d\lambda$$

es ist aber nach Gleichung 22)

$$\mathfrak{A} = \frac{d\lambda}{dl} E$$

und nach Gleichung 31)

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{M}}{\Theta}$$

somit ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{\Theta E}{\varrho} \quad \ldots \ldots \quad 40)$$

drücken wir nun den Krümmungshalbmesser ϱ nach Anleitung der analytischen Geometrie durch die Coordinaten der Kurve selbst aus, indem wir diese auf dasselbe Coordinatensystem beziehen, wie die Curven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$. Analog der Annahme der Nr. **5** bezüglich des Vorzeichens der Kräfte nehmen wir abwärts gerichtete Ordinaten als positiv an, alsdann ist:

$$\varrho = -\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Das Vorzeichen von ϱ ist nur abhängig von dem Vorzeichen des Nenners: Ist die Curve der elastischen Linie concav zur Abscissenachse, so ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, somit ϱ positiv, umgekehrt lässt sich aus dem negativen Vorzeichen des Krümmungsradius auf eine convexe Gestalt der Biegungscurve in Beziehung auf die Abscissenachse schliessen.

Wir bemerken, dass für die kleinen Biegungen, die wir voraussetzen $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$ stets sehr klein gegenüber der Einheit ist, und folgt aus der Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

und endlich nach Gleichung 40):

$$\frac{d^2y}{dx^2} E\Theta = -\mathfrak{M} \quad . \quad . \quad 41)$$

dieses ist die Fundamentalgleichung der elastischen Linie. So oft es möglich ist, den Ausdruck $\frac{\mathfrak{M}}{E\Theta}$ zweimal zu integriren, so oft ist die Gestalt der neutralen Faser gefunden. Die Rechnung wird ziemlich einfach, wenn das Trägheitsmoment Θ auf die ganze Länge des Stabes constant ist.

Anmerkung. Die Gleichung 41) zeigt zugleich, dass für positives $\mathfrak{M}$ die Curve der elastischen Linie concav zur Abscissenachse liegt.

19. Wir wollen die Anwendung der Gleichung an einigen einfachen Beispielen zeigen. Als ersten Fall wählen wir einen an beiden Enden frei aufliegenden Balken, derselbe sei auf die ganze Länge gleichmässig mit q belastet, sein Querschnitt sei durchaus derselbe.

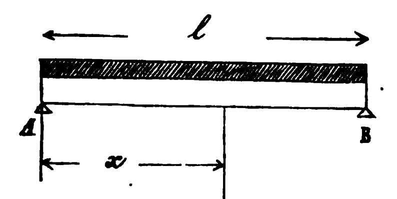
Wir erhalten dann nach Anleitung der Nr. **6**, indem wir den Coordinatenursprung in den Punkt A verlegen:

$$A = B = \frac{ql}{2}$$

ferner nach Gleichung 14ᵃ):

$$\mathfrak{V} = qx - A = q\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

Fig. 24.



und nach Gleichung 15ª):

$$\mathfrak{M} = \frac{qx^2}{2} - x\mathfrak{B} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

und somit nach Gleichung 41):

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

und durch Integriren:

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{q}{2}\left(-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + \text{Const.}$$

Die Constante bestimmt sich dadurch, dass für $x = \frac{l}{2}$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = o$ ist, woraus folgt

$$\text{Const.} = \frac{q}{2}\,\frac{l^3}{12}$$

Diess substituirt, gibt durch wiederholtes Integriren:

$$E\Theta \,.\, y = \frac{q}{24}\left(-2lx^3 + x^4 + l^3x\right)$$

wobei die Constante $= o$ ist, da für $x = o$ auch $y = o$ sein muss. Diess ist für den vorliegenden Fall die Gleichung der elastischen Linie und wir finden die grösste Einsenkung in der Mitte:

$$f = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{E\Theta} \quad . \; . \; . \quad 42)$$

Hätte man Θ proportional $\mathfrak{M}$ wachsen lassen, so wäre ein constanter Halbmesser ϱ entstanden und zwar

$$\varrho = \frac{\Theta E}{\mathfrak{M}};$$

wenn man daher dem Balken in der Mitte denselben Querschnitt gegeben hätte, wie oben, dagegen denselben nach den Enden hin hätte abnehmen lassen, so wäre

$$\varrho = \frac{\Theta E \,.\, 8}{ql^2}$$

geworden und es wäre somit die Senkung gemäss den Eigenschaften des Kreises gewesen:

$$f_1 = \frac{1}{64} \frac{ql^4}{E\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42^a)$$

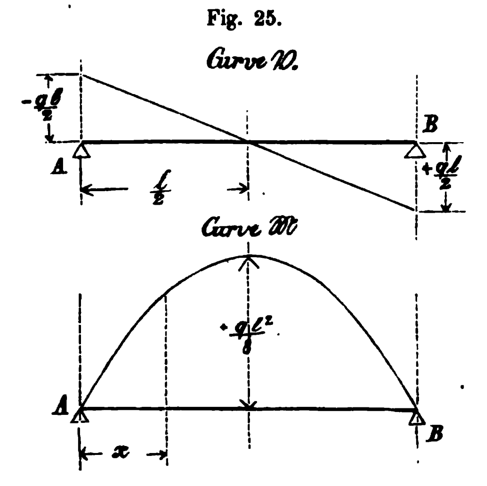
Diese Gleichung 42ᵃ) gibt eine Senkung f_1, welche $^6/_5$ derjenigen Senkung f beträgt, welche durch Gleichung 42) für einen Balken von gleichförmiger Stärke erhalten wird.

Die behufs Bestimmung der Gleichung der Biegungscurve berechneten Werthe der Verticalkraft und des Angriffsmoments geben zugleich Gelegenheit, die Curven 𝔙 und 𝔐 für diesen Fall zur Anschauung zu bringen:

Es ist nämlich (wie wir schon in Nr. 6 angedeutet) die Curve 𝔙 eine Gerade, die Curve 𝔐 eine Parabel vom Parameter $\frac{q}{4}$ (wenn die Gleichung der Parabel die Form hat $y = 2\,px^2$).

Diese beiden Curven sind in Fig. 25 dargestellt, wobei positive 𝔙 nach unten, positive 𝔐 nach oben eingetragen sind.

Fig. 25.



Als zweites Beispiel betrachten wir den Fall, dass der auf den Stützen A und B frei aufliegende Träger des vorherigen Beispiels im Abstand λ von A mit einem isolirten Gewichte P belastet sei (Fig. 26).

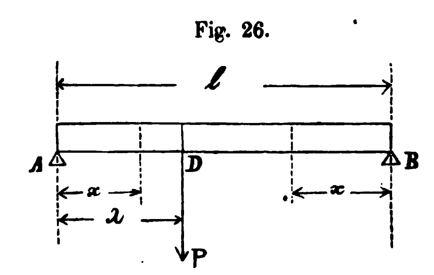
Wir erhalten zunächst für die Auflagerdrücke in A und B (nach Gleichung 2 und 4)

$$A = P \frac{l - \lambda}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

$$B = P \frac{\lambda}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad II.$$

Nunmehr können wir die Gleichung 41) für jedes der Trägerstücke AD und DB anschreiben, und indem wir für das Stück AD den Coordinatenursprung in A, für DB in B annehmen, und

Fig. 26.



nach Analogie des vorhergehenden Beispiels zweimal integriren, erhalten wir, da $\mathfrak{M}_x = A \cdot x$

1) für das Stück AD (abwärts gerichtete y positiv):

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = - Ax$$

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = - \frac{Ax^2}{2} + K_1 \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

$$E\Theta y = - \frac{Ax^3}{6} + K_1 x + K_2 \quad . \quad \text{IV.}$$

2) für das Stück BD:

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = - Bx$$

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = - \frac{Bx^2}{2} + K_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

$$E\Theta y = - \frac{Bx^3}{6} + K_3 x + K_4 \quad . \quad \text{VI.}$$

Es erübrigt noch, die von der Integration herrührenden Constanten K zu bestimmen:

Zunächst sind K_2 und $K_4 = 0$, weil die Punkte A und B gleich hoch liegen, somit in den Gleichungen IV. und VI. je für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Um K_1 und K_3 zu erhalten, nennen wir φ den Winkel der elastischen Linie im Punkte D mit dem Horizont, und f den Biegungspfeil daselbst, dann erhält man aus Gleichung III. und V.

Für $x = \lambda$ in III.:

$$E\Theta \operatorname{tg} \varphi = - \frac{A\lambda^2}{2} + K_1$$

Für $x = l - \lambda$ in V.:

$$E\Theta \operatorname{tg} \varphi = - \frac{B (l-\lambda)^2}{2} + K_3$$

und aus den Gleichungen IV. und VI.:

Für $x = \lambda$ in IV.:

$$E\Theta f = - \frac{A\lambda^3}{6} + K_1 \lambda$$

Für $x = l - \lambda$ in VI.:

$$E\Theta f = - \frac{B (l-\lambda)^3}{6} + K_3 (l - \lambda)$$

Durch Elimination von φ und f erhält man sodann: unter Berücksichtigung von I. und II.:

$$K_1 = \frac{P (l-\lambda) \lambda}{6l} (2l - \lambda)$$

$$K_3 = P \lambda \frac{(l-\lambda)(l+\lambda)}{6l}$$

und durch Einsetzung in Gleichung IV. und VI. die Gleichungen der Biegungscurven:

Für AD, Ursprung in A

$$E\Theta \,.\, y = - \frac{P (l-\lambda)}{6l} x^3 + P (l - \lambda) \frac{\lambda}{l} (2l - \lambda) x \quad . \quad . \quad \text{VII.}$$

Für DB, Ursprung in B

$$E\Theta y = - \frac{P\lambda}{6l} x^3 + \frac{P\lambda (l-\lambda)(l+\lambda)}{6l} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VIII.}$$

Durch Einsetzung von $x = \lambda$ in VII. oder $x = (l - \lambda)$ in VIII. folgt der Biegungspfeil in D

$$f = \frac{P}{3E\Theta} \frac{(l-\lambda)^2 \lambda^2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42^b)$$

welcher Werth für den speciellen Fall, dass $\lambda = \frac{l}{2}$ in folgenden übergeht:

$$f_1 = \frac{1}{48} \frac{P}{E\Theta} l^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42^c)$$

Vergleicht man dieses Resultat mit Gleichung 42), so ersieht man, dass unter der Annahme $P = ql$ der Biegungspfeil im Verhältniss 8 : 5 grösser ist.

Der durch Gleichung 42^b) gegebene Biegungspfeil ist nicht zugleich die grösste Einbiegung des Balkens AB, sondern wird diese zwischen A und D oder D und B eintreten, je nachdem λ grösser oder kleiner ist als $\frac{l}{2}$.

Ist beispielsweise $\lambda < \frac{l}{2}$, so erhalten wir die Abscisse der grössten Einbiegung, indem wir in Gleichung V. $\frac{dy}{dx} = 0$ setzen.

Diese giebt:

$$-\frac{Bx^2}{2} + K_3 = 0$$

und nach Einsetzung der Werthe von B und K_3 und Reduction:

$$x = \sqrt{\frac{(l-\lambda)(l+\lambda)}{3}} \quad \text{(Ursprung in B)}$$

und diesen Werth von x in VIII. eingesetzt, giebt den grössten Biegungspfeil:

$$f_{max} = \frac{1}{E\Theta} \frac{P\lambda(l-\lambda)(l+\lambda)}{9l} \sqrt{\frac{(l-\lambda)(l+\lambda)}{3}} \quad . \ . \ 42^d)$$

Die Gleichungen für die Curven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ schreiben sich für diesen Fall einer Einzellast folgendermassen an, wobei wir den Coordinatenursprung für beide Theile des Trägers in A annehmen:

Fig. 27.

1) für das Stück AD.

$$\mathfrak{V} = -A = -\frac{P(l-\lambda)}{l} \quad . \ . \ . \quad \text{IX.}$$

$$\mathfrak{M} = Ax = \frac{P(l-\lambda)}{l}x \quad . \ . \ . \ . \quad \text{X.}$$

2) für das Stück DB

$$\mathfrak{V} = -A + P = \frac{P\lambda}{l} \quad \ldots \ldots \quad \text{XI.}$$

$$\mathfrak{M} = Ax - P(x - \lambda)$$

$$= P\frac{\lambda}{l}(l - x) \quad \ldots \ldots \quad \text{XII.}$$

Aus Gleichung IX.—XII. ist ersichtlich, dass die Curven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ gerade Linien bilden, und zwar ist $\mathfrak{V}$ je für einen Theil des Trägers constant. $\mathfrak{M}$ erhält seinen grössten Werth $= P(l - \lambda)\frac{\lambda}{l}$ für $x = \lambda$, wie aus vorstehender Fig. 27 ersichtlich ist.

Ist der Träger AB ausser der Einzellast P noch mit q per Längeneinheit belastet, so sind die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$, wie sie aus den Gleichungen der letztbehandelten Beispiele erhalten werden, einfach zu addiren, was kaum eines Beweises bedarf.

Die Gleichungen der elastischen Linie erhält man ganz analog dem zuletzt behandelten Beispiel aus folgenden Fundamentalgleichungen:

Für AD, Ursprung in A

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -Ax + \frac{qx^2}{2}$$

Für BD, Ursprung in B

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -Bx + \frac{qx^2}{2}$$

indem man diese Gleichungen zweimal integrirt unter Einsetzung folgender Werthe von A und B

$$A = P\frac{l - \lambda}{l} + \frac{ql}{2}$$

$$B = P\frac{\lambda}{l} + \frac{ql}{2}$$

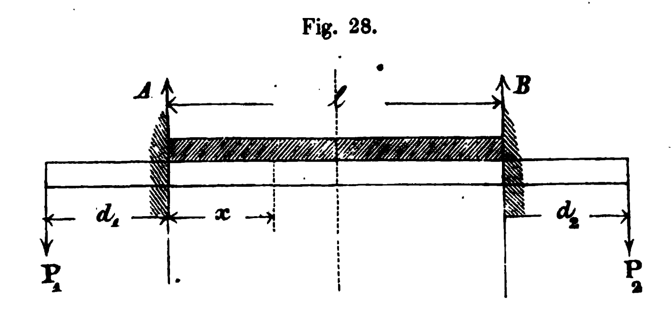
20. Bei Hochbauten kommen häufig solche Träger zur Anwendung, deren Enden unverrückbar in den Seitenmauern befestigt sind. Die Einbiegungen solcher an einem oder beiden Enden eingespannten Träger können in ganz gleicher Weise berechnet werden, und wählen wir als Beispiel einen an beiden Enden horizontal eingespannten gleichmässig mit q belasteten Balken von der freien Länge l und durchaus gleichem Querschnitt.

Für diesen Fall sind die Auflagedrücke nicht vorweg bekannt, und müssen erst mit Hülfe der elastischen Linie gefunden werden.

Die Einspannung des Balkens in A und B (Fig. 28) denken wir uns dadurch erreicht, dass der Balken je um d_1 und d_2 über

A und B hinaus verlängert ist, und an den freien Enden die Kräfte P_1 und P_2 angebracht sind, deren Grösse sich daraus bestimmt, dass in A und B die Biegungscurve eine horizontale Tangente erhält.

Fig. 28.



Wir nehmen den Coordinatenursprung in A, dann ist für einen Punkt x

$$\mathfrak{V} = P_1 - A + qx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

$$\mathfrak{M} = Ax - P_1(d_1 + x) - \frac{qx^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

somit nach Gleichung 41):

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -Ax + P_1(d_1 + x) + \frac{qx^2}{2}$$

und durch Integration:

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = -\frac{Ax^2}{2} + P_1 d_1 x + P \frac{x^2}{2} + \frac{qx^3}{6} \quad \ldots \quad \text{III.}$$

$$E\Theta y = -\frac{Ax^3}{6} + P_1 d_1 \frac{x^2}{2} + P_1 \frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} \quad . \quad \text{IV.}$$

wobei keine Constanten hereinkommen, weil für $x = 0$ $\frac{dy}{dx}$ und $y = 0$ sind.

Die Bedingung, dass die Curve der elastischen Linie durch B gehen und daselbst eine horizontale Tangente haben muss, giebt folgende Gleichungen zur Bestimmung von P und A:

für $x = l$ in II.:

$$0 = -\frac{Al^2}{2} + P_1 d_1 l + \frac{P_1 l^2}{2} + \frac{ql^3}{6}$$

für $x = l$ in III.:

$$0 = -\frac{Al^3}{6} + P_1 d_1 \frac{l^2}{2} + \frac{P_1 l^3}{6} + \frac{ql^4}{24}$$

woraus man durch Elimination und Reduction erhält:

$$P_1 \, d_1 = \frac{q l^2}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad V.$$

$$A = P_1 + \frac{q l}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad VI.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung III. ein, so erhält man als Gleichung der elastischen Linie:

$$E\Theta y = -\frac{q l \, . \, x^3}{12} + \frac{q \, . \, l^2 x^2}{24} + \frac{q x^4}{24} \quad \ldots\ldots \quad VII.$$

Die grösste Einbiegung findet in Folge der symmetrischen Belastung in der Mitte statt und wird für $x = \frac{l}{2}$

$$f_{max} = {}^1/_{384} \, \frac{q l^4}{E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

Es ist zu bemerken, dass aus Gleichung VII. auch die unbestimmte Grösse d_1 sich eliminirt hat, die Wahl von d_1 ist desshalb gleichgültig, nur muss Gleichung V. erfüllt sein. Dagegen ist nach Gleichung VI. der Werth von A und P_1 von d_1 abhängig, je kleiner d_1, desto grösser A und P_1.

Wenn desshalb die Einspannung eines Trägers durch Einmauern desselben in eine dünne Wand erreicht werden soll, so können diese Kräfte so gross werden, dass die Mauer denselben nicht zu widerstehen vermag, und ist hierauf Rücksicht zu nehmen, wenn auf vollständige Einspannung gerechnet werden will.

Nachdem A und P_1 bekannt sind, geben Gleichung I. und II. die Gleichungen für die Curven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$.

Wir erhalten durch Reduction:

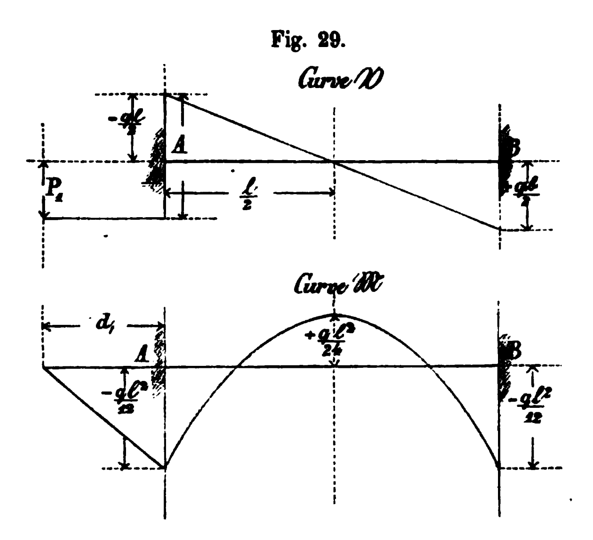
$$\mathfrak{V} = q\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad VIII.$$

$$\mathfrak{M} = \frac{q l}{2} \, . \, x - \frac{q x^2}{2} - \frac{q l^2}{12} \quad \ldots \quad IX.$$

Vergleicht man diese Werthe für $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ mit denen, welche für denselben in A und B frei aufliegenden Träger erhaltenen wurden (Figur 25.), so überzeugt man sich sofort, dass die Curve $\mathfrak{V}$ dieselbe, dass ferner die Curve $\mathfrak{M}$ durch die nämliche Parabel gebildet ist, welche jedoch um den Werth $\frac{q l^2}{12}$ nach abwärts verschoben ist. Die Fig. 29 zeigt diese Curven, und ersieht man, dass das grösste Angriffsmoment des Trägers an den Auflagern stattfindet. Dasselbe ist negativ und doppelt so gross, als das (positive) Moment in der Mitte des Trägers.

Für $\mathfrak{M} = 0$ wird nach Gleichung 40) $\varrho = \infty$, es findet somit hier ein Wendepunkt der Biegungscurve statt. Nach Fig. 29

Fig. 29.



sind 2 solche Wendepunkte vorhanden, deren Abscissen x aus Nr. II. für $\mathfrak{M} = 0$ sich ergeben:

$$x_0 = \frac{l}{2} \pm \frac{1}{6} l \sqrt{3}$$

$$= 0{,}2113\ l \text{ und } 0{,}7887\ l$$

Für die Theile des Trägers zwischen den Auflagern und den Wendepunkten liegt die Biegungscurve convex, für den mittleren Theil concav zur Abscissenachse (vergl. Nr. **18**).

21. Die Gestalt der neutralen Faser für Balken, welche continuirlich auf mehreren Stützpunkten aufliegen, bestimmt sich in ähnlicher Weise wie in Nr. **19**, indem man für jede Oeffnung die Gleichung 41) anschreibt und zweimal integrirt. Die Rückwirkungen der Stützpunkte können jedoch hier nicht unmittelbar bestimmt werden, wie bei dem auf 2 Widerlagern aufliegenden Balken, weil die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den äussern Kräften und der Rückwirkung der Auflager sich auf die Gleichungen 2) und 4) reduciren, in welchen nur zwei Grössen unbekannt sein dürfen. Die nachfolgende Betrachtung zeigt, wie diese unbekannten Auflagerdrücke sich durch die Entwicklung der Gleichung der elastischen Linie mit ergeben. Betrachtet man einen Balken mit n Oeffnungen und führt als Unbekannte ausser den Auflagerdrücken noch die Winkel der elastischen Linie auf den Stützpunkten und endlich die Constanten bei der Integration ein, so hat man Unbekannte:

Auflagerdrücke	n + 1
Tangentenwinkel	n + 1
Constante, deren je zwei für jede Oeffnung für die zweimalige Integration nothwendig werden	2 n
zusammen Unbekannte	4 n + 2

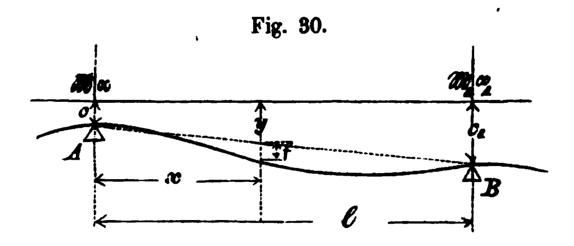
Zu Bestimmung dieser Unbekannten hat man folgende Relationen: die Biegungscurve jeder Oeffnung muss durch die beiden Auflagerpunkte gehen und muss an jedem Stützpunkt den oben eingeführten Winkel mit dem Horizont bilden. Man hat daher für jede Oeffnung 4 Gleichungen und ausserdem die beiden Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den äussern Kräften und den Auflagerreactionen, somit im Ganzen 4 n + 2 Gleichungen zu Bestimmung der vorhandenen 4 n + 2 Unbekannten.

Durch die oben angedeutete Methode ist man daher im Stande, für jede beliebige Anzahl von Oeffnungen die Gestalt der neutralen Linie sowohl, als auch die unbekannten Auflagerdrücke zu bestimmen. Wenn die Enden eines über mehrere Oeffnungen gespannten Trägers nicht frei sind, sondern unter einem bestimmten Winkel gegen den Horizont eingespannt sind, so hat man das in N°. **20** angegebene Verfahren zu benützen.

Wegen der vielen zu eliminirenden Unbekannten wird die vorstehend beschriebene Methode sehr zeitraubend und ist der folgenden Methode des Ingenieur Clapeyron, welche auf weit kürzerem Wege zum Ziele führt, der Vorzug zu geben. Zum Gebrauch für spätere Anwendung werden wir das Verfahren verallgemeinern.

Betrachten wir irgend eine der n Spannweiten eines Trägers und bezeichnen wir mit

Fig. 30.



A und B die Auflagerdrücke an den gleichnamigen Stützpunkten,

A_B die Vertikalkraft zunächst dem Auflager in der Richtung gegen B (positiv, wenn abwärts gerichtet),

l die Spannweite,

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ die Angriffsmomente der äusseren Kräfte auf den Auflagern A und B (von links nach rechts drehend positiv),

α und $\alpha_,$ die Tangenten der Winkel der neutralen Linie daselbst mit dem Horizont,

c und $c_,$ die Ordinaten der Stützpunkte, wobei **abwärts** gerichtete Ordinaten als positiv anzunehmen sind,

q die Belastung per Längeneinheit,

ferner mit

$\mathfrak{M}_x$ das Angriffsmoment in einem Punkt, dessen Abscissen und Ordinaten x und y bezeichnen, während die Axe der y durch den Auflagerpunkt A geht, positive y abwärts gerichtet sind, so ist:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} - \frac{qx^2}{2} - A_B \cdot x$$

und indem man diesen Werth von $\mathfrak{M}_x$ in Gleichung 41) einsetzt:

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = - \mathfrak{M}_x = - \mathfrak{M} + \frac{qx^2}{2} + A_B \cdot x \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Ausserdem besteht zwischen A, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_,$ folgende Relation, wenn man B als Mittelpunkt der Momente annimmt:

$$\mathfrak{M}_, = \mathfrak{M} - \frac{ql^2}{2} - A_B \cdot l$$

woraus

$$A_B = \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_,}{l} - \frac{ql}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

und durch Substitution in obige Gleichung I.:

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M}_, - \mathfrak{M}}{l}\right) x - \mathfrak{M} \quad \ldots \quad \text{III.}$$

Wird diese Gleichung integrirt und berücksichtigt, dass für $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \alpha$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{qx^3}{6E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M}_, - \mathfrak{M}}{l}\right) \frac{x^2}{2E\Theta} - \frac{\mathfrak{M}x}{E\Theta} \quad . \quad \text{IV.}$$

und für $x = l$

$$\alpha_, = \alpha - \frac{ql^3}{12E\Theta} - (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_,) \frac{l}{2E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$

Integrirt man Gleichung IV. nochmals, so wird unter Berücksichtigung, dass für $x = 0$, $y = c$

$$y = c + \alpha x + \frac{qx^4}{24E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M}_, - \mathfrak{M}}{l}\right) \frac{x^3}{6E\Theta} - \frac{\mathfrak{M}x^2}{2E\Theta} \quad \text{V}^a.$$

und da für $x = l$, $y = c_,$ sein muss,

$$c_, = c + \alpha l + \frac{ql^4}{24E\Theta} - \left(\frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M}_, - \mathfrak{M}}{l}\right) \frac{l^3}{6E\Theta} - \frac{\mathfrak{M}l^2}{2E\Theta}$$

woraus man erhält:

$$\alpha = \frac{ql^3}{24E\Theta} + \frac{l}{6E\Theta} (2\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_,) + \frac{c_, - c}{l} \quad \ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

und dieser Werth in Gleichung V. eingesetzt:

$$\alpha_, = -\frac{ql^3}{24E\Theta} - \frac{l}{6E\Theta}(\mathfrak{M} + 2\mathfrak{M}_,) + \frac{c_, - c}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VII.}$$

Letztere beiden Gleichungen enthalten die 4 Unbekannten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_,$, α und $\alpha_,$; schreibt man ähnliche Gleichungen für jede Oeffnung des Trägers an, so erhält man 2 n Gleichungen. Andererseits beträgt die Anzahl der Unbekannten, wenn man bedenkt, dass für die Endstützen $\mathfrak{M} = 0$ ist und für die Mittelstützen α und $\mathfrak{M}$ für je zwei Oeffnungen gemeinschaftlich sind

n — 1 unbekannte Momente,
n + 1 Auflagerwinkel,
zusammen 2 n Unbekannte.

Die Elimination der Unbekannten kann sehr vereinfacht werden, wenn man Hülfsgrössen in die Gleichungen VI. und VII. einführt.

Setzt man nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \frac{l^3}{24E\Theta}\chi & \alpha_, = \frac{l^3}{24E\Theta}\psi \\ \mathfrak{M} = {}^2/_8\,\mu l^2 & \mathfrak{M}_, = {}^2/_8\,\nu l^2 \\ c_, - c = \varkappa\,\frac{l^4}{24E\Theta} & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VIII.}$$

so schreiben sich Gleichungen VI. und VII. in folgender Form:

$$\chi = q + 2\mu + \nu + \varkappa$$
$$\psi = -q - \mu - 2\nu + \varkappa$$

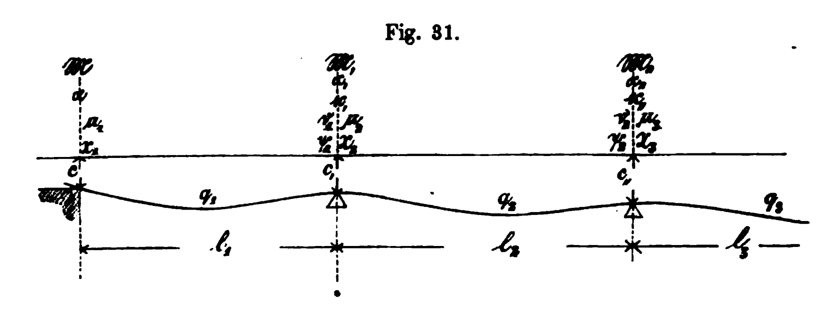
welche sich leicht in folgende abändern:

$$\left.\begin{array}{l} \nu = -q - 2\mu + \chi - \varkappa \\ \psi = q + 3\mu - 2\chi + 3\varkappa \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IX.}$$

Diese Gleichungen geben die Werthe für $\mathfrak{M}$ und α für eine Spannweite, wenn die entsprechenden Werthe der vorhergehenden bekannt sind, unmittelbar mit Hülfe der Relationen VIII.

22. Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen IX. in Nr. **21** kann man nun für einen beliebig unterstützten Träger von n Oeffnungen die Biegungscurve, die Momente auf den Stützpunkten und die Auflagerdrücke auffinden.

Fig. 31.



Es bezeichnen:

$l_1\ l_2\ l_3$ .... l_n die Grösse der Spannweiten,

$\mathfrak{M}\ \mathfrak{M}_,\ \mathfrak{M}_{,,}\ \mathfrak{M}_{,,,}$. $\mathfrak{M}_n$ die Momente auf den Stützpunkten,

$\alpha\ \alpha_,\ \alpha_{,,}\ \alpha_{,,,}$ .... α_n die Tangenten der Winkel der elastischen Linie auf den Stützpunkten mit der Horizontalen,

$q_1\ q_2\ q_3$ ...... q_n die Belastung der einzelnen Spannweiten pro Längeneinheit,

$c\ c_,\ c_{,,}\ c_{,,,}$ .... c_n die Ordinaten der Stützpunkte.

Führen wir analog Gleichung VIII. die folgenden Hülfsgrössen ein, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_, &= \frac{l_1^3}{24E\Theta}\,\psi_1 = \frac{l_2^3}{24E\Theta}\,\chi_2 \\
\alpha_{,,} &= \frac{l_2^3}{24E\Theta}\,\psi_2 = \frac{l_3^3}{24E\Theta}\,\chi_3 \\
\mathfrak{M}_, &= {}^2/_8\, l_1^{\,2}\nu_1 \quad = {}^2/_8\, l_2^{\,2}\mu_2 \\
\mathfrak{M}_{,,} &= {}^2/_8\, l_2^{\,2}\nu_2 \quad = {}^2/_8\, l_3^{\,2}\mu_3 \\
c_, - c &= \varkappa_1\,\frac{l_1^4}{24E\Theta} \\
c_{,,} - c_, &= \varkappa_2\,\frac{l_2^4}{24E\Theta}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad X.$$

so schreiben sich die Gleichungen für die verschiedenen Spannweiten folgendermassen:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für die erste Spannweite} \\
&\nu_1 = -q_1 - 2\mu_1 + \chi_1 - \varkappa_1 \\
&\psi_1 = q_1 + 3\mu_1 - 2\chi_1 + 3\varkappa_1 \\
&\text{für die zweite Spannweite} \\
&\nu_2 = -q_2 - 2\mu_2 + \chi_2 - \varkappa_2 \\
&\psi_2 = q_2 + 3\mu_2 - 2\chi_2 + 3\varkappa_2 \\
&\text{für die n}^{\text{te}}\text{ Spannweite} \\
&\nu_n = -q_n - 2\mu_n + \chi_n - \varkappa_n \\
&\psi_n = q_n + 3\mu_n - 2\chi_n + 3\varkappa_n
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 44)$$

Auf dem ersten und letzten Stützpunkt ist das Moment der äusseren Kräfte 0, somit noch zu setzen:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n = 0$$

woraus

$$\mu_1 = \nu_n = 0$$

Die Elimination der Hülfsgrössen hat bei der einfachen Form der Gleichungen keine Schwierigkeit. Eliminirt man nämlich mit Hülfe der Relationen X. das System von Unbekannten $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ ..... $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3$ ....., so enthalten die Gleichungen 44) nur noch die Unbekannten $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3$ ..... $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3$ ....., woraus der Reihe nach

die Grössen $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3 \ldots\ldots$ und mit Hülfe der Relationen X. die gesuchten Momente auf den Stützpunkten $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{M}_2\ \mathfrak{M}_3$ etc. gefunden werden können.

Ist $\mathfrak{M}$ gefunden, so erhält man die Vertikalkräfte zunächst den Stützpunkten aus Gleichung II. und die Gestalt der neutralen Linie aus Gleichung V^a. Die Auflagerdrücke selbst ergeben sich als Summe der zunächst den Pfeilern rechts und links derselben wirkenden Vertikalkräfte, womit Alles bekannt ist.

Handelt es sich um die Bestimmung der grössten Einsenkung, so darf hier nicht das Maximum oder Minimum von y aus Gleichung V, gesucht werden, weil die tiefste Stelle der Biegungscurve dann meist mit einem Auflagepunkt zusammenfällt, wenn $c_,$ erheblich von c abweicht.

Denkt man sich die gerade Verbindungslinie zwischen den Stützpunkten A und B gezogen, so ist die Einbiegung dargestellt durch den Abstand der Curve von dieser schrägen Geraden und somit die Einsenkung

$$f_x = y - c - \frac{(c_, - c)}{l}\, x \quad \text{(vergl. Fig. 30)}$$

Von diesem Werthe ist sodann das Maximum zu suchen, um die grösste Einsenkung zu erhalten.

Die in einem spätern Abschnitt folgenden Beispiele werden darthun, dass die obigen scheinbar complicirten Formeln eine einfache Anwendung gestatten.

Selbstverständlich behalten die Formeln auch ihren Werth für eine einzige Oeffnung: die in Nr. **20** behandelte Aufgabe eines an beiden Enden eingespannten, gleichförmig mit q belasteten Balkens (vergl. Fig. 28 und 29) löst sich unmittelbar mit Hülfe der Formeln V.—VII. der N°. **21**, indem wir in denselben setzen:

$$\alpha = \alpha_, = 0$$
$$c = c_, = 0$$

Wir erhalten durch Elimination aus VI. und VII.:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_, = -\frac{ql^2}{12}$$

und dieses in V. eingesetzt giebt die Gleichung der elastischen Linie

$$E\Theta y = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qx^2l^2}{24}$$

wie dort gefunden wurde (vergl. Gleichung VII. der N°. **20**).

23. Die in Nr. **19—22** enthaltenen Betrachtungen sind unter der Voraussetzung durchgeführt, dass der betrachtete Balken überall denselben Querschnitt habe, was in der Ausführung selten zutreffen wird. — Für den Fall, der in der Praxis wenigstens annähernd vorkommt, dass die Querschnitte auf die Länge einer Spannweite constant, für die auf einander folgenden Spannweiten jedoch verschieden sind, sind die Formeln 44)

anwendbar, nur ist in den Relationen X. statt des constanten Θ für jede Spannweite ein besonderes Θ_1 Θ_2 Θ_3 . . . . . einzuführen.

Wechselt Θ innerhalb der Spannweite, so sind unsere Formeln nicht mehr genau; man wird indess in den meisten Fällen ganz brauchbare Resultate erhalten, wenn man für Θ einen mittleren Werth in die Rechnung einführt.

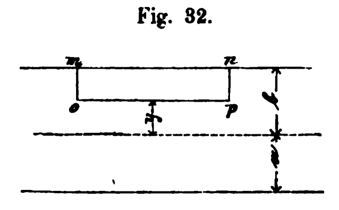
24. Die in den vorstehenden Nummern **13—23** entwickelte Berechnung des Widerstandsmoments und der Biegung stabförmiger Körper ist durch die Erscheinungen der Praxis hinreichend bestätigt. — Behufs weiterer Entwicklung muss jedoch diese seit Navier allgemein anerkannte Theorie ausgedehnt und theilweise modificirt werden.

Es ist nämlich ein durch Biegung relativ in Anspruch genommener Stab nicht allein in seiner Längenrichtung gepresst und gezogen, sondern es wirken auch nach allen Richtungen abscheerende Kräfte, von denen wir zunächst nur diejenigen zu betrachten haben, welche parallel der Ebene XY wirken.

Der Verticalwiderstand ΣY, welcher durch Gleichung 14) für jeden Querschnitt eines Balkens bestimmt wird, ist beim homogenen Träger nichts Anderes als die Summe der verticalen Composanten sämmtlicher im fraglichen Querschnitt thätigen Schubkräfte.

Betrachten wir ein Stück mnop eines beliebigen Balkens, so sind wir mittelst der vorangegangenen Theorie der relativen Festigkeit im Stande, die in (mo) und (np) thätigen horizontalen Composanten der innern Pressungen oder Spannungen zu finden. Bezeichnen wir mit mo und np die Summe fraglicher Kräfte, so muss, damit Gleichgewicht bestehe, längs op eine Kraft thätig sein:

Fig. 32.



$$s = (np) - (mo) .$$

es ist diess die im fraglichen Horizontalschnitt thätige Schubkraft (s. Nr. **12**). Von der Existenz dieser Kraft überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, dass bei einem verzahnten Balken die Zähne eben diese Schubkraft aufnehmen müssen. — In Folge dieser auf Abscheeren wirkenden Kraft tritt eine Verschiebung der Atome im Balken ein und die vor der Biegung normalen Querschnitte sind nach der Biegung schief zur neutralen Faser gerichtet, die einzelnen Schichten sind nicht, wie wir vorausgesetzt, concentrisch. — Diese Abweichung ist so äusserst gering, dass die Spannungen und Pressungen in den Längenfasern keine Aenderung erleiden, — wohl aber fragt es sich, in welcher Weise das Material

ausserdem durch besagte Schubkräfte in Anspruch genommen ist.

Behalten wir ganz dieselben Bezeichnungen bei, wie bei Entwicklung der relativen Festigkeit, so erhalten wir als Resultante aller in np thätigen horizontalen Kräfte:

$$(\Sigma X) = \int_y^b \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \, zydy$$

und da nach Gleichung 31)

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} = \frac{\Sigma Xy}{\Theta}$$

so ist

$$(\Sigma X) = \frac{\Sigma Xy}{\Theta} \int_y^b zydy$$

Die auf die Länge dx bei p wirkende Schubkraft ist daher nach der am Anfang der Nummer gegebenen Betrachtung $(\Sigma X) - (\Sigma X_{,}) = d\,(\Sigma X)$ und die in op wirkende auf die Längeneinheit bezogene Schubkraft S ist:

$$S = \frac{d\,(\Sigma X)}{dx} = \frac{d\,(\Sigma Xy)}{dx} \, \frac{1}{\Theta} \int_y^b zydy$$

woraus mit Benützung von Gleichung 17)

$$S = \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^b zy\,.\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

Man sieht leicht, dass die horizontale Schubkraft ihren grössten Werth erhält in der neutralen Faser, für welche $y = o$ ist.

Für die neutrale Faser lässt sich der Ausdruck für S zur Anschauung bringen. Bezeichnet man nämlich die Resultante aller Pressungen oder Spannungen in einem Balkenquerschnitt mit R, mit $\mathfrak{H}$ die Entfernung ihrer Angriffspunkte (s. Nr. **7**), so ist:

$$(\Sigma X) = R$$
$$\Sigma Xy = R\mathfrak{H}$$

folglich die Schubkraft in der neutralen Faser:

$$S_0 = \frac{dR}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{H}} \, \frac{d\,(\Sigma Xy)}{dx}$$

und nach Gleichung 17) unter Berücksichtigung von 11^a) und 12^a)

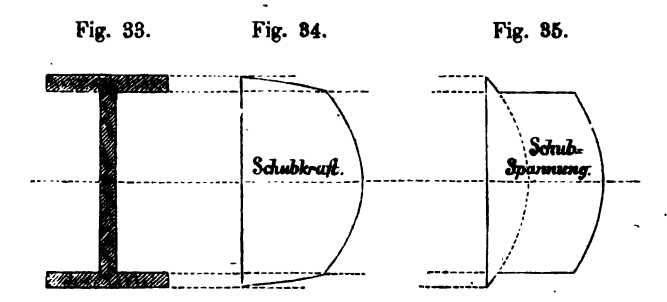
$$S_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46)$$

wo $\mathfrak{H}$ aus Gleichung 32) beziehungsweise aus Nr. **17** gefunden wird.

Es findet sich übrigens die Schubkraft S für jeden Höhenabstand auch aus Gleichung 45) ohne Schwierigkeit; für einen und denselben Querschnitt ist nämlich $\frac{\Sigma Y}{\Theta}$ constant und es be-

deutet das Integral der Gleichung 45) das Moment des zwischen den Ordinaten y und b befindlichen Querschnittfragments in Beziehung auf die neutrale Axe. — Für die in der Praxis vorkommenden Querschnittformen sind diese den verschiedenen Ordinaten y entsprechenden Momente mit Leichtigkeit anzuschreiben, und hieraus findet sich S, weil diesen Momenten direct proportional, durch eine einfache Multiplikation oder auch durch Anwendung eines Proportional-Masstabs, nachdem die Schubkraft in der neutralen Faser bestimmt ist. — Trägt man, wie in Fig. 34

Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35.



geschehen, die so gefundenen Schubkräfte für hinreichend viele y als Ordinaten auf, so erhält man eine Curve, welche die Zunahme der Schubkraft gegen die neutrale Faser anschaulich macht. — Ist der Querschnitt des Balkens ein Rechteck, so ist die Schubkraft proportional den Ordinaten einer Parabel, deren Scheitel in der neutralen Faser liegt, und deren Axe horizontal ist. — Besteht der Querschnitt aus verschiedenen Rechtecken, so setzt sich die Curve der S aus einzelnen Parabelbögen zusammen, deren Scheitel sämmtlich in der neutralen Faser liegen und deren Axen ebenfalls horizontal sind.

Durch diese Schubkraft ist das Material zunächst auf Abscheeren in Anspruch genommen; die durch die Schubkraft S hervorgerufene Schubspannung $\mathfrak{S}$ erhalten wir aus Gleichung 45) und 46) durch Division mit der Breite des Querschnitts an der betrachteten Stelle

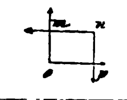
$$\mathfrak{S} = \frac{S}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

Wie oben für S angedeutet, so kann auch $\mathfrak{S}$ graphisch dargestellt werden; für einen Balken von rechteckigem Querschnitt ist die Curve der $\mathfrak{S}$ wie die der S wiederum eine Parabel und für einen aus mehreren Rechtecken zusammengesetzten Querschnitt setzt sich die Curve aus Parabeln zusammen, welche derselben Curve angehören und zwar durch staffelförmige Absätze getrennt sind, aber ihre Scheitel sämmtlich in der neutralen Faser haben (s. Fig. 35). — Die Schubspannung ist um so

grösser, je kleiner z; die hier angestellten Untersuchungen sind daher hauptsächlich von Wichtigkeit für Balken mit dünnen Mittelrippen.

25. In ähnlicher Weise, wie in horizontalen Schnitten findet nach allen Richtungen im Balken ein Bestreben der Theile, an einander vorbeizugleiten, statt. Betrachten wir zuerst die Schubkräfte in einem verticalen Querschnitt, so ist nach dem Früheren ihre Summe $= \Sigma Y$ gegeben. Wäre diese Summe gleichförmig auf den Querschnitt vertheilt, so wäre der Widerstand gegen Abscheeren gefunden. Diess ist im Allgemeinen nicht der Fall, man gelangt aber zu der Vertheilung von ΣY über den Querschnitt durch folgende einfache Betrachtung.

Fig. 36.



Es sei (Fig. 36) mnop ein unendlich kleines Stück des Balkens von den Dimensionen dx und dy. An diesem Element des Balkens wirken folgende Kräfte:

1) längs mo und np zwei verticale Schubkräfte Vdy (deren Differenz unendlich klein 2ter Ordnung, also zu vernachlässigen ist);
2) senkrecht zu mo und np die Spannungen der Fasern direkt entgegengesetzt, ihre Differenz ist unendlich klein 2ter Ordnung;
3) längs mn und op zwei horizontale Schubkräfte Sdx (deren Differenz unendlich klein 2ter Ordnung);
4) senkrecht zu mn und op vertikale, direkt entgegengesetzte Kräfte, herrührend von der Art der Vertheilung der Last, deren Differenz als unendlich klein 2ter Ordnung zu vernachlässigen ist.

Als Bedingung des Gleichgewichts erhält man daher einfach:

$$S\,dx \times dy = V dy \times dx$$
$$S = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48)$$

wo S nach Gleichung 45) und 46) gefunden wird. — Folglich ist die im verticalen Querschnitt, pro Längeneinheit, an einer bestimmten Stelle wirkende Schubkraft, gleich der an derselben Stelle wirkenden horizontalen Schubkraft, letztere gleichfalls auf die Längeneinheit bezogen.

Wir haben schon oben darauf hingewiesen, dass die Summe aller verticalen Schubkräfte $= \Sigma Y$ sein muss; dieses Resultat muss sich auch ergeben, wenn man sämmtliche nach Gleichung 45) und 48) berechnete, im Verticalschnitt statthabende Schubkräfte addirt. — Integrirt man den Ausdruck für Vdy zwischen den Grenzen y und b, so erhält man

$$\int_y^b V dy = \int_y^b \frac{\Sigma Y}{\Theta} dy \int_y^b zy dy$$
$$= \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^b dy \int_y^b zy dy$$
$$= \frac{\Sigma Y}{\Theta} \left[y \int_y^b zy dy - \int_y^b zy^2 dy \right]$$

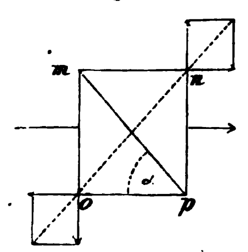
für $y = a$ wird das erste Glied o, weil die neutrale Faser durch den Schwerpunkt geht, und das zweite Glied $= \Theta$, sonach:

$$\int_a^b V dy = \Sigma Y$$

womit bewiesen.

Wir haben die Schubkräfte in verticalem und horizontalem Sinn bestimmt durch Gleichung 45) und 48), wir kennen ferner die Vertheilung der Horizontalkräfte im Verticalschnitt nach Gleichung 25); es bleibt nur noch die Bestimmung der Verticalkräfte im Horizontalschnitte; die Intensität dieser Kräfte hängt ab von der Vertheilung der Last und es sind diese Kräfte gleich Null, wenn die Last auf den Querschnitt so vertheilt ist, wie die Kraft ΣY nach dem so eben Entwickelten; diesen einfachen günstigsten Fall legen wir der folgenden Entwicklung zu Grunde.

Fig. 37.



26. Es sind nach dem Bisherigen alle am Umfange von mnop (Fig. 36) thätigen Kräfte bekannt, und man kann nunmehr für jede beliebige Richtung die innerhalb mnop wirkenden inneren Kräfte bestimmen. Wenn mp eine beliebige Fläche bezeichnet (Fig. 37), so wird im Allgemeinen die Resultante der die Fläche angreifenden Kräfte mit dieser Fläche einen endlichen Winkel bilden. Zerlegt man die Resultante parallel und normal zur Fläche, so stellt die Composante parallel zur Fläche eine Schubkraft, die normal gerichtete einen Druck oder Zug vor.

Bezeichnet

C die per Längeneinheit wirkende Schubkraft,
D den normal wirkenden Druck oder Zug per Längeneinheit,
$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die entsprechenden auf die Quadrateinheit reducirten Spannungen,
$\mathfrak{A}$ die Spannung oder Pressung in den äussersten Fasern des betrachteten Körperfragments,
y den Abstand des Körper-Elements mnop von der neutralen Faser,
a der Abstand der äussersten Faser vom Schwerpunkt des Querschnitts (vergl. Fig. 6),

$\mathfrak{A}_y$ die Längenspannung oder Längenpressung in diesem Element $= \mathfrak{A}\,\frac{y}{a}$

z die Dicke des Elements mnop nach der Axe der z,

setzt man ferner

$$mp = ds$$
$$mn = dx$$
$$np = dy$$

so finden folgende Relationen statt:

Schubkraft $\quad Cds = Vdy \sin\alpha - Sdx \cos\alpha + \mathfrak{A}_y \,.\, z \,.\, dy \,.\, \cos\alpha$

Druck od. Zug $\quad Dds = Vdy \cos\alpha + Sdx \sin\alpha + \mathfrak{A}_y \,.\, z \,.\, dy \,.\, \sin\alpha$

hiebei sind S und V durch Gleichung 45) und 48) definirt, $\mathfrak{A}$ durch Gleichung 31), da nun

$$dy = ds \sin\alpha$$
$$dx = ds \cos\alpha$$

so ist nach einigen Reduktionen und indem nach Gleichung 48) $S = V$ ist,

$$C = S \cos 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y z}{2} \sin 2\alpha \quad . \; . \; . \quad 49)$$

$$D = S \sin 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y z}{2} (1 - \cos 2\alpha) \quad . \quad 50)$$

Will man in diesen beiden Gleichungen statt der Schubkräfte die entsprechenden Schubspannungen in der äussersten Faser einführen, so ist zu setzen:

$$C = z\,\mathfrak{C}$$
$$S = z\,\mathfrak{S}$$

und man erhält:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{S} \cos 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y}{2} \sin 2\alpha \quad . \; . \; . \quad 51)$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{S} \sin 2\alpha + \frac{\mathfrak{A}_y}{2} (1 - \cos 2\alpha) \quad . \quad 52)$$

Durch die Gleichungen 49) bis 52) ist der allgemeinste Ausdruck für Schub, Druck und Zug an einer beliebigen Stelle eines homogenen Trägers gegeben, wobei die Werthe von S, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$ aus den Gleichungen 31), 45) und 47) bestimmt sind.

Um die Maximalwerthe von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, bleiben wir bei einem und demselben Balkenelement, für welches $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}_y$ constant sind; Maximum oder Minimum für $\mathfrak{C}$ findet statt für

$$\frac{d\mathfrak{C}}{d\alpha} = -2\,\mathfrak{S} \sin 2\alpha + \mathfrak{A}_y \cos 2\alpha = 0$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tang} 2\alpha = {}^1\!/_2\, \frac{\mathfrak{A}_y}{\mathfrak{S}}$$

und diesen Werth in Gleichung 51) eingeführt, ergibt sich als **Maximum für** $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T}_{max} = \sqrt{\mathfrak{S}^2 + (1/2\, \mathfrak{A}_y)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 53)$$

Aus den Gleichungen 51) und 53) ergeben sich ferner folgende Resultate. — In der äussersten Faser $y = a$ ist $\mathfrak{S} = 0$, und ist für $\alpha = 45^0$, $\mathfrak{T} = 1/2\, \mathfrak{A}$ zugleich ein Maximum, während für $\alpha = 0$ und 90^0 $\mathfrak{T} = 0$, also ein Minimum ist.

In der neutralen Faser $y = 0$ ist für

$\alpha = 90^0 \ldots \mathfrak{T} = \mathfrak{S}$ und Maximum,
$\alpha = 0^0 \ldots \mathfrak{T} = \mathfrak{S}$ und ebenfalls Maximum.

Für Fasern, welche zwischen der äussersten und der neutralen Faser liegen, kann $\mathfrak{T}$ grösser werden als $\mathfrak{A}$; es müsste jedoch in diesem Falle im fraglichen horizontalen Querschnitt $\mathfrak{S}$ wesentlich grösser als $1/2\, \mathfrak{A}_y$ und letzteres ziemlich nahe dem in der äussersten Faser herrschenden $\mathfrak{A}$ sein, was selten zusammentreffen wird.

Wir bestimmen nun ebenso das **Maximum oder Minimum** von $\mathfrak{D}$, welches stattfindet für

$$\frac{d\mathfrak{D}}{d\alpha} = 2\, \mathfrak{S} \cos 2\alpha + .\, \mathfrak{A}_y \sin 2\alpha = 0$$

woraus

$$\text{tg} 2\alpha = -\frac{2\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}_y}$$

Diesen Werth in Gleichung 52) eingesetzt, gibt für das Maximum von $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D}_{max} = \frac{\mathfrak{A}_y}{2} \pm \sqrt{\mathfrak{S}^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}_y}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55)$$

In der äussersten Faser ist $\mathfrak{S} = 0$, somit

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{A}_y}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

woraus folgt:

$\alpha = 0 \ldots \mathfrak{D} = 0$ und Minimum,
$\alpha = 90^0 \ldots \mathfrak{D} = \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}$ und Maximum.

In der neutralen Faser ist $\mathfrak{A}_y = 0$ und somit

$\alpha = 45^0 \ldots \mathfrak{D} = \mathfrak{S}$ und Maximum.

Für die **zwischenliegenden Fasern** ist, wie aus Gleichung 55) unmittelbar hervorgeht, $\mathfrak{D}_{max}$ jedenfalls grösser als $\mathfrak{A}_y$ und $\mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{S}$ auch einen noch so kleinen aber endlichen Werth hat. Wegen dieser Einwirkung, die die Schubspannung $\mathfrak{S}$ auf den Werth $\mathfrak{D}_{max}$ ausübt, soll die Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser ansehnlich kleiner gewählt werden, als die grösste

Spannung $\mathfrak{A}_0$ (Pressung $\mathfrak{B}_0$) in den äussersten Längenfasern; wir werden in der Folge meist setzen

$$\mathfrak{S}_0 \leqq 0,6\,\mathfrak{A}_0 \leqq 0,6\,\mathfrak{B}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

in welcher Gleichung die Grössen $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ durch vorstehende Erläuterung bezeichnet sind.

Bei Annahme der durch Gleichung 56) gegebenen Relation wird, wie auch die nachfolgenden Beispiele ausweisen, die in den äussersten Längenfasern herrschende Spannung oder Pressung in der Regel nicht wesentlich überschritten und zwar hauptsächlich desshalb, weil $\mathfrak{A}_y$ seinen grössten Werth in den äussersten Fasern, $\mathfrak{S}$ dagegen in der neutralen Faser erreicht; es wird jedoch bei continuirlichen Trägern, wo in der Nähe der Auflager Gurtung und Mittelwand gleichzeitig ihre grösste Anstrengung in demselben Querschnitt erleiden, an der Grenze zwischen Gurtung und Mittelwand (wo die Maximalwerthe $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{S}_0$ noch annähernd vorhanden sind) die schiefe Wandspannung die grösste Längenspannung häufig überschreiten; ebenso kann bei homogenen Trägern, welche durch concentrirte Lasten in Anspruch genommen sind, max $\mathfrak{V}$ und max $\mathfrak{M}$ in denselben Querschnitt fallen, so dass auch hier $\mathfrak{D}$ max (je nach dem Verhältnisse zwischen Gurtungsdicke und Trägerhöhe) grösser als max $\mathfrak{A}$ werden kann.

Für jedes Element setzt sich aber $\mathfrak{D}_{max}$ aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}_y$ nach Gleichung 55) zusammen und sind in nachstehender Tabelle diese Maximalwerthe von $\mathfrak{D}$ für die verschiedenen $\mathfrak{S}$ (horizontale Schubspannung) und $\mathfrak{A}_y$ (Längenspannung in dem betrachteten Körper-Element) zusammengestellt.

27. Inwieweit die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}_y$ in der Praxis einander gegenseitig beeinflussen, soll an einem einfachen Beispiele gezeigt werden. — In der graphischen Darstellung Tafel I. sind die verschiedenen Querschnitte für Brückenträger von 1,5 Meter Höhe angenommen, und zwar ist bei Querschnitt Nr. 1 ein continuirlicher Träger vorausgesetzt, wo der Schnitt unmittelbar an einem der Mittelpfeiler genommen ist. — Die Querschnitte Nr. 2 und Nr. 3 entsprechen dagegen dem frei aufliegenden Träger von 15 Meter Spannweite, der im Abschnitt über Blechwandbrücken eingehend berechnet und auf Tafel VI. dargestellt ist.

Es ist zunächst die horizontale Spannung in den äussersten Fasern, welche von da stetig zur neutralen Faser abnimmt, nach Gleichung 31), sodann die horizontale Schubspannung nach Gleichung 45) und 47) berechnet worden; endlich sind die in schiefer Richtung wirkenden grössten Spannungen (oder Pressungen) nach Gleichung 55) bestimmt und alle diese Grössen in der graphischen Darstellung der Tafel I. nach je demselben Masstabe aufgetragen, so dass man mit einem Blick die im fraglichen Träger an den

Tabelle VI.

$\mathfrak{A}_y$ =	100	200	300	400	500	600	700	800
$\mathfrak{S}$ = 100	161,8	241,4	330,2	423,6	519,2	616,2	714,0	812,3
200	256,1	323,6	400,0	482,8	570,1	660,4	758,1	847,2
300	354,1	416,2	485,4	560,6	640,5	724,2	811,0	900,0
400	453,1	512,2	576,9	647,2	721,7	800,0	881,5	965,6
500	552,4	609,9	672,0	738,5	809,0	883,1	960,3	1040,3
600	652,1	708,3	768,3	832,5	900,0	970,8	1044,6	1121,2
700	751,8	807,1	865,9	928,0	993,3	1061,6	1132,6	1206,2
800	851,6	906,2	963,9	1024,4	1088,2	1154,4	1223,2	1294,4

verschiedenen Punkten wirkenden Kräfte je nach ihren numerischen Werthen geordnet überschauen kann. Man ersieht hieraus, dass bei der vorliegenden Querschnittform $\mathfrak{D}_{max}$ nur beim continuirlichen Träger, Querschnitt Nr. 1, die grösste Längenspannung $\mathfrak{A}$ überschreitet, im Allgemeinen aber immer grösser ist, als die Längenspannung im betreffenden Horizontalschnitt, mit welcher sie in der äussersten Faser identisch wird.

28. In Tafel VII. ist für den Querschnitt der Eisenbahnbrücke von Langon eine graphische Darstellung der horizontalen Schubspannungen und der grössten in schiefer Richtung wirkenden Spannungen (Pressungen) gegeben, es ist vorausgesetzt, dass die grösste Längenspannung in den äussersten Fasern 600 Kil. pro Quadratcent. und die Schubspannung in der neutralen Axe 350 Kil. pro Quadratcent. betrage, und ist die numerische Berechnung der einzelnen Curvenpunkte aus den beiden folgenden Tabellen VII. und VIII. ersichtlich; es sind in diesen Tabellen $\mathfrak{A}$ nach Gleichung 31), $\mathfrak{S}$ nach Gleichung 45) und 47) und $\mathfrak{D}_{max}$ nach Gleichung 55) berechnet.

Tabelle VII.

Eisenbahnbrücke von Langon.

Berechnung der horizontalen Schubspannung.

Horizontalschnitt.	Querschnittflächen.	Ordinaten der Schwerpunkte.	Momente der Querschnittflächen.	Momentensumme: $\int_y^b zydy$	Breite des Horizontalschnitts z.	$\left(\frac{\int_y^b zydy}{z}\right)$	Bemerkungen.
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
VII.				0	90	0	Die äussern Winkel und Vertikalplatten müssen zum Querschnitte des Hauptbandes gerechnet werden.
	90 × 4,8 + 61,4 × 1,2 + 90 × 8,2 + 12 × 3,4	272,6 269,6 264,5 254,6	167515				
VI.				167515	90 / 21,2	1861,3 / 7901	
	21,2 × 1,2	269,6	6858				
V.				174373	21,2 / 8,6	8225 / 38487	Colonne (4) ist proportional der horizontalen Schubkraft S, Colonne (6) proportional der horizontalen Schubspannung 𝔖.
	9 × 3,6	264,5	8570				
IV.				182948	3,6 / 1,2	50817 / 152452	
	100 × 1,2	210	25200				
III.				208148	1,2	173452	
	80 × 1,2	120	11520				
II.				219668	1,2	183052	
	80 × 1,2	40	3840				
I.				223508	1,2	186252	

Zunächst der Gurtung ist die grösste schiefe Pressung in der Wand 687 Kilogr. per Quadratcent., somit ansehnlich grösser als die Längenspannung in den äussersten Fasern; wenn man also bei grossen Blechwandbrücken die Mittelrippen (Blechwand) nicht übermässig stark machen will (was sich durch den Kostenaufwand verbietet), so ist da, wo Gurtung und Mittelrippe gleichzeitig die grösste zulässige Anstrengung erhalten, die Längenspannung der Gurtung entsprechend unter der für das Material zulässigen grössten Spannung zu halten, welch letztere in der Wandung zunächst der Gurtung eintreten muss; sie ist im vorliegenden Falle mit 687 Kilogr. pro Quadratcent. nicht zu gross, hätte man sich aber die Aufgabe gestellt, dass dieselbe nicht über 600 Kilogr. betragen dürfe, so hätte man für die

Tabelle VIII.

Eisenbahnbrücke von Langon.

Berechnung des Maximums der Spannung (Pressung) im schrägen Schnitt $\mathfrak{D}_{max}$.

Horizontal-schnitt.	$\mathfrak{A}_y$	$\mathfrak{S}$		$\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{A}_y}{2}\right)^2 + \mathfrak{S}^2}$		Grösste Spannung oder Pressung $\mathfrak{D}_{max}$.		Bemerkungen.
	(1)	(2)		(3)		(4)		
VII.	600	0		300		600		
VI.	590	15	0	295,5	295	590,5	590	Man erhält $\mathfrak{D}_{max}$, wenn man die Werthe $\mathfrak{A}$ der Colonne (1) halbirt und zu den Werthen der Colonne (3) addirt; vergleiche Gleichung 55).
V.	586	90	16	306,5	293,5	600	586,5	
IV.	567	286	96	403	299,6	687	583,6	
III.	350	325		369		544		
II.	175	345		356		444		
I.	0	350		350		350		

Längenspannung in der äussersten Faser nur etwa 525 Kilogr. pro Quadratcent. nehmen dürfen.

29. Wenn ein prismatischer Stab, dessen Länge im Verhältniss zu seinen Querschnittdimensionen gross ist, einen Druck P parallel seiner Längenrichtung erleidet, so beobachtet man eine Ausbiegung des Stabes; in Folge dieser Ausbiegung tritt der Bruch frühzeitiger ein, die Bruchbelastung ist eine geringere, als wie sie in Gleichung 21) für absolut rückwirkende Festigkeit berechnet ist; der längere Stab wird durch die Kraft P in Bezug auf seine relativ rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen.

Wenn die Gestalt der gebogenen Längenaxe und ebenso der Abstand der Kraft P von dieser Axe bekannt sind, so kann Pressung und Spannung an jedem Punkte des Stabes in gleicher Weise berechnet werden, wie wir oben bei der relativen Festigkeit gesehen.

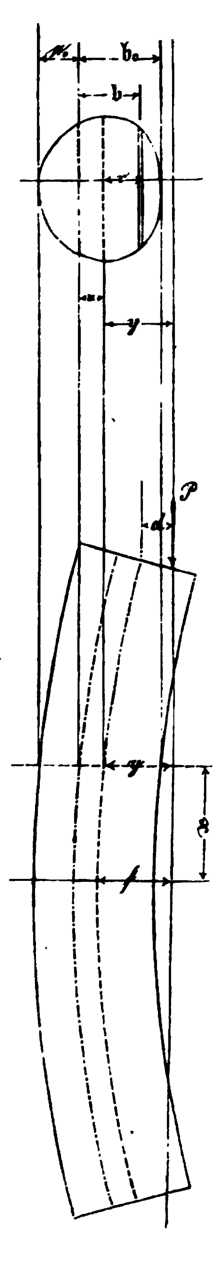


Fig. 38.

Wir nehmen die Axe der x zusammenfallend mit der Richtung der Kraft P und nehmen ferner an, dass die gebogene Axe symmetrisch zur Axe der x liege, indem wir uns zunächst den Stab an beiden Enden ganz frei denken.

Wir nennen

- d den Abstand des Schwerpunkts der beiden äussersten Querschnitte von der Axe der x,
- f den Abstand des mittelsten Querschnitts, was zugleich die grösste Abweichung der gebogenen Axe des Stabs von der Kraftrichtung bezeichnet;

ferner sei

- l die Länge des Stabes,
- ω der Querschnitt desselben,
- Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt — und zwar senkrecht zur Biegungsebene — gelegte Axe,
- u der Abstand der neutralen Faser vom Schwerpunkt jedes einzelnen Querschnitts,
- $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ die in den äussersten Fasern herrschende Spannung und Pressung, welche in den Abständen $\mathfrak{a}_0$, beziehungsweise $\mathfrak{b}_0$ vorhanden sind.

Denken wir uns nun einen beliebigen Querschnitt dieses Stabes und nennen

- x, y die Coordinaten des Schwerpunkts dieses Querschnitts;

denken wir uns ferner ein beliebiges Element z d$\mathfrak{b}$ dieses Querschnitts senkrecht zur Ebene xy (d. h. parallel der neutralen Schichte) und nennen

- $\mathfrak{b}$ den Abstand dieses Elements von der neutralen Faser,
- v den Abstand desselben Elements von dem Schwerpunkt des Querschnitts,

so erhalten wir ähnlich wie in Nr. **13** zunächst als den im Element z . d$\mathfrak{b}$ herrschenden Druck

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{b}_0}\, \mathfrak{b} \,.\, z\, d\mathfrak{b}$$

und es geben hienach die Bedingungen des Gleichgewichts für den betrachteten Querschnitt:

$$P + \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{a}_0} \int_0^{\mathfrak{a}_0} \mathfrak{a} . z \, d\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{b}_0} \int_0^{\mathfrak{b}_0} \mathfrak{b} z . d\mathfrak{b} = 0 \quad . \quad 57)$$

$$P (y + u) = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{a}_0} \int_0^{\mathfrak{a}_0} \mathfrak{a}^2 z \, d\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{b}_0} \int_0^{\mathfrak{b}_0} \mathfrak{b}^2 z . d\mathfrak{b} \quad . \quad . \quad 58)$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{a}_0} = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{b}_0}$ gesetzt werden darf und bemerkt, dass

$$\Theta_u = \int_0^{\mathfrak{a}_0} \mathfrak{a}^2 z \, d\mathfrak{a} + \int_0^{\mathfrak{b}_0} \mathfrak{b}^2 z \, d\mathfrak{b}$$

das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die neutrale Faser bezeichnet, so folgt aus Gleichung 58) zunächst

$$P (y + u) = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{b}_0} . \Theta_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58^a)$$

Bedenkt man ferner, dass zwischen dem Trägheitsmoment Θ_u und dem auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogenen Trägheitsmoment Θ nach bekannten Sätzen der Mechanik die Relation besteht

$$\Theta_u = \Theta + \omega . u^2$$

und bemerkt schliesslich, dass nach der Definition des Schwerpunkts

$$\int_0^{\mathfrak{b}_0} \mathfrak{a} . z . d\mathfrak{a} - \int_0^{\mathfrak{a}_0} \mathfrak{b} . z \, d\mathfrak{b} = \omega . u,$$

so schreiben sich die Gleichungen 57) und 58) in folgender einfacher Form an:

$$P = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{b}_0} . u . \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

$$P (y + u) = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{b}_0} (\Theta + \omega u^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

und erhält man nunmehr aus den Gleichungen 59) und 60) die Relation

$$u = \frac{\Theta}{\omega . y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61)$$

Da für $x = o$, $y = f$ wird, so folgt für den mittleren Querschnitt

$$u = \frac{\Theta}{\omega . f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61^a)$$

d. h. wenn der Abstand der Kraft P von der Schwerpunktaxe bekannt ist, so findet sich aus den bekannten Dimensionen des Stabs nach Gleichung 61), beziehungsweise 61ª) die Verrückung u der neutralen Faser.

30. Wird der aus Gleichung 61) gefundene Werth von u in Gleichung 59) eingesetzt, so folgt

$$Py = \frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{b}_0} \cdot \Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

Wenn man den Abstand der am meisten comprimirten Faser vom Schwerpunkt des Querschnitts mit v_0 bezeichnet (entsprechend der obigen Bedeutung von v), so ist

$$\mathfrak{b}_0 = u + v_0$$

und schreibt sich hienach vorstehende Gleichung 62):

$$Py = \frac{\mathfrak{P}_0}{u + v_0} \cdot \Theta \quad \ldots\ldots \quad 62^a)$$

woraus mit Benützung von Gleichung 61) folgt:

$$\mathfrak{P}_0 = Py \frac{v_0}{\Theta} + \frac{P}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

In gleicher Weise findet man für die Spannung der am meisten ausgedehnten Faser

$$\mathfrak{A}_0 = Py \cdot \frac{v_0}{\Theta} - \frac{P}{\omega} \quad \ldots\ldots \quad 63^a)$$

Für den mittleren Querschnitt ist $y = f$ zu setzen. Wird in Gleichung 63^a) $\mathfrak{A}_0$ negativ, so zeigt diess an, dass im Querschnitt nur Pressung, nirgends Spannung herrscht. Vergleicht man mit Gleichung 63) die Gleichungen 20) und 31), so erkennt man, dass die grösste Pressung $\mathfrak{P}_0$ im betrachteten Querschnitt sich zusammensetzt aus der Pressung $\frac{P}{\omega}$ in Folge des auf die Quadrateinheit reducirten Druckes P und aus derjenigen Pressung, welche durch das M o m e n t derselben am Hebelarme y gleichzeitig auf Biegung wirkenden Kraft P hervorgerufen wird, und zwar ist letztere Pressung so gross wie die grösste Pressung in einem auf relative Festigkeit in Anspruch genommenen Stab von der Länge 4y, beziehungsweise 4f, welcher Stab an beiden Enden frei aufliegt und in der Mitte mit P belastet ist.

31. Aus Gleichung 63) könnte die grösste Pressung in einem auf relativ rückwirkende Festigkeit angegriffenen Stabe sofort gefunden werden, sobald der Kraftabstand f bekannt wäre; letzterer setzt sich zusammen aus dem Biegungspfeil und aus dem Abstand d, welchen die Kraft schon vor Eintritt der Biegung hatte. — Letzterer Abstand ist aber häufig bekannt und kann dann zur Bestimmung des unbekannten Abstandes f dienen. — Zu diesem Zweck ist die B i e g u n g s - G l e i c h u n g d e r S c h w e r p u n k t a x e d e s S t a b e s zu bestimmen.

Die Betrachtung, welche uns in Nr. **18** auf die Gestalt der elastischen Linie geführt hat, muss hier modificirt werden, weil die neutrale Faser nicht mehr mit der Schwerpunktaxe des Trägers zusammenfällt, sondern in einem Abstande u von derselben sich befindet, welcher Abstand nach Gleichung 61) mit y veränderlich ist.

Bezeichnen wir mit ϱ den Krümmungshalbmesser der Schwerpunktaxe, mit dl die ursprüngliche Länge eines Elements, und mit $d\lambda$ die Verlängerung der am meisten gezogenen Faser, und behalten im Uebrigen die Bezeichnungen der Fig. 38 bei, so ist nach Fig. 5 und 38

$$\varrho + u : \mathfrak{a}_0 = dl : d\lambda$$

und da nach Gleichung 22)

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{d\lambda}{dl} E,$$

so folgt:

$$\varrho + u = E \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{A}_0}$$

Es ist nun nach Gleichung 59)

$$\frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{A}_0} = \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{B}_0} = \frac{u\omega}{P}$$

somit:

$$\varrho = u\left(\frac{E\omega}{P} - 1\right)$$

und wenn man für u seinen Werth aus Gleichung 61) einsetzt und reducirt:

$$\varrho = \frac{\Theta}{y}\left(\frac{E}{P} - \frac{1}{\omega}\right)$$

Für die kleinen Biegungen, die wir voraussetzen, ist

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

und somit die Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{\Theta\left(\frac{E}{P} - \frac{1}{\omega}\right)} \quad \ldots \quad 64)$$

Setzen wir der Einfachheit halber den Ausdruck

$$\frac{1}{\Theta\left(\frac{E}{P} = \frac{1}{\omega}\right)} = t^2,$$

so folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -t^2y \quad \ldots\ldots \quad 65)$$

Das Integral dieser Gleichung hat bekanntlich folgende allgemeine Form:

$$y = C \sin tx - C_1 \cos tx \quad . \; . \; . \; . \quad 66)$$

wo C und C_1 zwei Constante bezeichnen, die von der Wahl des Coordinatensystems und der Art der Belastung abhängig sind.

Für den vorliegenden Fall eines Stabs, dessen Enden in einer und derselben Vertikalen liegen, sonst aber frei beweglich sind (Fig. 38), gibt zunächst die Bedingung, dass y für + x und — x denselben Werth erhält C = o, somit wird die Gleichung der Schwerpunktsachse:

$$y = C_1 \cos t \,.\, x$$

da ferner für $x = \frac{l}{2}$ $y = d$ sein muss, so folgt

$$C_1 = \frac{d}{\cos \frac{1}{2} t \,.\, l}$$

und diess in obige Gleichung eingesetzt:

$$y = d \, \frac{\cos t \,.\, x}{\cos \frac{1}{2} t \,.\, l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 67)$$

Die grösste Ausbiegung in der Mitte, die wir mit f bezeichnet haben, findet sich aus Gleichung 67), indem man x = o setzt:

$$f = \frac{d}{\cos \frac{1}{2} \,.\, t l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 67^a)$$

Setzt man endlich diesen Werth von f in Gleichung 63) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{P}{\omega} + \frac{P v_0}{\Theta} \, \frac{d}{\cos \frac{1}{2} t \,.\, l} \quad . \; . \; . \quad 68)$$

ebenso aus Gleichung 63ᵃ)

$$\mathfrak{A}_0 = - \frac{P}{\omega} + \frac{P v_0}{\Theta} \, \frac{d}{\cos \frac{1}{2} t \,.\, l} \quad . \; . \quad 68^a)$$

und indem man Gleichung 68) in Beziehung auf P auflöst:

$$P = \mathfrak{B}_0 \omega \, \frac{1}{1 + \frac{v_0 \omega}{\Theta} \, \frac{d}{\cos \frac{1}{2} t \,.\, l}} \quad . \; . \quad 69)$$

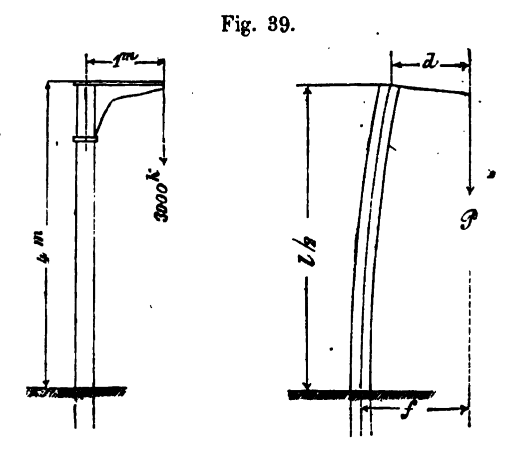
Aus Gleichung 69) kann indess P nur durch Probiren gefunden werden, weil der Ausdruck für t

$$t = \frac{1}{\sqrt{\Theta\left(\frac{E}{P} - \frac{1}{\omega}\right)}}$$

die Grösse P gleichfalls enthält.

32. Wir zeigen die Anwendung der Gleichung an einem Beispiele. — Eine gusseiserne hohle runde Säule von 4 M. Höhe sei

Fig. 39.



am untern Ende eingespannt und in einer Entfernung von 1 Meter von einer Kraft P = 3000 K. angegriffen; da diese Säule bei der Biegung am untern Ende eine vertikale Tangente beibehält, so haben wir nur die eine Hälfte des in Fig. 38 dargestellten Stabes vor uns, und ist somit die Höhe der in Fig. 39 dargestellten Säule bei Anwendung vorstehender Gleichungen 57)—69) gleich $\frac{1}{2}$ zu setzen; es ist somit, indem wir Alles in Centimetern und Kilogrammen ausdrücken:

$$l = 800 \text{ Centim.};$$

ferner sei der Säulendurchmesser D = 20 Centim., der innere Durchmesser d = 16 Centim., somit

$$v_G = \frac{D}{2} = 10 \text{ Centim.}$$

$$\omega = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 113 \;\square\text{Centim.}$$

$$\Theta = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 4637 \text{ Centim.}^4$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Theta E}{P} - \frac{\Theta}{\omega}}} = 0{,}0008478$$

und folgt somit aus Gleichung 68) unmittelbar

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{3000}{113} + \frac{3000 \,.\, 10}{4637} \,.\, \frac{100}{\cos 0{,}00085 \,.\, {}^1\!/_2 \,.\, 800}$$

$$\mathfrak{B}_0 = 26{,}5 + 686{,}05 = 712{,}55 \text{ Kilo.}$$

Um die Ausbiegung der Säule zu bestimmen, setzen wir nach Gleichung 67)

$$f = \frac{d}{\cos {}^1\!/_2\, t \,.\, l} = \frac{d}{0{,}943} = 106 \text{ Centim.}$$

woraus sich ein Biegungspfeil f—d von 6 Centimetern ergibt. — Wenn nun auch diese Ausbiegung für sich ansehnlich genug ist, so kann sie doch im vorliegenden Falle für annähernde Berechnung der grössten Pressung vernachlässigt werden; denn wenn man in Gleichung 63) anstatt $f = 106$ Centim. den zum Voraus bekannten Werth $d = 100$ Centim. gesetzt hätte, so hätte man erhalten $\mathfrak{B}_0 = 26{,}5 + 647 = 673{,}5$ Kilo anstatt dem genauern Werth von 693 K.; bei weniger starken Biegungen wird desshalb diese Annäherung ganz befriedigende Resultate geben.

33. Je grösser der Abstand d ist, d. h. je weiter entfernt die Druckrichtung von der Axe des Stabes ist, desto grösser wird die grösste Pressung bei gegebener Stablänge; anderseits wenn eine bestimmte Pressung nicht überschritten werden soll, so ist der Abstand d desto kleiner zu nehmen, je grösser die Stablänge.

Wir finden, indem wir Gleichung 68) in Beziehung auf d auflösen,

$$d = \left(\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega}\right) \frac{\Theta}{P e_0} \cos {}^1\!/_2 \,.\, t \,.\, l \quad . \quad . \quad 70)$$

Wenn wir dieselbe Säule vom äussern Durchmesser $D = 20$ Centim. und innern Durchmesser $= 16$ Centim. wiederum am untern Ende eingespannt und mit einer Last $P = 3000$ Kilo belastet denken, so ist wie oben

$$\frac{P}{\omega} = 26{,}5 \text{ Kilo per }\square\text{Centim.}$$

Soll $\mathfrak{B}_0$ nicht grösser sein als 1200 K., so wird $\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega} = 1173{,}5$; ist $\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega}$ gleich der Bruchlast $= 7200$, so ist auch d circa sechsmal grösser, während $\mathfrak{B}_0 - \frac{P}{\omega} = 7173{,}5$ Kilo. beträgt. — Für diese beiden Werthe von $\mathfrak{B}_0$ haben wir in Tabelle IX.

Tabelle IX.

d in Centimetern ausgedrückt:		Höhe der Säule $= \frac{l}{2}$ in Metern.
$\mathfrak{B}_0 = 1200$	$\mathfrak{B}_0 = 7200$	
d = 171,0 Centim.	d = 1045 Centim.	4
158,3 »	967 »	6
141,0 »	862 »	8
119,7 »	732 »	10
94,9 »	580 »	12
67,4 »	412 »	14
38,0 »	232 »	16
7,4 »	45 »	18
0,0 »	0	18,53

eine Reihe von d für verschiedene Längen berechnet, indem nach obigen Angaben in Gleichung 70) weiterhin gesetzt wurde:

$$\Theta = 4637$$
$$v_0 = 10 \text{ Centim.}$$
$$t = 0{,}00085$$

wodurch für $\mathfrak{B}_0 = 1200$ Kilo

$$d = 181{,}4 \cos 0{,}00085 \frac{l}{2}$$

und für $\mathfrak{B}_0 = 7200$ Kilo

$$d = 1108{,}8 \cos 0{,}00085 \frac{l}{2}$$ erhalten wurde.

Für $\cos 0{,}00085 \frac{l}{2} = 0$ oder $\frac{l}{2} = 18{,}53$ Meter wird $d = 0$, und zwar für jede Pressung $\mathfrak{B}_0$, während für 18 Meter die verschiedenen d noch ansehnliche Werthe zeigen; es bedeutet diess, dass eine am untern Ende eingespannte gusseiserne Säule vom betrachteten Querschnitt bei einer Länge von 18,53 Meter die Belastung von 3000 Kil. nicht mehr zu tragen im Stande ist, wenn das obere Ende sich ganz frei bewegen kann, selbst für den Fall, dass die Kraft im Schwerpunkt des obersten Querschnitts angebracht ist. — Für einen solchen Stab ist also die genannte Belastung unter allen Umständen Bruchlast. Dasselbe gilt für einen Stab von der doppelten Länge L = 37,06 Meter, wenn beide Enden in der Vertikalen festgehalten, sonst aber beweglich (nicht eingespannt) sind.

Dieses rein theoretische Resultat stimmt indess mit den Erfahrungen der Praxis nicht überein, wie wir im Folgenden sehen

werden, und wird man gut thun, in ähnlichen Fällen die Formel 70), beziehungsweise Tabelle IX. nicht bis zu den Grenzwerthen auszudehnen.

Aehnliche Betrachtungen können mittelst Gleichung 68ª) angestellt werden, wenn die grösste zulässige Spannung vorgeschrieben ist.

34. Da wir im Vorhergehenden gesehen, dass die einer bestimmten Bruchlast entsprechende Länge sich theoretisch scharf markirt, so kann man hievon ausgehen, um die Bruchlast bei gegebener Länge für den günstigsten Fall zu bestimmen, wenn $d = 0$ ist, d. h. wenn die Kraft genau in die Axe des Stabes fällt.

Wir bezeichnen im Folgenden mit L die Länge eines freien Stabes, der im Schwerpunkt des Endquerschnitts belastet ist, wobei dessen Enden in einer Vertikalen festgehalten, sonst aber frei beweglich sind, was wir uns durch Abrundung der Enden erreicht denken. Es ist für diesen Belastungsfall in den Gleichungen Nr. 32 und 33 zu setzen $d = o$ und $l = L$.

Wenn man aber in den Gleichungen 68)—70) $d = 0$ setzen will, so erhält man entweder $\mathfrak{B}_0 = \frac{P}{\omega}$, was nur für ganz kurze Stäbe richtig ist, oder es muss ausser d auch noch die Grösse $\cos t \cdot \frac{L}{2} = 0$ sein; woraus folgt

$$t \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{. . . . . 71)}$$

Diese letztere Gleichung haben wir schon in dem Beispiele der vorhergehenden Nummer erhalten und darf solche als Bedingungs-Gleichung für Auffindung der Bruchlast benutzt werden.

Setzen wir in derselben den Werth $t = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Theta E}{P} - \frac{\Theta}{\omega}}}$ ein,

so erhalten wir

$$P = E\omega \frac{1}{\frac{\omega L^2}{\pi^2 \Theta} + 1} \quad \text{. . . . . . . 72)}$$

woraus, wenn man 1 gegen $\frac{\omega L^2}{\pi^2 \Theta}$ vernachlässigt, was für längere Stäbe stets zulässig, ist:

$$P = \frac{\pi^2 \Theta E}{L^2} \quad \text{. . . . . 72ª)}$$

Letztere Gleichung hat schon Navier als Bruchbelastung für lange Stäbe aufgestellt.

Abgesehen davon, dass diese Gleichung uns keine Pressung auffinden lehrt, so hat sie insbesondere den Mangel, dass sie für kürzere Stäbe ganz unbrauchbar wird; denn P darf nie grösser werden, als die Gleichung 21) für absolut rückwirkende

Festigkeit ergibt, es ist im Gegentheil in Folge der Biegung P stets kleiner.

Aber selbst für längere Stäbe stimmt Gleichung 72) nicht mit den Erfahrungen und Versuchen überein. Wir benützen als Beispiel die Versuche, welche E. Hodgkinson mit vierkantigen schmiedeisernen Stäben von 1 Zoll englisch Seite anstellte, um sie mit den Resultaten der Gleichung 72) zu vergleichen.

Die Betrachtung der Tabelle X. zeigt, dass die Gleichung 72) nicht blos für ganz kurze, sondern auch für die längeren Stäbe unrichtige Resultate gibt, welche nur, wenn die Längen etwa 30mal grösser als der Durchmesser sind, mehr übereinstimmen. — Auffallend ist, dass die Gleichung 72) für die längeren Stäbe ungünstigere Resultate gibt, als die Versuche; diess rührt wohl daher, dass die Enden der Versuchsstäbe doch nicht so frei sich bewegen konnten, wie in der Gleichung vorausgesetzt ist, indem dieselben mit platten Endflächen versehen waren.

Tabelle X.

Länge des Stabes = L.	$\frac{L}{D}$	Bruchlast in englischen ℔	
		beobachtet.	berechnet.
10 Fuss englisch	120	4245	1280
7,5 Fuss	90	10236	2276
5 Fuss	60	18106	5121
2,5 Fuss	30	26530	20480
1,25 Fuss	15	36162	(81940)
$7\frac{1}{2}$ Zoll	7,5	50946	(327760)
$3\frac{3}{4}$ Zoll	3,75	55200	(1,487400)

Anmerkung. Die eingeklammerten Zahlen sind desshalb unbrauchbar, weil die Bruchlast nie grösser werden kann, als diejenige, welche für das vorliegende Material für kurze, absolut rückwirkend angegriffene Stäbe, erhoben worden ist.

35. Wie wir so eben gesehen haben, stimmen die mit so grosser Sorgfalt angestellten Versuche des E. Hodgkinson mit den Resultaten der Gleichung 72) nicht überein, so dass eine ganz allgemeine, rein theoretische Lösung nicht möglich erscheint.

Anderseits hat man es bei den Bauconstructionen im Allgemeinen nicht mit unverhältnissmässig langen Stäben zu thun; bei den bei Bauten üblichen Dimensionen wird vielmehr die seitliche Abweichung der Kraft inner gewisser Grenzen sich bewegen und insolange der Constructeur eine Uebereinstimmung zwischen der Richtung der Kraft und der Längenaxe des gepressten Glieds an-

strebt, wird für die Abweichung f der Kraft ein gewisses Gesetz sich geltend machen. — Wie wir aber in Nr. **30** gefunden, so lässt sich die grösste Pressung, und umgekehrt die durch eine gewisse Pressung hervorgerufene Kraft bestimmen, sobald der Abstand f für den Schwerpunkt des mittleren Querschnitts gefunden ist. — Lösen wir Gleichung 63) in Beziehung auf P auf, so erhalten wir durch Wertheinsetzung von f = max (y)

$$P = \mathfrak{B}_0 \omega \frac{1}{1 + \frac{v_0 \omega}{\Theta} f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

Die Abweichung f ist der Natur der Sache nach eine unbekannte Grösse, welche nach Beschaffenheit des Materials, nach Gestaltung der Endflächen veränderlich und insbesondere auch von der Solidität der Ausführung abhängig ist. — Letztere Punkte müssen insbesondere in Erwägung gezogen werden, wenn es sich um die Bestimmung der in der Rechnung einzuführenden freien Länge des Stabes handelt; diese Länge hängt wesentlich ab von der Art der Construction, so dass wir z. B. in Nr. **32** diese Länge gleich der doppelten Länge des betrachteten Stabes nehmen mussten.

Diess vorausgesetzt, wird f für ein und dasselbe Material mit zunehmender Länge sich sehr vergrössern, dagegen bei zunehmenden Querschnittdimensionen abnehmen; diesen Factoren trägt man dadurch Rechnung, dass

$$f = K \cdot \frac{L^2}{v_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74)$$

gesetzt wird, wo K ein durch die Erfahrung für jedes Material festzustellender Coefficient ist.

Wenn man diesen Werth von f in Gleichung 73) einsetzt, so erhält man

$$P = \mathfrak{B}_0 \omega \cdot \frac{1}{1 + K \cdot \frac{\omega}{\Theta} L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 75)$$

Diese Gleichung hat auch Aehnlichkeit mit der theoretischen Gleichung 72); denn für den Fall, dass $\frac{K \omega L^2}{\Theta}$ sehr gross gegenüber der Einheit ist und somit letztere vernachlässigt werden darf, erhalten wir aus Gleichung 75)

$$P = \frac{\mathfrak{B}_0}{K} \frac{\Theta}{L^2}$$

und nach Gleichung 72)

$$P = \pi^2 E \frac{\Theta}{L^2}$$

und liegt hierin zunächst eine weitere Rechtfertigung, dass wir in Gleichung 74) f proportional L^2 gesetzt haben.

In der Praxis ist aber (wie schon oben angedeutet) L gegenüber $\frac{\Theta}{\omega}$ nicht so gross, dass die Einheit gegenüber $\frac{K\omega L^2}{\Theta}$ vernachlässigt werden dürfte; der Bruch $\frac{1}{1+\frac{K\omega L^2}{\Theta}}$ gibt an, welcher Theil der absolut mitwirkenden Festigkeit für längere Stäbe zulässig ist; je kleiner L, desto mehr nähert sich dieser Bruch der Einheit, so dass für ganz kurze Stäbe die Gleichung 75) in Gleichung 20), beziehungsweise 21) übergeht. — Θ ist mit Rücksicht auf die Richtung zu berechnen, nach welcher das Ausbiegen voraussichtlich eintritt; diess geschieht bei einseitiger Belastung im Allgemeinen in der Richtung der Kraft, während bei einer mit der Axenrichtung zusammenfallenden Krafteinwirkung die Ausbiegung nach derjenigen Seite stattfindet, für welch Θ Minimum wird.

36. Um den Coefficienten K in Gleichung 75) für die Bruchbelastung zu bestimmen, liegen hinreichend viele Versuche mit Stäben von verschiedenen Dimensionen und Querschnittformen vor; die aus den Versuchen gefundenen Mittelwerthe sind in nachstehender Tabelle gegeben:

Tabelle XI.

Für Schmiedeisen	K = 0,0001
» Gusseisen	K = 0,0003
» Holz	K = 0,0002

Für weichen Stahl und Bessemer Metall wird man K = 0,0001 wie beim Schmiedeisen setzen dürfen, wobei eine genauere Bestimmung vorbehalten bleibt.

Es sind bei Tabelle XI. ganz freie Stäbe vorausgesetzt (vergl. Nr. **34**), wie sie bei Bauconstructionen nicht vorhanden sind. — So hat man schon bei Stäben mit abgeplatteten Enden eine wesentlich grössere Festigkeit gefunden, während in Folge der Befestigung der Stabenden mittelst Bolzen oder Nieten eine weitere Verringerung der freien Länge stattfindet, welche in der folgenden Nummer näher besprochen werden wird.

Wenn wir nun von den Bruchbelastungen auf geringere Belastungen übergehen, so hat K nicht mehr denselben Werth und dürfte es überhaupt sehr schwierig sein, für beliebige Pressungen 𝔅 die zugehörigen K zu bestimmen; die Gleichung 75) kann

daher zunächst nur zur Bestimmung der Bruchbelastung dienen, was aber für den vorliegenden Zweck durchaus hinreichend ist.

Wie wir nämlich schon in Nr. **33** gesehen, nimmt die Pressung in der Nähe des Bruches für längere Stäbe rasch zu; die sonst übliche zulässige Pressung kann bei einem Gewichte eintreten, welches von der Bruchbelastung nicht sehr verschieden ist; es ist daher gar nicht erlaubt, solche Stäbe bis zu der sonst zulässigen Pressung zu belasten.

Man wird vielmehr ein richtigeres und für alle Fälle sicheres Resultat erhalten, wenn man einen bestimmten Theil der Bruchbelastung als zulässige Belastung annimmt.

Das hiedurch bedingte Rechnungsverfahren ist nun schliesslich sehr einfach.

Man bestimmt für den betrachteten Stab die Bruchbelastung nach Gleichung 75) und Tabelle XI. und erhält sodann die zulässige Belastung sofort durch Dividiren mit dem für das fragliche Material und die beabsichtigte Solidität sonst üblichen Sicherheitscoefficienten.

Wenn man die Belastung eines längeren Stabes auf die Quadrateinheit der Querschnittfläche reducirt, so erhält man die mittlere Pressung $\mathfrak{B}_m$, und ist nach den in Nr. **36** angenommenen Bezeichnungen und entsprechend den Definitionen von Nr. **8**.

$$\mathfrak{B}_m = \frac{P}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20^a)$$

Diese Gleichung mit Gleichung 75) combinirt, gibt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad \ldots\ldots \quad 76)$$

wo der Werth $\mathfrak{B}_m$ aus obiger Gleichung 20^a) oder allgemeiner aus Gleichung 20) der Nummer **8** zu entnehmen ist, der Coefficient $\left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right)$ aber angibt, um wieviel die relativ rückwirkende Festigkeit gegen die absolut rückwirkende im vorliegenden Falle zurücktritt.

37. Wir haben bis jetzt nur den Fall eines Stabes in Betracht gezogen, dessen Enden in einer Vertikalen liegen, sonst aber frei beweglich sind. Die bei Brückenbauten vorkommenden der Länge nach gedrückten Constructionstheile sind jedoch häufig nicht nur an den Enden, sondern auch an anderen Punkten ihrer Längenachse festgehalten, ferner sind die Enden von Stäben oder von Brückentheilen häufig nicht nur festgehalten, sondern unverrücklich befestigt (eingespannt). Für diese verschiedenen Arten der Befestigung kann die Biegungskurve durch ein ähnliches Verfahren bestimmt werden wie in Nr. **31**: der Fall eines

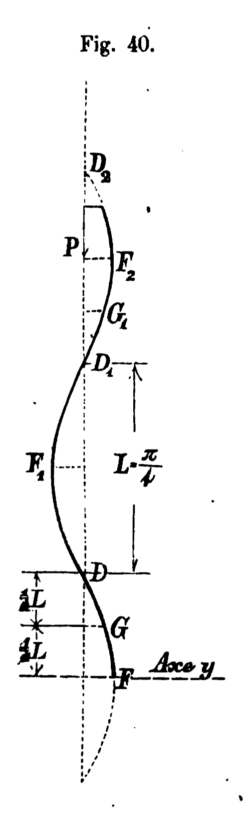
an einem oder beiden Enden eingespannten Stabes kann direct aus Gleichung 66) abgeleitet werden, indem man bei Bestimmung der Constanten C und C_1 die Bedingung stellt, dass die elastische Linie an den eingespannten Enden eine vertikale Tangente erhält. — Es lassen sich jedoch die meisten der in der Praxis vorkommenden Fälle aus der Entwicklung der Nr. **31** für einen an beiden Enden freien Stab ableiten und dient hiezu folgende Betrachtung:

Die Gleichung Nr. 67), nämlich

$$y = d \frac{\cos tx}{\cos {}^1/_2 \, . \, t \, . \, l} \quad \ldots \ldots \quad 67)$$

welche die Gestalt der Schwerpunktsachse für diesen Fall darstellt, ist, wie leicht ersichtlich, eine Wellenlinie (vgl. Fig. 40).

Fig. 40.



Die Schnittpunkte derselben mit der Achse der x, deren Abscissen wir der Reihe nach mit

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots \ldots x_n$ bezeichnen

und die wir erhalten, wenn wir in Gleichung 67) $y = 0$ setzen, sind gleich

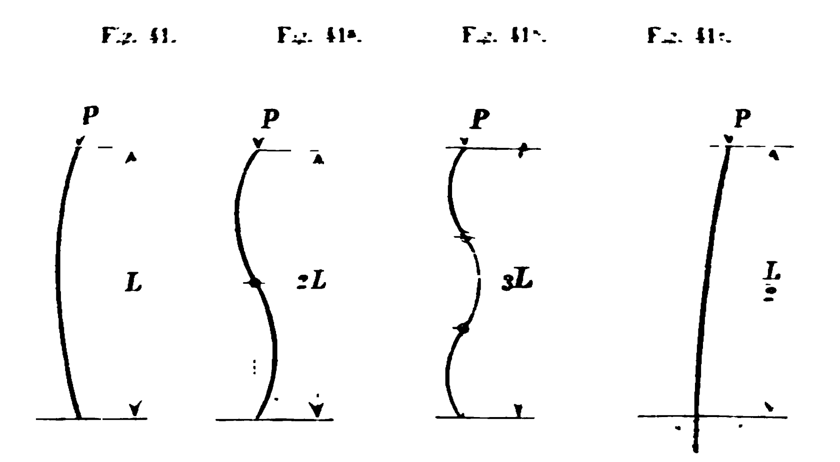
$$\frac{\pi}{2t}, \; \frac{3\pi}{2t} \; \frac{5\pi}{2t} \; \ldots \; \frac{n\pi}{2t}$$

Diese Schnittpunkte stellen Wendepunkte der Curve vor, da die zweite Ableitung von y für dieselben $= 0$, somit $\varrho = \infty$ wird. Der Abstand dieser Wendepunkte (oder die halbe Wellenlänge) ergibt sich nach obigem $= x_{\prime\prime} - x_{\prime} = x_{\prime\prime\prime} - x_{\prime\prime} = \frac{\pi}{t}$.

Bedenkt man, dass für einen Wendepunkt der Biegungscurve $\mathfrak{M} = 0$ (nach Gleichung 40), so erhellt sofort aus der Figur, dass man den Angriffspunkt der Kraft P nach einem beliebigen dieser Punkte verlegen kann, ohne den Gleichgewichtszustand zu ändern, dass somit zwei Stäbe $D_1 D_2$ und DD_2, welche in D_2 durch P belastet, und wovon der erste in den Endpunkten festgehalten, aber sonst freibeweglich (nicht eingespannt), der zweite dagegen ausserdem in der Mitte festgehalten ist, sich ganz gleich verhalten. Dasselbe gilt auch für den Stab D_1 F, wenn derselbe bei D_1 festgehalten, bei F aber unverrücklich befestigt (eingespannt) angenommen wird.

Die in Nr. **34—36** aufgestellten Regeln für die Belastung von Stäben von der Länge L nach der Achse derselben, wenn diese Stäbe beiderseits mit freien Enden versehen sind, lassen sich deshalb leicht auf die obengenannten Fälle ausdehnen, indem einfach die halbe Wellenlänge $\frac{\pi}{t} = L$ zu setzen ist. Für einen Stab DD_1, der in der Mitte festgehalten, haben wir desshalb in die Gleichungen der Nr. **34—36** für L die halbe Stablänge einzuführen, für den an einem Ende eingespannten Stab D_1F $^2/_1$ der Stablänge.

Ausserdem lassen sich aus Fig. 40 noch andere Anordnungen beurtheilen, so namentlich auch der Fall, dass die Enden nur theilsweise als eingespannt zu betrachten sind. Dieser Fall tritt ein für Vertikalständer und Gitterstäbe einfacher Fachwerke, wo



die einzelnen Glieder an den Enden mit mehr als einer Niete befestigt sind, sonst aber keine Befestigung mit andern Constructionstheilen haben. Gewöhnlich ist die Befestigung an den Enden nicht derart, dass jede Drehung der Enden ausgeschlossen ist; wir tragen dieser Befestigungsart Rechnung, wenn wir den betreffenden Stab mit einem Stück GG_1 der Fig. 40 vergleichen, wonach in die Rechnung statt der Länge $GG_1 = l$ des Stabes die Länge $L = {}^2/_3\, l$ beispielsweise einzuführen ist. Wäre das eine Ende des Stabes frei und nur das andere theilweise eingespannt, so hätte man $^4/_5\, l$ (statt $^2/_3$) in Rechnung zu nehmen.

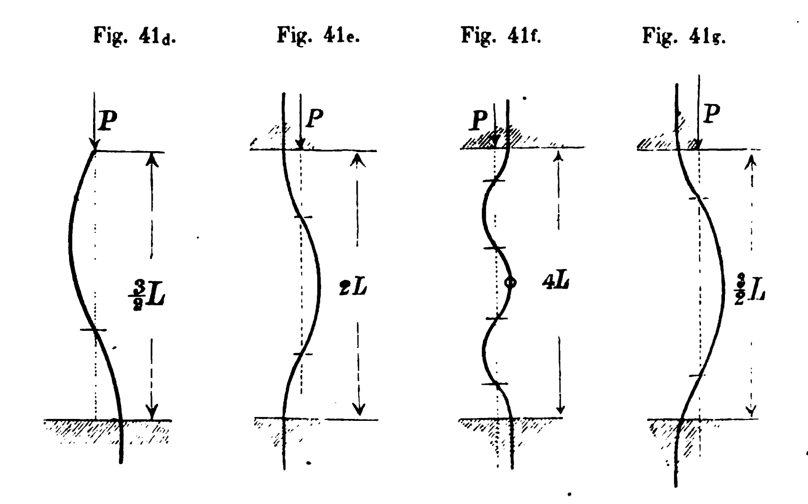
Wo solche Streben sich mit andern kreuzen, kann, wenn die Streben steif genug sind, Fig. 41a angewendet werden, was nicht der Fall ist, wenn eines der sich kreuzenden Glieder nur gegen Zug Widerstand leisten, somit seitlich ausweichen kann.

In nachstehenden Figuren sind einige dieser Fälle übersichtlich zusammengestellt und bedeutet in denselben L die in den Formeln der Nr. **34—36**) einzuführenden Stablänge:

Die Figuren 41—41[b] beziehen sich auf Stäbe, deren beide Enden frei sind, wobei in Fig. 41[a] der Stab in der Mitte, in Fig. 41[b] an zwei Stellen zwischen den Endpunkten festgehalten ist. Fig. 41[c]—41[g] beziehen sich auf Stäbe, bei welchen ein oder beide Enden eingespannt sind und zwar ist der Stab Fig. 41[f] ausserdem in der Mitte festgehalten, der Stab Fig. 41[g] als unvollkommen eingespannt zu betrachten, für welchen Fall wir als Mittelwerth der in Rechnung zu nehmenden Stablänge $^2/_3$ der wirklichen Länge l angenommen haben.

In eigenthümlichen statischen Verhältnissen befinden sich die gedrückten Gurtungen von Fachwerksbrücken:

Fig. 41d. Fig. 41e. Fig. 41f. Fig. 41g.



Wenn wir zunächst annehmen (was in Wirklichkeit nicht vollständig zutrifft), dass diese Gurtungen durch die Querträger seitlich unverrückbar festgehalten sind, so befinden sich dieselben in ähnlichen Verhältnissen, wie der durch Fig. 40 dargestellte Stab, mit dem Unterschiede jedoch, dass die Kraft P, welche die Gurtung der Länge nach zusammenpresst, nicht constant ist, sondern von den Auflagern der Brücke an gegen die Mitte hin zunimmt. Es kommt diess daher, dass bei jedem Knotenpunkte D neue Kräfte in die Gurtung eintreten, und ist desshalb die Biegungscurve nicht mehr durch Gleichung 67) ausgedrückt. — Die Aufstellung einer Theorie für diesen Fall ist ferner dadurch erschwert, dass in seltenen Fällen der Querschnitt ω der Gurtung auf deren ganze Länge constant angenommen ist, sondern ge-

wöhnlich wechselt derselbe absatzweise vom Auflager zur Mitte zunehmend.

Nehmen wir jedoch an, es sei die Gurtung so construirt, dass $\frac{\Theta}{P}$ constant, was mit der Praxis wenigstens annähernd übereinstimmt, so wird Gleichung 64) für alle Fachwerke dieselbe $\left(\text{da die Grösse } \frac{1}{\omega} \text{ klein gegen } \frac{E}{P}\right)$ und ist dann Gleichung 67) auch für eine gedrückte Gurtung richtig, und können wir Fig. 40 auch für diesen Fall anwenden.

Wir werden demnach für die Fälle der Praxis der Wirklichkeit nahe kommen, wenn wir bei einer gepressten Gurtung annehmen, dieselbe sei in den Angriffspunkten der Querträger festgehalten (nicht eingespannt), und wäre somit in die Rechnung für L der Abstand zweier Querträger einzuführen.

Zweiter Abschnitt.

Erfahrungsresultate über die Festigkeit der Baumaterialien.

§. 4. Die Festigkeitscoefficienten.

38. Im vorhergehenden §. 3. sind die Formeln entwickelt, mittelst welcher man die Spannung, Pressung und Schubspannung stabförmiger Körper berechnet. — Indem wir nun im Folgenden die für die einzelnen Materialien zulässige Spannung, Pressung und Schubspannung zusammenstellen, so können nunmehr die Dimensionen stabförmiger homogener Körper für alle vorkommenden Fälle bestimmt werden. — Da aber weiterhin sämmtliche Träger aus einzelnen homogenen stabförmigen Körpern bestehen und unsere späteren Untersuchungen stets die auf jedes einzelne Constructionsglied treffenden Kräfte zur Anschauung bringen, so finden die zunächst nur für homogene stabförmige Körper gegebenen Festigkeitscoefficienten allgemeine Anwendung.

Die folgende Tafel XII. gibt die zulässige Spannung $\mathfrak{A}$, Pressung $\mathfrak{B}$ und Schubspannung $\mathfrak{C}$, dessgleichen die entsprechenden Bruchbelastungen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{C}_0$ und zwar in Kilogrammen per Quadratcentimeter ausgedrückt.

Die zulässige Spannung $\mathfrak{A}$ oder Pressung $\mathfrak{B}$ gibt bei gleichförmig (absolut) gezogenen oder gepressten Stäben den Zug, beziehungsweise Druck, den ein Stab auszuhalten vermag, direct nach Gleichung 20). Bei relativ in Anspruch genommenen Stäben ist $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in Gleichung 31) einzusetzen und ebenso $\mathfrak{B}$ bei relativ rückwirkend angegriffenen längern Stäben in Gleichung 75); bei letzteren bezeichnet die Grösse $\dfrac{\mathfrak{B}}{1 + K\dfrac{\omega L^2}{\Theta}}$ die mittlere Pressung des Stabes. — Die Schubspannung $\mathfrak{C}$ ist durch Gleichung 23) definirt und erscheint insbesondere in den Betrachtungen der Nr. **24—28**.

Tabelle [illegible]

	Bruchgewicht [illegible]	Zulässige Spannung [illegible]	Sicherheitscoefficient
	Kilogramm. im □Cent.	Kilogramm. im □Cent.	
Absolute Festigkeit gegen Zug.			
[illegible]	800	[illegible]	5
[illegible]	1500	7.0	5
[illegible]	400	80	5
[illegible]	800	160	5
[illegible]	[illegible]	120	5
[illegible]	300	[illegible]	5
[illegible]	300	60	5
[illegible]	[illegible]—800	120	5—6
[illegible]	800	160	5
[illegible]	500	[illegible]	5 [illegible]
[illegible]	[illegible]	25	5
[illegible]	150	30	5
[illegible]	[illegible]—30	6	[illegible]*
[illegible]	4—30	6	
Absolut rückwirkende Festigkeit.			
[illegible]	300	60	5
[illegible]	150	7.0	5
[illegible]	720	120	6
[illegible]	1200	150	8
[illegible]	1500	200	8
[illegible]	4—7.0	6	[illegible]*
[illegible]	4—6.0	6	
Festigkeit gegen Abscheeren **			
[illegible]	300	60	5
[illegible]	1500	7.0	5
[illegible]	110	22	5
[illegible]	400	80	5

Für längere stabförmige Körper dürfen bei Berechnung der [illegible] Festigkeit im Allgemeinen dieselben Spannungen und

* [illegible] verschieden. [illegible] ausgesetzt [illegible] Centim. [illegible] untersucht. [illegible]

** [illegible] Abscheeren [illegible] Kräften zu [illegible] grösser [illegible] Nr. 50.

Pressungen wie bei der absoluten Festigkeit als zulässig angenommen werden; es muss jedoch aufmerksam gemacht werden, dass bei Versuchen über relative Festigkeit, welche bis zum Bruch fortgesetzt werden, aus Gleichung 31) stets ein höherer Werth des Coefficienten 𝔄 sich berechnet, als directe Versuche über absolute Festigkeit (nach Gleichung 21) ergeben, und zwar nimmt bei vierkantigen Stäben die für den Moment des Bruchs theoretisch berechnete Zugfestigkeit beim Gusseisen bis zum 2 ½fachen, beim Schmiedeisen oder Stahl bis zum 1 ½fachen zu (wohl in Folge einer Verrückung der neutralen Faser in der Nähe des Bruchs).

Da bei denjenigen Spannungen, welche bei Bauten nicht überschritten werden sollen, die Elasticitäts-Module constant und für Druck oder Zug gleich angenommen werden dürfen, so kommt obige Beobachtung bei praktischen Berechnungen nicht in Betracht, sie musste aber insbesondere desshalb erwähnt werden, damit man nicht, wie schon geschehen, aus der relativen Bruchfestigkeit vierkantiger Stäbe einen Schluss auf die absolute Festigkeit des fraglichen Materials machen zu können glaubt. Selbstverständlich ist, wenn 𝔄 und 𝔅 nicht gleich sind, stets der kleinere Werth in die Rechnung einzuführen.

Die in Tabelle XII. enthaltenen Festigkeitscoefficienten sind Mittelwerthe, da die Güte der einzelnen Materialien im Wesentlichen vom Fabrikationsort, bei Holz vom Standorte abhängt; es ist nicht nur die Wahl des Rohstoffes, sondern bei Eisen insbesondere die Fabrikationsmethode massgebend, und ist letztere manchen Aenderungen unterworfen.

Weiteren Einfluss übt auch die Behandlung des Materials bei der Verarbeitung, indem schroffe Biegungen, insbesondere Auskröpfungen, die Festigkeit des Materials beeinträchtigen. — Beim Gussstahl ist der Grad der Härtung wesentlich und trägt im Allgemeinen gehärteter Stahl mehr als weicher Stahl, freilich auf Kosten der Festigkeit gegen Stösse; eine weitere Beobachtung ist, dass die Bruchfestigkeit von Stahlplatten, welche 5500 K. betrug, auf 3800 K. herabsank, wenn die Nietlöcher (statt gebohrt) durchstanzt wurden (Versuche in dem Stahl- und Eisenwerk Bolton le Moors Lancashire). — Bei dem grossen Unterschied der Festigkeits-Coefficienten des Stahls ist Vorsicht anzurathen, wesshalb wir für guten Bessemer Stahl nur 1000 K. per □Centim. zulässige Spannung annehmen, wie auch bei der Bogenbrücke über den Quai d'Orsay in der Pariser Ausstellung geschehen ist. —

Indessen sind für das gewöhnliche Material der Brückenträger, für gewalztes Schmiedeisen, die beobachteten Bruchgewichte keineswegs sehr verschieden, und werden auch die bei der Berechnung von schmiedeisernen Brücken angewendeten Festigkeits-Coefficienten von den meisten Ingenieuren ziemlich gleichförmig angenommen, nämlich 6—800 K. per □Centim., was in Folgendem näher ausgeführt wird und wobei wesentlich in Betracht kommt,

ob die Verschwächung durch Nieten etc. vollständig bei der Rechnung berücksichtigt worden ist.

Eine sehr vollständige Zusammenstellung der sämmtlichen Versuche und vieler sonstigen Erfahrungen hat General Morin gegeben; seine Schrift „die Widerstandsfähigkeit der Baumaterialien" ist in deutscher Uebersetzung in der allgemeinen Bauzeitung von Förster in den Jahren 1853 und 1854 erschienen.

Anmerkung. Der Umstand, dass kristallinisches, grobkörniges Eisen oft annähernd dieselbe Bruchlast zeigt, wie feinkörniges sehniges Eisen, hat neuerdings in England Veranlassung gegeben, die Güte einer Eisensorte nach der Arbeit zu beurtheilen, welche zur Zerreissung einer Querschnitteinheit nothwendig ist; bezeichnet man nämlich mit λ_0 die Ausdehnung eines Stabs von der Länge l kurz vor Eintritt des Bruchs, so ist der Zähigkeitsmodul U des Stabs näherungsweise ausgedrückt durch die Gleichung

$$U = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{l} . \mathfrak{A}_0$$

wo $\mathfrak{A}_0$ die auf die Quadrateinheit bezogene Bruchlast bedeutet; aus letzterer und aus der unmittelbar vor dem Bruch beobachteten Verlängerung λ_0 ist der Zähigkeitsmodul U für einige Materialien wie folgt berechnet:

Bezeichnung der Materialien	$\frac{\lambda_0}{l}$	$\mathfrak{A}_0$ in Kilo	U in Kilo und Decim.
Schmiedeisen, kristallinisch, schlecht	$\frac{1}{60}$	3150	2625
„ sehr sehnig	$\frac{1}{10}$	3780	18900
Gusseisen, gewöhnl. Qualität . .	$\frac{1}{600}$	1102	84
Bessemer Schienenstahl, gut .	$\frac{1}{8}$	5985	37406
Krupp'scher Gussstahl	$\frac{1}{7}$	6694	47812
Stahl, sehr hart	$\frac{1}{60}$	6300	5250

die Werthe von U geben die Verhältnisszahlen, nach welchen die betreffenden Materialien den Stössen widerstehen, was für Eisenbahnzwecke in vielen Fällen ganz besonders in Betracht kommt.

39. Es ist bis dahin von uns kein Unterschied zwischen ruhender und bewegter Last gemacht worden, und zeigen auch wirklich die beobachteten Einsenkungen grosser steifer Brückenconstructionen keinen bedeutenden Einfluss der Geschwindigkeit, mit der sich die Belastung über die Brücke bewegt. — Dagegen scheint sich ein schädlicher Einfluss bewegter Lasten dadurch geltend zu machen, dass durch oft wiederholte Belastung und Entlastung der Eisenmaterialien der Aggregatzustand des Eisens eine Veränderung erleidet, und weisen hierauf die Versuche von Wöhler hin, welche in der Zeitschrift für Bauwesen 1870 veröffentlicht sind.

Wöhler hat durch Versuche an Eisen- und Stahlstäben gefunden, dass die Zerstörung des Eisens nicht nur eintritt durch die ruhende, einmal in Wirkung gesetzte Bruchlast, sondern auch durch eine, ziemlich weit unter der Bruchgrenze bleibende, jedoch sehr oft wiederholte Belastung desselben.

Je grösser die Differenz der Spannungen ist, die bei dieser wiederholten Belastung des Eisens eintreten, und je öfter die abwechselnde Belastung und Entlastung wiederholt wird, um so kleiner wird die Grenzspannung, welche schliesslich den Bruch herbeiführt.

Für Schwingungen, bei denen dieselbe Faser das einemal gespannt, das anderemal gepresst ist, tritt als Differenz der äussersten Faserspannungen die Summe von Spannung und Pressung auf und ist desshalb eine solche Inanspruchnahme des Materials als eine möglichst ungünstige, zerstörende zu bezeichnen.

Der Vollständigkeit halber mögen die Hauptresultate der Wöhler'schen Versuche hier Platz finden:

Tabelle XII[a].

Material.	Bruchlast pro Quadrat-Centim. ruhende Last.	Grenzspannungen pro Quadrat-Centimeter. obere Grenze.	untere Grenze.	Differenz der Grenzspannungen.
	Kil.	Kil.	Kil.	Kil.
Eisen	3290	1169	— 1169	2338
»	»	2190	0	2190
»	»	3216	1754	1462
Gussstahl von Krupp	6400	2047	— 2047	4094
»	»	3509	0	3509
»	»	5848	2558	3290

Die vorstehende Tabelle gibt die Grenzwerthe der Faserspannungen pro □Centimeter, durch welche ein Stab auch dann nicht den Bruch erleidet, wenn er in rascher Aufeinanderfolge unendlich oft wiederholt zwischen obigen Grenzspannungen belastet und entlastet wird.

Die Wöhler'schen Versuche sind vorzugsweise angestellt worden, um das Verhalten von Federn und Wagenachsen, welche in rascher Aufeinanderfolge Druck und Zug auszuhalten haben, festzustellen, und können dieselben eine directe Anwendung auf die Berechnung von Brückenconstruktionen nicht finden, weil bei letzteren die Belastung und Entlastung seltener und in erheblichen Zwischenräumen erfolgt. — Dass man die Resultate der

Wöhler'schen Untersuchungen nicht ohne Weiteres auf Brückenbauten anwenden kann, geht auch daraus hervor, dass bei Brücken verschiedene Umstände eintreten, die eine beträchtliche Abminderung der zulässigen Spannung verlangen. Hieher gehört die Unsicherheit in der Bestimmung der Grösse der zufälligen Belastung, mangelhafte Ausführung, Verschwächung durch Rosten, welchen Umständen wir dadurch Rechnung getragen haben, dass in Tabelle XII. für Eisen nur ca. $^1/_5$ der Bruchlast als zulässige Belastung angenommen ist, somit viel weniger, als oben in Tabelle XII^a.

Dagegen zeigen die Werthe der Tabelle immerhin, dass es passend sein wird, bei Bestimmung der Coefficienten für die zulässige Belastung der zufälligen Last ein grösseres Moment einzuräumen als dem Eigengewicht, weil Glieder, die durch das letztere schon stark in Anspruch genommen sind, nach Tabelle XII^a. eine grössere Grenzspannung aushalten, als solche, die bei leerer Brücke ganz entlastet werden.

Herr Ingenieur Gerber, Vorstand der Brückenbauanstalt von Klett & Cie. in Nürnberg, hat in einer Abhandlung über den Bau der Mainzer Rheinbrücke den Vorschlag gemacht, die zulässige Spannung einer schmiedeisernen Brückenkonstruction danach zu bestimmen, dass eine gewisse äusserste Spannungsgrenze (d. h. diejenige Spannung, bei der zuerst eine permanente Verlängerung beobachtet wird) durch die Spannung der unbelasteten Brücke plus dem Dreifachen der durch die variable Last hervorgerufenen Spannung nicht überschritten werde; für gutes Walzeisen, dessen Bruchfestigkeit wir zu 3300 Kilo per □Centim. annehmen dürfen, hat Hr. Gerber diese äusserste Spannungsgrenze (Elasticitätsgrenze) zu 1600 Kilo per □Centim. angenommen.

Wenn wir die Belastungen auf die Längeneinheit reduciren und dann

p das Eigengewicht der Brücke,
k die variable Last,
$q = p + k$ die Totallast

nennen, und für ein bestimmtes Construktionsglied mit

$\mathfrak{A}_p$ die Spannung durch das Eigengewicht,
$\mathfrak{A}_k$ die grösste Spannung in Folge der variablen Last,
$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_k$ die grösste Totalspannung

bezeichnen, so spricht sich obige Regel durch die Formel aus:

$$A_p + 3\,\mathfrak{A}_k = 1600 \text{ K.} \quad \ldots\ldots \quad 77)$$

und haben wir hienach folgende Tabelle XIII. gebildet:

Tabelle XIII.

$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{k}$	$\mathfrak{A}_k = \frac{1600}{\frac{p}{k}+3}$	$\mathfrak{A}_p$	$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_k$
0	0	533	0	533
1/10	1/9	514	57	571
1/7	1/6	505	84	589
1/5	1/4	492	123	615
1/4	1/3	480	160	640
1/3	1/2	457	228	685
2/5	2/3	436	291	727
1/2	1	400	400	800

Bei Aufstellung der Tabelle XIII ist angenommen, dass die in Folge wechselnder Belastung auftretenden Grenzwerthe der Spannungen den Grenzwerthen der Belastung entsprechen, somit p : q proportional seien. Es trifft diess für die Hauptträger bei gleichmässiger Vertheilung der Ueberlast insofern zu, als wir auch das Eigengewicht gleichförmig auf die Hauptträger vertheilt annehmen können, anders gestaltet sich aber das Verhältniss bei einseitiger Belastung, wo für gewisse Trägertheile die Spannungen der Reihe nach grösser als die der gleichförmig vertheilten Ueberlast entsprechende Spannung $\mathfrak{A}_q$, und selbst kleiner als $\mathfrak{A}_p$, ausfallen können, so dass das Verhältniss zwischen kleinster und grösster Spannung wesentlich kleiner werden kann, als $\frac{p}{q}$.

Für die Fahrbahnglieder insbesondere ist die Spannung durch Eigengewicht nahe = 0, somit ebenfalls $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{A}_q}$ wenig von 0 verschieden.

Diese Glieder sollten daher wesentlich stärker construirt werden, vorzugsweise nothwendig erscheint jedoch eine Ermässigung der nach Tabelle XIII bemessenen zulässigen Spannung (Pressung) in denjenigen Fällen, wo in einem Gliede Wechsel zwischen Druck und Zug stattfindet, und zwar tritt der ungünstigste Fall dann ein, wenn dasselbe Construktionsglied in Folge Bewegung der Last abwechslungsweise gleich stark auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen ist.

Nach den von Wöhler erhaltenen Resultaten darf für Stäbe, die in rascher Aufeinanderfolge gleich stark auf Druck und Zug in Anspruch genommen sind, die Summe von Pressung und Spannung 70 % des für ruhende Last gültigen Werths der Bruchlast

nicht überschreiten, so dass Zug beziehungsweise Druck nur etwa 35% des fraglichen Werthes betragen würde. — Aber abgesehen davon, dass für die in Frage kommenden zulässigen Spannungen (Pressungen) ganz andere Verhältnisszahlen sich ergeben müssten, treten speciell bei den Brückenbauten, wie schon oben erläutert, nicht diejenigen Schwingungen ein, welche bei den Wöhler'schen Versuchen durch sehr rasch folgende Belastungen gleicher Intensität hervorgerufen werden, und glauben wir daher sicher zu gehen, wenn wir für diesen ungünstigsten Fall — wo in demselben Construktionsgliede in Folge wechselnder Belastung gleich grosse Maxima der Spannung und Pressung eintreten, je $^2/_3$ der sonst zulässigen Maximalspannung, beziehungsweise Pressung annehmen, beispielsweise unter Zugrundlegung der Tabelle XIII. je $^2/_3$ des in der letzten Kolonne der genannten Tabelle enthaltenen Werthes.

Je nachdem nun die der grössten Inanspruchnahme entgegengesetzte Spannung (Pressung) der ersteren sich nähert, oder aber nur einen grössern oder kleinern Bruchtheil derselben ausmacht, nimmt die zulässige Pressung (Spannung) von $^2/_3$ allmählig bis 1 zu, wie diess für das Verhältniss $\frac{p}{q} = {}^1/_3$ in Tabelle XIII^a dargestellt ist.

Tabelle XIII^a.

Zulässige Spannung $\mathfrak{A}$.	Zulässige Pressung $\mathfrak{B}$.	$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$	Bemerkungen.
pro Quadrat-Centimeter.	pro Quadrat-Centimeter.		
457	457	1	** Die negativen Vorzeichen deuten an, dass statt Pressung Spannung einzutreten hat.
488	366	0,75	
522	261	0,5	
562	140	0,25	
609	0	0	
665	— 166 *	— 0,25	
685	— 228 *	— 0,33	

Anmerkung. In Ermanglung von andern Anhaltspunkten haben wir zu Bestimmung der Zwischenwerthe eine Gleichung 1. Grades angenommen, deren Constante sich aus den Grenzwerthen leicht ergeben.

Für das Verhältniss $\frac{p}{q} = 0$ wechseln in ähnlicher Weise die Spannungen (Pressungen) zwischen 355 und 533, für $\frac{p}{q} = {}^1/_2$ zwischen 533 und 800 etc. Indem wir für jedes Verhältniss $\frac{p}{q}$ eine andere Tabelle XIII^a aufstellen, erreichen wir, dass für

grössere Brücken, welche durch die Stösse der Fahrzeuge weniger leiden, als leichte Brücken, auch für den Fall des Wechsels zwischen Druck und Zug grössere zulässige Spannungen sich ergeben. Wie aber 685 Kil. (nahe 700) einen Durchschnittswerth der für die Hauptträger mittlerer Spannweite zulässigen Spannung (Pressung) darstellt, so giebt auch Tabelle XIII^a. für solche Durchschnittsfälle direct die Werthe des beim Wechsel von Druck und Zug zulässigen Maximums an.

Bei Anwendung des durch Tabelle XIII und XIII^a erläuterten Verfahrens erhält man für schmiedeiserne Brückentheile eine den jeweiligen Verhältnissen entsprechende zulässige Spannung, beziehungsweise Pressung für ein bestimmtes Material, dessen Bruchfestigkeit gegen Zug wie gegen Druck zu 3300 Kil. pro □Centim. (entsprechend der mittlern Bruchfestigkeit der bei Brückenbauten gewöhnlich verwendeten Eisensorten) angenommen ist.

In der Praxis wird jedoch vielfach das Verfahren zu Bestimmung der Festigkeitscoefficienten wesentlich vereinfacht.

Abgesehen von den Bestandtheilen der Fahrbahn (Querträger, Schwellenträger), welche direct den Stössen der Fahrzeuge ausgesetzt sind, und bei denen man in Folge dessen eine grösste Spannung (Pressung) von nur 500—600 Kil. pro □Centim. zulässt, wendet man folgende durchschnittliche Spannungen an:

für kleine Brücken 600 Kil. pro □Centim.
„ mittlere „ 700 „ „ „
„ grosse „ 800 „ „ „

je nach Umständen Mittelwerthe zwischen diesen einzelnen Sätzen wählend.

Hiebei ist nun allerdings auf Wechsel zwischen Druck und Zug nicht Rücksicht genommen, was auch da nicht nothwendig ist, wo Zug oder Druck gegenüber der überwiegenden Inanspruchnahme zurücktritt. Wo jedoch dieser Wechsel von Belang ist, wird es zweckmässig sein, das in Tabelle XIII^a erläuterte Verfahren anzuwenden, d. h. die zulässige Spannung (bez. Pressung) bis auf $^2/_3$ im ungünstigsten Falle zu reduciren.

40. Ist die Länge eines gedrückten (gepressten) Construktionsglieds sehr beträchtlich gegenüber seiner kleinsten Querschnittsdimension, so ist dessen relativ rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen und muss dessen grösste Pressung $\mathfrak{B}$ nach Formel 76) berechnet werden, wenn die per Quadrateinheit wirkende mittlere Pressung $\mathfrak{B}_m$ als bekannt vorausgesetzt wird. Andererseits, wenn $\mathfrak{B}'$ die für das fragliche Material zulässige absolute Pressung bezeichnet, so ist die mittlere zulässige Pressung $\mathfrak{B}'_m$ durch die Formel ausgedrückt

$$\mathfrak{B}'_m = \frac{\mathfrak{B}'}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}} \quad \ldots \ldots \quad 76^a)$$

Tabelle XIV.

Nr. d. Fig.	Verhältnisszahlen $\frac{L}{H}$ oder $\frac{L}{D}$		1	10	20	30	40	50	60
	Gusseisen,	rund voll	1200 1	811 $\frac{1}{1,48}$	411 $\frac{1}{2,92}$	226 $\frac{1}{5,32}$	138 $\frac{1}{8,66}$	92 $\frac{1}{13}$	66 $\frac{1}{18,3}$
42		rund hohl $\frac{d}{D} = \frac{5}{6}$	1200 1	937 $\frac{1}{1,28}$	563 $\frac{1}{2,13}$	339 $\frac{1}{3,54}$	217 $\frac{1}{5,53}$	148 $\frac{1}{8,1}$	107 $\frac{1}{11,2}$
42		rund hohl $\frac{d}{D} = \frac{9}{10}$	1200 1	952 $\frac{1}{1,26}$	582 $\frac{1}{2,06}$	355 $\frac{1}{3,38}$	229 $\frac{1}{5,24}$	157 $\frac{1}{7,62}$	114 $\frac{1}{10,54}$
43		kreuzförmig $\frac{H}{\delta} = 10$	1200 1	714 $\frac{1}{1,68}$	323 $\frac{1}{3,71}$	169 $\frac{1}{7,11}$	101 $\frac{1}{11,9}$	67 $\frac{1}{17,90}$	47 $\frac{1}{25,5}$
	Schmiedeisen.	voll viereckig	600 1	536 $\frac{1}{1,12}$	405 $\frac{1}{1,48}$	288 $\frac{1}{2,08}$	205 $\frac{1}{2,92}$	150 $\frac{1}{4,0}$	113 $\frac{1}{5,32}$
	s. Fig. 42.	rund hohl $\frac{d}{D} = \frac{24}{25}$	600 1	555 $\frac{1}{1,08}$	451 $\frac{1}{1,33}$	243 $\frac{1}{1,75}$	257 $\frac{1}{2,33}$	195 $\frac{1}{3,08}$	150 $\frac{1}{4,0}$
44		quadratisch hohl $\frac{h}{H} = \frac{24}{25}$	600 1	566 $\frac{1}{1,06}$	480 $\frac{1}{1,25}$	385 $\frac{1}{1,56}$	300 $\frac{1}{2,0}$	234 $\frac{1}{2,56}$	185 $\frac{1}{3,24}$
	s. oben. Fig. 43.	kreuzförmig $\frac{H}{\delta} = 10$	600 1	488 $\frac{1}{1,23}$	316 $\frac{1}{1,90}$	197 $\frac{1}{3,04}$	130 $\frac{1}{4,62}$	90 $\frac{1}{6,66}$	65 $\frac{1}{9,15}$
45		$\frac{h}{\delta} = 10$	600 1	536 $\frac{1}{1,12}$	408 $\frac{1}{1,47}$	290 $\frac{1}{2,07}$	207 $\frac{1}{2,90}$	151 $\frac{1}{3,97}$	114 $\frac{1}{5,28}$
46		$\frac{h}{\delta} = 10$	600 1	504 $\frac{1}{1,19}$	337 $\frac{1}{1,78}$	217 $\frac{1}{2,77}$	145 $\frac{1}{4,15}$	101 $\frac{1}{5,92}$	74 $\frac{1}{8,06}$
	Gussstahl.	voll viereckig	1500 1	1339 $\frac{1}{1,12}$	1013 $\frac{1}{1,48}$	721 $\frac{1}{2,08}$	514 $\frac{1}{2,92}$	375 $\frac{1}{4,0}$	282 $\frac{1}{5,32}$
	Holz.	voll viereckig	60 1	48 $\frac{1}{1,24}$	30 $\frac{1}{1,96}$	19 $\frac{1}{3,16}$	12 $\frac{1}{4,84}$	9 $\frac{1}{7,0}$	6 $\frac{1}{9,64}$

Die Ausbiegung des Stabes erfolgt stets nach der Seite der kleinsten Querschnittsdimension, es ist desshalb Gleichung 30) auf diejenige Achse des Querschnitts zu beziehen, für welche Θ ein Minimum wird. Die Mittelwerthe für $\mathfrak{B}'$ sind in Tabelle XII, die Mittelwerthe für den Coefficienten K in Tabelle XI. gegeben und erhält man endlich durch Berechnung der Trägheitsmomente Θ die nebenstehende Tabelle XIV., in welcher die zulässigen mittleren Pressungen für eine Reihe der häufiger vorkommenden Fälle direct gegeben sind. — Diese zulässige mittlere Pressung $\mathfrak{B}'_m$ ist aber nach vorstehender Definition diejenige Belastung, die einem längeren Stabe per Quadratcentimeter mit Sicherheit zugemuthet werden darf. — Die Tabelle enthält ausserdem den Bruch $\frac{1}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}}$ und gibt dieser an, welcher Theil der absolut rückwirkenden Festigkeit für längere Stäbe in Rechnung zu ziehen ist.

Anmerkung. Wir bemerken hier wiederholt, dass die Werthe der Tabelle XIV. sich auf Stäbe mit freien (abgerundeten) Enden beziehen. Sind die Stäbe ganz oder theilweise eingespannt, so ist die in Rechnung zu stellende Länge L aus Fig. 41—41[h] zu entnehmen.

41. Hohle Säulen oder Stäbe mit dünnen Wänden zeigen nach Tafel XIV. eine verhältnissmässig grössere relativ rückwirkende Festigkeit, als volle runde oder viereckige Stäbe, da das Material in Beziehung auf Biegung günstiger vertheilt ist. — Ist jedoch die Wanddicke gegenüber den übrigen Querschnittdimensionen zu gering, so findet beim Bruch ein Einknicken der dünnen Wand Statt; für solche Fälle ist die zulässige Pressung schon für kurze Stäbe entsprechend zu vermindern, und bei längeren Stäben ist die so verminderte zulässige Pressung ausserdem mit dem Quotienten $\frac{1}{1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}}$ zu multipliciren.

Diesem Einknicken kann man aber durch zweckmässige Absteifungen entgegenwirken, und zwar können letztere sowohl parallel als senkrecht zur Längenrichtung angebracht sein; so werden z. B. schmiedeiserne Röhren zweckmässig durch einzelne Ringe ausgesteift, welche verhältnissmässig wenig Material erfordern.

Wenn die Absteifung durch Längenrippen geschieht, so sind solche in der Regel dem tragenden Querschnitt hinzuzurechnen; man kann die genaue Berechnung des Trägheitsmoments des oft complicirten Querschnitts durch Annahme einer mittleren Wanddicke umgehen.

Sehr ausgedehnte Versuche über die rückwirkende Festigkeit des Gusseisens hat E. Hodgkinson angestellt

und veröffentlicht unter dem Titel: *Experimental researches on the strength and other properties of cast iron, with the developement of new principles etc. by Eaton Hodgkinson 1846* (im Auszug übersetzt: Annales des Ponts et Chaussées 1855).

Für gusseiserne Säulen, welche stumpf aufgestellt und an den Enden befestigt werden, hat Hodgkinson nachstehende Formeln gegeben:

Bezeichnet
L die Säulenlänge in Decimetern,
D den äusseren und
d den inneren Säulendurchmesser in Centimetern,
so ist das in Kilogrammen ausgedrückte Bruchgewicht P_c:
für volle Säulen

$$P_c = 10831 \frac{D^{3,55}}{L^{1,7}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 77)$$

für hohle Säulen:

$$P_c = 10920 \frac{D^{3,55} - d^{3,55}}{L_{1.7}} \quad \ldots \ldots \quad 78)$$

Diese Formeln sind genau, wenn die Länge wenigstens 25mal grösser ist, als der Säulendurchmesser, für kürzere Säulen hat Hodgkinson das nach Gleichung 77) und 78) bestimmte Bruchgewicht P_c combinirt mit der absolut rückwirkenden Festigkeit; bezeichnet nämlich P_b das nach Gleichung 21) für ganz kurze Stäbe gefundene Bruchgewicht, so ist für etwas grössere Längen welche aber unter dem 25fachen des Durchmessers sich bewegen,

$$\text{Bruchgewicht } P_c' = \frac{P_c\ P_b}{P_c + {}^3/_4\ P_b} \quad . \quad 79)$$

wo P_c nach Gleichung 77) oder 78) bestimmt vorausgesetzt ist.

Diese Formeln 77)—79) stimmen für die beim Brückenbau üblichen Dimensionen mit den Resultaten von Gleichung 75) und Tafel XIV. überein; bei sehr langen Stäben kann eine vollständige Uebereinstimmung nicht erwartet werden, zumal hier der Bruch bei denselben durch Zerreissen der am meisten gezogenen Faser eintreten wird; denn beim Gusseisen ist die Festigkeit gegen Zug nur $^1/_6$ bis $^1/_5$ der Festigkeit gegen absoluten Druck.

42. Bei Aufstellung der für Brückenbauten anzuwendenden grössten Spannungen und Pressungen, wie solche in den Nummern **38—41** erörtert sind, ist auf nicht immer zu vermeidende Zufälligkeiten, auf unerwartete Vermehrung der Belastungen, ferner auf die Stosswirkung der bewegten Lasten Rücksicht genommen.

Bei Construktionen, welche nur von ruhenden Lasten angegriffen werden, welche somit unveränderliche Spannungen oder Pressungen auszuhalten haben, und Stosswirkungen nicht ausgesetzt sind, findet man häufig die Materialien weit stärker

in Anspruch genommen, und steht diess auch in Uebereinstimmung mit den Wöhler'schen Versuchen (vergl. Tabelle XIIᵃ.).

So waren die Ketten, mittelst deren die Röhren der Britanniabrücke gehoben wurden, mit 1300 Kil. pro □Centim. belastet, somit da für fragliches Material eine Bruchlast von 3500 Kil. anzunehmen ist, mit über ein Drittel der letzteren.

Ein Beispiel sehr starker Belastung hölzerner Säulen führt Morin an in seinem (oben citirten) Aufsatz über die Festigkeit der Materialien, indem im Getreidemagazin La Villette die hölzernen Pfosten der untersten Etage bei einer Höhe von 3,2 M. und einem Querschnitt von 0,35 M. auf 0,20 M. einem Druck von 123 Kil. pro □Cent. zu widerstehen haben. Für diesen Fall ist $\frac{L}{H} = \frac{320}{20} = 16$, somit sollte nach Tabelle XIV. der □Centimeter nur mit ca. 38 Kil. belastet sein. Diese Pfosten haben daher mehr als das Dreifache dieser Last mit Sicherheit ausgehalten.

Ebenso hat Fairbairn in einer Abhandlung über die Anwendung eiserner Träger im Hochbau (*On the application of iron to building purposes*) für die Säulen und Balken feuersicherer Gebäude ein Drittel der Bruchlast als zulässige Spannung (Pressung) angenommen.

Wenn somit für ruhende Last, wie diess namentlich bei Hochbauten meist zutrifft, die Grösse der Belastung genau bekannt ist, so kann man die Sicherheitscoefficienten der Tabelle XII. wohl geringer nehmen, und halten wir folgende Werthe der Belastung pro □Centimeter für zulässig:

Schmiedeisen auf Druck und Zug . .	1000 Kil.
Gusseisen auf Druck	1500 Kil.
Holz auf Druck oder Zug	80—100 Kil.

was einem Sicherheitscoefficienten für Schmiedeisen = 3, für Holz nicht unter 5 entspricht.

Hiebei ist vorausgesetzt, dass alle Umstände, welche eine Verschwächung der Construktion bedingen könnten, in Rechnung gezogen sind, dass die Bruchlast der verwendeten Materialien durch Versuche genau bekannt ist, und dass namentlich das Holz den Einflüssen der Witterung entzogen ist.

Der Coefficient für Gusseisen ist verhältnissmässig niedrig angenommen mit Rücksicht auf schwer zu vermeidende Gussfehler.

§. 5. Von der Stärke der Verbindungen.

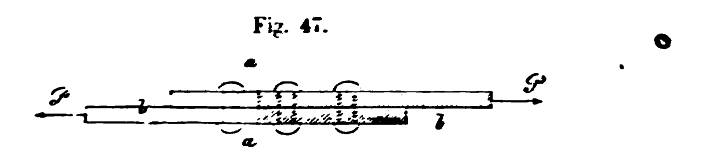
43. Die Festigkeit einer Construktion hängt wesentlich ab von der Stärke der einzelnen Verbindungen; wenn ein Bruch durch Zerreissen eines Bolzens oder einer Niete erfolgt, so ist ein Ueber-

maass in der Stärke der zu verbindenden Glieder ohne weiteren Nutzen und ist somit eine genaue Berechnung der einzelnen Dimensionen nur dann von Vortheil, wenn man sich über die Widerstandskraft der nothwendigen Knotenpunkte und Stösse Rechenschaft zu geben weiss.

Eine Verbindung kann entweder durch den geometrischen Zusammenhang der einzelnen Theile gebildet werden, wie diess bei vielen Holzverbindungen Statt findet, meist aber werden einzelne Zwischenstücke, wie Bolzen, Nieten u. dergl. zu Hilfe genommen. — Um berechnen zu können, inwieweit die einzelnen Zwischenglieder und Theile der zu verbindenden Glieder in Anspruch genommen sind, müssen in allen Fällen die Betrachtungen der Nr. 4. zum Ziele führen, indem man sich durch die fraglichen Glieder geeignete Trennungsflächen gelegt denkt und die Gleichgewichtsbedingungen für die Summe der innern und äussern Kräfte anschreibt. — In den meisten Fällen wird diese Berechnung sehr einfach und handelt es sich in der Hauptsache darum, geeignete Trennungsflächen aufzusuchen.

44. Wir betrachten zunächst den Fall, dass 2 Stäbe nach ihrer Längenrichtung gestossen und durch Bolzen so verbunden sind, dass ein nach der Längenrichtung wirkender Zug durch

Fig. 47.



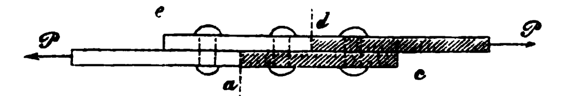
diese Bolzen vollständig übertragen werden muss, wie diess in beistehender Fig. 47 angedeutet ist.

Bei einem Schnitt aa senkrecht zu der zu übertragenden Kraft P wird letztere durch die im Schnitt aa wirkenden absoluten Spannungen aufgenommen, während in einem Schnitt parallel zur Kraftrichtung die Uebertragung mittelst der längs der Trennungsfläche bb wirkenden Schubkräfte Statt findet, und müssen letztere — wenn man vorläufig von der Reibung absieht — in der Querschnittfläche der auf Abscheeren in Anspruch genommenen Bolzen aufgesucht werden.

Wir machen nun die einigermassen willkührliche Voraussetzung, dass diese 3 Bolzen, insofern sie gleichen Durchmesser haben, sich gleichförmig in die zu übertragende Kraft theilen; denn unter dieser Annahme sind die Aenderungen in der Spannung der zu verbindenden Stabenden möglichst stetig, und da anderseits sprungweise Spannungsdifferenzen sich von selbst auszugleichen bestrebt sind, so darf rückwärts auf die Zulässigkeit obiger Voraussetzung geschlossen werden.

In beistehender Fig. 48 sei durch die Schraffirung ein Schnitt ad angedeutet; betrachten wir zuerst das Stück ed des oberen Stabes, so muss der in d wirkende Zug im Gleichgewicht sein mit dem Abscheerungswiderstand der 2 am Fragment ed befestigten Bolzen; dieser Widerstand S ist für jeden der drei gleichförmig

Fig. 48.



angegriffenen Bolzen je

$$S = \frac{1}{3} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad I.$$

folglich ist der im obern Stab in d wirkende Zug Z_d durch die Gleichung gegeben

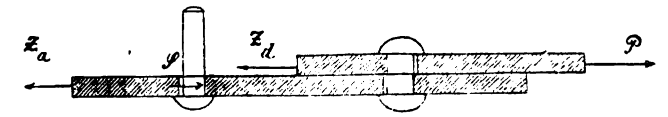
$$Z_d = 2\,S = \frac{2}{3} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad II.$$

und ebenso findet man durch Betrachtung des Fragments ac für den Zug Z_a, der im untern Stab in a wirkt,

$$Z_a = 2\,S = \frac{2}{3} P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad III.$$

Die sämmtlichen im Schnitt ad parallel P wirkenden Kräfte Z_a, Z_d und S müssen eine Resultante geben, deren algebraische Summe gleich ist der Kraft P. — Die Widerstandskraft S des mittleren Bolzens wirkt — wie aus der Fig. 49 hervorgeht — den Kräften

Fig. 49.



Z_a und Z_d entgegengesetzt, und ist somit nach den Bedingungen des Gleichgewichts

$$P = Z_a + Z_d - S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad IV.$$

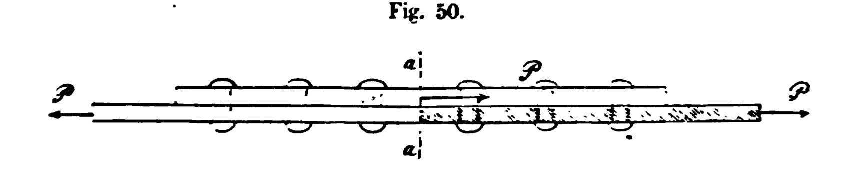
eine Gleichung, deren Richtigkeit durch Wertheinsetzung aus den Gleichungen I.—III. sofort erhellt.

In weiterer Verfolgung dieser Anschauungen finden wir die schwächsten Stellen der betrachteten Stossverbindung. — Von der linken Seite ausgehend ist der Zug im untersten Stabe zwischen dem 1. und 2. Bolzen $Z_a = \frac{2}{3} P$, zwischen dem 2. und 3. Bolzen

$\frac{1}{3}$ P, während unmittelbar an dem 1. äussersten Bolzen der durch die Durchlochung verschwächte Stab den vollen Zug P auszuhalten hat; an jedem andern Punkte ist entweder der Querschnitt des Stabes grösser, oder ist die zu übertragende Kraft geringer: es ist also am ersten äussersten Bolzen die schwache Stelle des betrachteten Stabes. — Der Bruch kann aber auch durch Zerreissen der Bolzen eintreten; es ist zu untersuchen, ob letztere durch die Kraft $\frac{P}{3}$ mehr in Anspruch genommen sind, als der verschwächte Querschnitt des Stabes durch die volle Kraft P.

Wir gehen auf den allgemeinern Fall über, dass, wie in Fig. 50 angedeutet, 2 stumpf gestossene Stäbe durch eine einseitige Stossplatte und beliebig viele Bolzen verbunden sind. Wir ersehen aus der Betrachtung des Schnitts a a, dass die Stossplatte in der Mitte die zu übertragende Kraft P vollständig aufnehmen muss, und ist diese Kraft P in der Stossplatte auch da noch vorhanden, wo letztere durch die a a zunächst liegenden Bolzen verschwächt ist; dort sind also die beiden schwachen Stellen der be-

Fig. 50.



trachteten Stossplatte. — Die gestossenen Stäbe haben ihre schwache Stelle unmittelbar an den äussersten Bolzen, die Bolzen selbst werden wieder als gleich stark und gleichförmig angegriffen betrachtet, und haben, soweit sie auf einer Seite des Stosses sich befinden, je die ganze Kraft auf die Stossplatte, beziehungsweise von da auf den zweiten Stab zu übertragen. — Ein Bruch kann in der schwachen Stelle der Stäbe, oder in den Bolzen, oder aber in der Stossplatte eintreten.

Diese dreierlei Möglichkeiten eines Bruches sollen in bestimmte Formeln gebracht werden. Wir denken uns einen Stab, der der Breite nach nur ein Bolzenloch hat, oder was dasselbe ist, wir denken uns breitere Stäbe in so viele Längenstreifen vertheilt, als der Breite nach Bolzen vorhanden sind, und bezeichnen für die in Fig. 50, beziehungsweise 47 skizzirten Stossverbindungen mit

b die Breite der zu verbindenden Stäbe oder Blechstreifen,
b′ die Breite der Stossplatte (wenn eine solche vorhanden ist), beziehungsweise eines Streifens derselben,

t die Dicke der Stäbe,
t' die Dicke der Stossplatte,
d den Durchmesser der Bolzen,
n die Anzahl der an einem Stab hinter einander befindlichen Bolzen; ferner sei
𝔄 die grösste Spannung im gestossenen Stabe,
𝔄' die grösste Spannung in der Stossplatte,
ℭ die Schubspannung in den Bolzen, so ist
für den gestossenen Stab

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b - d)\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

für die Stossplatte

$$\mathfrak{A}' = \frac{P}{(b' - d)\,t'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 81)$$

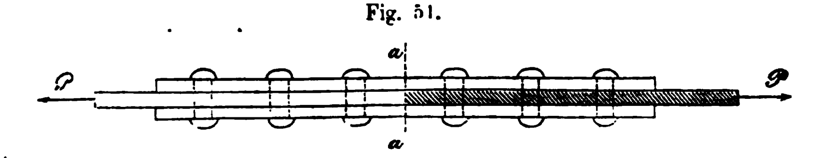
für die Bolzen

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 82)$$

Wo in diesen 3 Gleichungen der Werth von 𝔄, 𝔄' oder ℭ der zulässigen Spannung oder Schubspannung am nächsten kommt, beziehungsweise dieselbe am meisten überschreitet — da ist die schwache Stelle der betrachteten Stossverbindung. — Selbstverständlich fällt für den in Fig. 47—49 gezeichneten Stoss die Gleichung 81) ganz aus. — Wir werden einen Stoss dann als richtig construirt annehmen dürfen, wenn die Spannung in dem Stab, der Stossplatte und dem Bolzen der zulässigen Spannung gleich nahe steht und wird man mit verhältnissmässig geringem Materialaufwand der Stossplatte und den Bolzen stets eine dem verschwächten Stab mindestens gleichkommende Stärke geben können.

45. Die Gleichungen 80)—82) ändern sich, wenn wie in beistehender Fig. 51 beiderseits Stossplatten angebracht sind; in

Fig. 51.



dem durch die Schraffirung angedeuteten Schnitt werden nur Bolzen getroffen, jeder der letzteren ist aber zweimal geschnitten und heissen dieselben daher doppelschnittig. — Bezeichnet
n die Anzahl der zu einer Seite des Stosses ad befindlichen Bolzen,
S die Widerstandskraft eines Bolzens,

P die zu übertragende Kraft,
so ist zu setzen

$$S = \frac{1}{2n} P.$$

Behalten wir im Uebrigen die in der vorstehenden Nummer gewählten Bezeichnungen bei und bedenken, dass die beiden Stossplatten sich nunmehr in die Aufnahme der Kraft P gleichmässig theilen, so erhalten wir

für die grösste Spannung im gestossenen Stabe

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b-d)\,t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

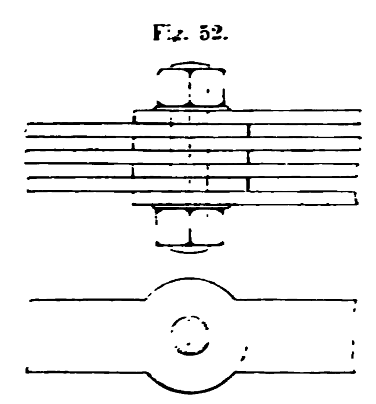
für die grösste Spannung in der Stossplatte

$$\mathfrak{A}' = \frac{\frac{1}{2} P}{(b'-d)\,t'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

für die Schubspannung in den Bolzen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2n} \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

Fig. 52.



Aus letzterer Gleichung folgt in Vergleichung mit Formel 82), dass ein doppelschnittiger Bolzen zweimal so viel Kraft übertragen kann, als ein ebenso starker einschnittiger Bolzen. — Es gibt aber auch 3-, 4- und mehrschnittige Bolzen, welche ebenfalls verhältnissmässig grössere Kräfte übertragen können. So ist in Fig. 52 eine Verbindung von Kettengliedern dargestellt, wo der sechsschnittige Bolzen mit jedem Schnitte je nur $1/6$ der zu übertragenden Kraft aufzunehmen hat.

46. Die gestossenen Stäbe sind nicht blos von rechtwinklicher Querschnittsform, sondern insbesondere kommen Winkel, T-form Doppel-T-form vor; ferner sind an einem Punkte oft mehrere Stäbe gleichzeitig gestossen. — In einem solchen Fall ist jedoch darauf zu achten, dass sämmtliche Bolzen und Stossplatten so vertheilt werden, dass sie durch die angreifende Kraft P je gleichförmig in Anspruch genommen sind. Nennen wir unter dieser Voraussetzung

P die zu übertragende Kraft,

$\mathfrak{w}$ den durch die äussersten Bolzenlöcher verschwächten Querschnitt sämmtlicher an demselben Punkt gestossenen beliebig geformten Stäbe,

$\mathfrak{w}'$ den Querschnitt sämmtlicher durch die dem Stosse zunächst befindlichen Bolzen verschwächten Stossplatten,
$\mathfrak{n}$ die Anzahl der zu einer Seite des Stosses befindlichen Bolzenschnitte (wobei also doppelschnittige Bolzen doppelt zu zählen sind),
d den Durchmesser der gleich stark vorausgesetzten Bolzen,
so ist

grösste Spannung in den gestossenen Stäben

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{\mathfrak{w}} \qquad 86)$$

grösste Pressung in den Stossplatten

$$\mathfrak{A}' = \frac{P}{\mathfrak{w}'} \qquad 87)$$

Schubspannung in den Bolzen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\mathfrak{n}} \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} \qquad 88)$$

Sind die Bolzen nicht gleich dick, so ist zu Bestimmung von $\mathfrak{S}$ in Gleichung 88) für die Grösse $\mathfrak{n} \frac{\pi}{4} d^2$ der Gesammt-Querschnitt des zu einer Seite des Stosses befindlichen Bolzenschnitts $\mathfrak{w}_n$ einzusetzen, wodurch man erhält

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{\mathfrak{w}_n} \qquad 88^a)$$

Wenn die Bolzen oder Stossplatten nicht gleichförmig in Anspruch genommen sind, so muss der Gesammt-Querschnitt in einzelne Abtheilungen zerlegt werden und müssen nach Umständen für jedes einzelne Glied die Gleichgewichtsbedingungen entwickelt werden. Häufig wird aber eine wiederholte Anwendung der Gleichungen 86)—88) zum Ziele führen.

47. Wenn ein Construktionsglied aus mehreren neben einander liegenden Stäben zusammengesetzt ist, so werden dieselben im Allgemeinen nicht an derselben Stelle gestossen sein; der Total-Querschnitt wird also durch den Stoss eines der verbundenen Stäbe zunächst nur eine theilweise Verschwächung erleiden; wenn jedoch der betrachtete Stoss richtig construirt ist (siehe den Schluss von Nr. **44**), so wird die Verschwächung des gestossenen Stabes durch Abzug der Bolzenlöcher vollständig berücksichtigt; dieselben Bolzen werden aber bei den meisten Constructionen auch durch die nicht gestossenen übrigen Stäbe hindurchgehen müssen, und vertheilt sich dann die Verschwächung auf den ganzen Querschnitt.

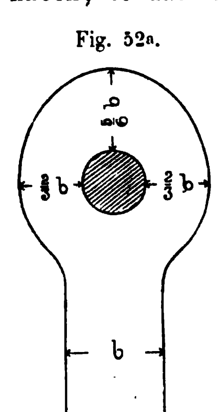
Ist die Ueberplattung eines Stosses ungenügend, so darf für den gestossenen Stab nur derjenige Querschnitt eingeführt

werden, der der Stärke der Ueberplattung — Stossplatten- oder Bolzen-Querschnittsumme — entspricht, während für die übrigen nicht gestossenen Stäbe derjenige Querschnitt berechnet werden muss, welcher durch die dem Stosse zunächst liegenden Bolzen gelegt ist. — Ist gar keine Stossplatte vorhanden, so fällt der gestossene Stab in der Berechnung ganz aus und ist nur der durch die Bolzenlöcher verschwächte Querschnitt der übrigen Stäbe zu rechnen.

Letzterer Fall tritt bei den aus vielen einzelnen Stäben — Flacheisen und Winkeln zusammengesetzten Gurtungen häufig ein, weil die Anbringung der vielen Stossplatten sehr unbequem werden kann; werden jedoch bei zusammengesetzten Stäben Stossplatten angewendet, so darf man bei guten Construktionen annehmen, dass die Stossplatten nach Querschnitt und Bolzenanzahl genügend bemessen sind, und findet die in die Rechnung einzuführende Querschnittfläche des betrachteten zusammengesetzten Construktionsglieds dadurch, dass man von dem Gesammt-Querschnitt sämmtlicher Stäbe die in derselben Ebene befindlichen zahlreichsten Bolzenlöcher abzieht.

48. Bei vorstehenden Betrachtungen war vorausgesetzt, dass die zu verbindenden Stäbe durchweg gleiche Breite und Dicke haben, so dass eine Verschwächung der Stäbe durch die Bolzen nothwendig eintreten musste; diese Verschwächung kann aber dadurch vermieden werden, dass man die Stäbe an den zu verbindenden Enden erbreitet oder verdickt. — Vorstehende Fig. 52 (s. oben) zeigt eine derartige Anordnung, wie sie bei Kettenbrücken üblich ist, und hat man hiebei darauf zu sehen, dass nirgends eine Trennungsfläche möglich ist, welche kleiner als der Stab-Querschnitt wäre.

Fig. 52a.



Anmerkung. Hr. Malberg empfiehlt nach besonders angestellten Versuchen, die Metallbreite um das Bolzenloch mindestens $^2/_3$ der Stabbreite zu nehmen und am Stabende bis auf $^5/_6$ der Stabbreite zunehmen zu lassen (s. Figur 52a).

49. Wenn die gestossenen Stäbe einem gemeinsamen Druck nach ihrer Längenrichtung zu widerstehen hätten, so würde bei der in Fig. 47—49 dargestellten Anordnung die Uebertragung der Kraft ganz in derselben Weise erfolgen, wie bei gezogenen Stäben; anders verhält es sich, wenn die Stäbe stumpf gestossen und mit Stossplatten verbunden sind; wenn nämlich die Enden genau auf einander passen, so kann die Kraft durch direkten Druck ohne Vermittlung der Bolzen übertragen werden. Dieses

genaue Anpassen wird aber in Folge von Mängeln in der Ausführung, sodann insbesondere in Folge von Temperaturänderungen nur unvollständig oder häufig gar nicht vorhanden sein; man wird also auch hier eine genügende Bolzenverbindung nicht missen können und wird dieselbe häufig in derselben Weise wie bei gezogenen Stäben anbringen; diess gilt namentlich von solchen Construktionen, wo ein Theil der Glieder abwechslungsweise auf Zug und Druck in Anspruch genommen ist und wo somit eine beständige Aenderung des geometrischen Zusammenhangs zu befürchten ist. Wo man aber, wie bei ständig belasteten Säulen, auf einen unmittelbaren Contact der gedrückten Theile mit Sicherheit rechnen kann, da wird man die Verbindungsbolzen möglichst verringern, und eben damit die Verschwächung des gestossenen Stabes auf ein Minimum zurückführen.

50. Sehr wichtig und von umfassender Anwendung sind im Brückenbau die Nietverbindungen; es sind desshalb auch sehr vollständige Untersuchungen über die Widerstandsfähigkeit derselben vorhanden.

Der Widerstand der Nietbolzen setzt sich aus der Abscheerungsfestigkeit derselben und der zwischen den verbundenen Stäben herrschenden Reibung zusammen; letztere wird bei warmer Nietung durch das bei der Erkaltung eintretende starke Zusammenziehen in sehr hohem Grade hervorgerufen; schon beim Baue der Britanniabrücke wurden direkte Versuche über den numerischen Betrag dieser Reibung angestellt, indem man den Bolzen so viel Spielraum liess, dass das Verschieben der verbundenen Platten zunächst nur durch die Reibung verhindert werden konnte. — Man fand 1200—1300 Kil. per □Centimeter des Nietbolzen-Querschnitts als Reibungswiderstand, während die absolute Festigkeit des verwendeten Eisens 3776 Kil. per □Centimeter betrug.

Anderseits hat man gefunden, dass eine gewöhnliche, sorgfältig hergestellte warme Niete per Quadrateinheit incl. Reibung einen Widerstand zeigt, welcher der absoluten Festigkeit des verwendeten Eisens (im obigen Falle 3776 Kilo per □Cent.) gleichsteht; wie viel hievon auf Rechnung der Reibung kommt, ist schwer zu beurtheilen, doch wird anzunehmen sein, dass ein Theil der Reibung schon vor dem Eintritt des Bruchs überwunden war.

Ohne jedoch näher untersuchen zu müssen, in welcher Weise der Gesammtwiderstand sich aus der Reibung und der Abscheerungsfestigkeit zusammensetzt, genügt für uns die Thatsache, dass sorgfältig hergestellte warme Nieten per Quadrateinheit ihrer Querschnittfläche einen der absoluten Festigkeit gleichkommenden Widerstand gegen Abscheeren (incl. Reibung) zeigen. — Mit Rücksicht auf die in der Ausführung nicht zu vermeidenden Un-

genauigkeiten haben einzelne Ingenieure nur $^3/_4$ oder $^2/_3$ der absoluten Festigkeit für den Nietenwiderstand angenommen; letzterer Werth erscheint aber bei guter Ausführung offenbar zu gering; wenn man ausserdem bedenkt, dass das Nieteisen gewöhnlich besserer Qualität ist, als das verbundene Walzeisen, so wird für sehr sorgfältige Ausführung*) der per Quadrateinheit berechnete Nietenwiderstand $\mathfrak{C}$ der absoluten Festigkeit $\mathfrak{A}$ der zu verbindenden Bleche gleich zu setzen sein; im Uebrigen aber muss es jedem Construkteur überlassen sein, das Verhältniss $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ dem vorliegenden Falle anzupassen; dieses Verhältniss $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ dürfte zwischen $^3/_4$ und 1 variiren.

Einige Ingenieure halten die warme Nietung für unzuverlässig, annehmend dass die Nieten nach dem Erkalten trotz des Stauchens die Nietlöcher nicht mehr vollständig ausfüllen, und wenden kalt eingetriebene, genau abgedrehte (theilweise schwach konische) Nietbolzen an, von welchen ein vollkommen dichter Verschluss und ein ganz gleichmässiger Widerstand erwartet wird; anderseits ist aber die Reibung bei kalter Nietung entschieden geringer und wird auch hier die Summe beider Widerstände den Betrag der absoluten Festigkeit (oder theoretischen Abscheerungsfestigkeit) nicht übersteigen, und indem auch hier Unvollkommenheiten in der Ausführung nicht zu vermeiden sind, so glauben wir, dass auch bei kalter Nietung im Allgemeinen kein grösserer Nietenwiderstand gerechnet werden darf. — Die richtigste Anwendung findet die kalte Nietung wohl da, wo die warme Nietung anderer Umstände halber und insbesondere wegen zu grosser Dicke der zu verbindenden Stücke nur mangelhaft und ungenügend ausgeführt werden kann.

51. Die obigen allgemeinen Formeln 80)—88) finden auch für Nietenverbindungen unbedingte Anwendung und haben nur insoweit eine nähere Präcisirung erfahren, als wir für das Verhältniss $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ die Grenzen $^3/_4$ bis 1 in der vorhergehenden Nummer angegeben haben.

Bei der ungemein grossen Anzahl Nieten, welche bei den von gewalztem Schmiedeisen hergestellten Construktionen angewendet werden, ist aber ein richtiges Verhältniss zwischen dem Durchmesser der Nieten und ihrer Zahl und Entfernung von grosser Wichtigkeit.

Denken wir uns den sehr einfachen Fall, dass die Nieten, wie in Fig. 53 dargestellt, nach der Längenrichtung der zu ver-

*) Anmerkung. Unter sorgfältiger Ausführung verstehen wir, dass die Löcher der einzelnen Blechlagen genau auf einander passen und die Nieten eine solche Dicke haben, dass sie in Folge des Stauchens das Loch ganz ausfüllen.

bindenden Platten je direkt hinter einander angebracht sind, so kann man sich, wie in den Formeln 80)—85) vorausgesetzt ist, die Platte in einzelne Längenstreifen von der Breite b zerlegt denken; bezeichnet nun im Uebrigen

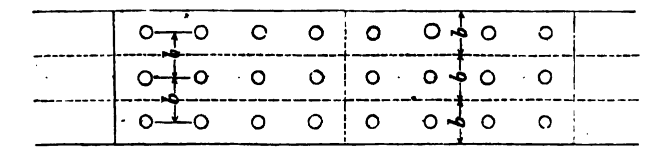
P die von einem Streifen zu übertragende Kraft,
t die Dicke des gestossenen Blechs,
n die Anzahl der hinter einander befindlichen Nieten,
d den Durchmesser der Nieten,

so folgt für einseitige Stossplatten und somit einschnittige Nieten nach Gleichung 80) und 82)

Spannung im getossenen Stab

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{(b - d)\,t} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{I.}$$

Fig. 53.



Schubspannung in den Nietbolzen

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{n} \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{II.}$$

woraus durch Elimination von P folgt

$$(b - d)\,t = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}\, n \,.\, \frac{\pi}{4} \,.\, d^2 \quad \dots\dots \quad 89)$$

und gibt diese Gleichung nach d aufgelöst

$$d = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}} \,.\, \frac{2}{n\pi} \left\{ - t \pm \sqrt{\frac{n\pi b t}{\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}}\right)} + t^2} \right\} \,. \quad 90)$$

Dieselben Gleichungen 89) und 90) gelten für beiderseitige Stossplatten und somit doppelschnittige Nieten, wenn man für n durchweg den Werth 2n einsetzt; somit ist für dieselben

$$(b - d)\,t = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}\, 2n\, \frac{\pi}{4} \,.\, d^2 \quad \dots\dots \quad 89^a)$$

woraus

$$d = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}} \,.\, \frac{1}{n\pi} \left\{ - t \pm \sqrt{\frac{2n\pi}{\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{S}}\right)}\, b t + t^2} \right\} \,. \quad 90^a)$$

Wenn man also ein bestimmtes Verhältniss $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{A}}$ annimmt, so

kann man nach den Gleichungen 89)—90*) stets b, d oder t so bemessen, dass die gestossenen Platten und die Nietbolzen gleich in Anspruch genommen sind und ist bei Einhaltung der hiedurch bedingten Verhältnisse die grösste Materialersparniss möglich.

52. Wenn man in Gleichung 89) den Nietendurchmesser als gegeben betrachtet, so wird die Breite b desto grösser, je kleiner die Blechdicke t ist; je grösser aber b bei gegebenem Bolzendurchmesser ist, desto mehr nähert sich der Bruch $\frac{b-d}{b}$ der Einheit, desto geringer ist die Verschwächung des Blechs. Abgesehen davon, dass die einzelnen Dimensionen durch die verschiedenartigsten Umstände bedingt sein können, ist die unbegrenzte Verringerung des Verhältnisses $\frac{t}{d}$ durch besondere Rücksichten verhindert.

Ist nämlich $\frac{t}{d}$ sehr klein, so kann die Fläche d.t, mit welcher der Nietbolzen gegen die Lochwandung anliegt, für den zu übertragenden Druck zu gering sein; Hr. Ingenieur Gerber hat bei direkten Versuchen den Widerstand der Fläche dt $2^1/_2$ mal bis $3^3/_4$ mal so gross gefunden, als die absolute Festigkeit desselben Materials beträgt; nimmt man den geringeren dieser Werthe an und setzt die Schubfestigkeit (Abscheerungsfestigkeit) der Bolzen gleich der absoluten Festigkeit des fraglichen Materials, so erhält man, vollständige Anstrengung des Bolzens vorausgesetzt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{für einschnittige Nieten}\\ \quad 2{,}5\,dt \geqq \frac{\pi d^2}{4}\\ \text{für doppelschnittige Nieten}\\ \quad 2{,}5\,dt \geqq 2\,.\,\frac{\pi d^2}{4}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

Nach dieser Regel wäre bei doppelschnittigen Nieten die zwischen den beiden Schnitten befindliche Blechdicke wenigstens 0,63 der Nietbolzendicke zu nehmen, es scheint diess aber mehr als ausreichende Blechdicken zu ergeben, wie auch Hr. Gerber nach Obigem theilweise eine höhere Widerstandskraft gefunden hat; jedenfalls ist darauf aufmerksam zu machen, dass bei Nietbolzen, deren Festigkeit nicht vollständig in Anspruch genommen ist, die Blechdicke entsprechend schwächer gehalten werden darf.

Dünnere Blechplatten haben den Vortheil, dass wenn mehrere Blechlagen nebst Stossplatten sich übereinander befinden, die Länge des Nietbolzens nicht zu gross wird; es soll die Länge des Nietbolzens zwischen den Köpfen nicht mehr als 15—18 Centim.

betragen; Nieten von grösserer Länge zerreissen häufig beim Erkalten und ist zu fürchten, dass eine Beschädigung auch dann eingetreten ist, wenn kein Bruch sichtbar ist; auch zeigt die Erfahrung, dass zu lange Nieten sich nicht mehr gehörig stauchen und somit das Nietloch nicht ausfüllen. — Regel ist, den Nieten wo möglich unter 10 Cent. und höchstens 15 Cent. Länge zwischen den Köpfen zu geben.

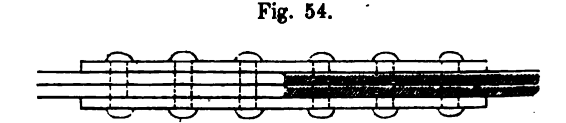
Wir wollen an dem Beispiele von zwei übereinander liegenden Blechplatten die Anwendung der vorstehenden Regeln zeigen und zugleich die etwa anzuwendenden Stossverbindungen bezüglich ihrer Festigkeit vergleichen.

Die Bleche seien durch Nietreihen parallel ihrer Längenrichtung verbunden, so dass wir einen Streifen von der Breite der Nietendistanz als Maassstab der Berechnung herausnehmen können. Wir setzen

die Plattendicke $t = 1,5$ Cent.,
die seitliche Distanz der Nieten (Blechbreite) $b = 15$ Cent.
die Zahl der hintereinander befindlichen Nieten $n = 3$,
endlich sei in den Formeln 89)—90ᵃ) $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 1$.

Fall 1. Die beiden Blechplatten sind, wie in Fig. 54 gezeichnet, an demselben Punkte gestossen. — Die beiderseits ange-

Fig. 54.



brachten Stossplatten müssen je dieselbe Dicke t erhalten, wie die gleich breiten gestossenen Platten; die Nieten sind doppelschnittig, somit findet man als günstigsten Bolzendurchmesser nach Gleichung 90ᵃ), indem die doppelte Plattendicke in die Formel eingesetzt werden muss,

$$d = \frac{2}{6\pi}\left\{-3 \pm \sqrt{6 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 15 + 3 \cdot 3}\right\}$$

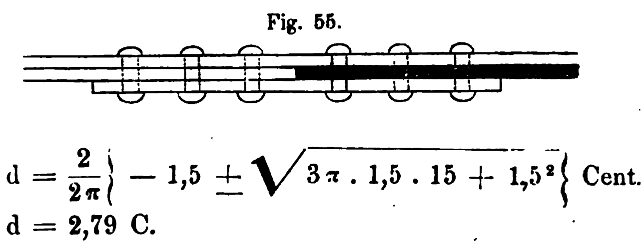
$$d = 2,79 \text{ Cent.}$$

Die Verschwächung des Stabs beträgt $\frac{d}{b} = \frac{2,79}{15} = \frac{1}{5,37}$ und der in die Rechnung einzuführende verschwächte Querschnitt ist $\frac{b-d}{b}\,\omega = 0,814\,\omega$, wenn der unverschwächte Querschnitt des Stabes mit ω bezeichnet wird.

Fall 2. Von den beiden Blechplatten sei, wie in Fig. 55 dargestellt, nur die eine gestossen und durch eine einseitige

Stossplatte von gleicher Dicke t ersetzt. — Die Nieten sind einschnittig und Formel 90) gibt als günstigsten Bolzendurchmesser

Fig. 55.



$$d = \frac{2}{2\pi} \left\{ -1{,}5 \pm \sqrt{3\pi \cdot 1{,}5 \cdot 15 + 1{,}5^2} \right\} \text{ Cent.}$$

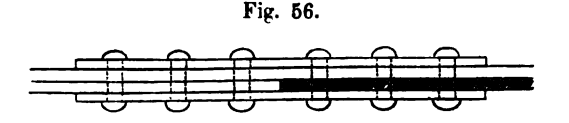
$$d = 2{,}79 \text{ C.}$$

wie in Fall 1., wie hätte zum Voraus angenommen werden dürfen, da die einschnittigen Nieten des 2. Falls die Hälfte der doppelschnittigen Nieten des 1. Falls auszuhalten haben. Die Verschwächung der gestossenen Platte beträgt wie oben $\frac{1}{5{,}37}$; da dieselben Bolzen auch das nicht gestossene Blech durchdringen, so ist diese Verschwächung für den ganzen Querschnitt der doppelten Blechlage zu nehmen.

Die von der gestossenen Platte ausgehende Kraft P wird aber nach Umständen nicht vollständig auf die Stossplatte übertragen, sondern ein Theil dieser Kraft geht in die nebenliegende nicht gestossene Platte über. — Direkte Versuche beim Bau der Britanniabrücke haben ergeben, dass unter bestimmten Verhältnissen die Hälfte der Kraft P in die Stossplatte, die andere Hälfte in die nicht gestossene Platte überging, welch letztere am Stosse bis zu $^3/_2$ P auszuhalten hatte. Die Verschwächung am Stosse ist desshalb eine wesentlich grössere, als vorhin berechnet wurde, und deutet diess darauf hin, dass man einseitige Stossplatten länger machen muss als beiderseitige, um eine gleichförmige Vertheilung der Kräfte zu erzielen.

Fall 3. Wie in Fig. 56 gezeichnet, sei nur ein Blech gestossen, aber mit beiderseitigen Stossplatten versehen. — Die

Fig. 56.



durchlaufende Platte ist durch dieselben Nieten verschwächt, wie die gestossenen Platten, und hat an jedem Bolzen dieselbe grösste Spannung zu erleiden, welche die gestossenen Platten an den äussersten Bolzen auszuhalten haben. Die Stossplatten und Nieten dienen als Ersatz für die eine Plattenlage und haben die beiden

Stossplatten je die halbe Dicke der gestossenen Platten. Der günstigste Nietbolzendurchmesser berechnet sich nach Gleichung 90ª) wie folgt:

$$d = \frac{2}{6\pi}\left\{-1,5 \pm \sqrt{6\pi \,.\, 1,5 \,.\, 15 + 1,5^2}\right\} \text{ Cent.}$$

$$d = 2,03 \text{ Cent.}$$

Die Verschwächung des Stosses beträgt $\frac{2,03}{15} = \frac{1}{7,39}$ und der in die Rechnung einzuführende Querschnitt ist $\frac{12,97}{15} = 0,865$ des unverschwächten Querschnitts ω. — Wir machen hier darauf aufmerksam, dass es keineswegs genügt hätte, den Nieten-Querschnitt halb so gross zu machen, wie in den Fällen 1. und 2.; gerade weil die Verschwächung im Falle 3. geringer ist, als in den beiden ersten Fällen, so müssen auch die Nieten, welche dieselbe Kraft auszuhalten haben, verhältnissmässig stärker sein.

Wenn wir zunächst von dem Fall der einseitigen Stossplatte absehen, so ist der Verbrauch an Stossplatten und Nietengewicht in den Fällen 1. und 3. derselbe. Um hierin zu sparen, hat Stephenson beim Bau der Britanniabrücke folgende Anordnung gewählt:

Fall 4. Wie aus Fig. 57 ersichtlich, wechseln die Stösse ab und sind beiderseits Stossplatten angebracht; die Stösse sind

Fig. 57.

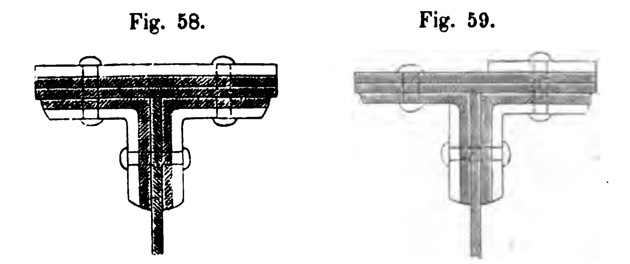


sich aber so nahe gerückt, dass eine etwas längere Stossplatte je 2 Stösse überdeckt. — Die Stossplatten erhalten die halbe Blechstärke als Dicke und in einem Schnitt in der Mitte der Stossplatten haben Blechplatten und Stossplatten je $^1/_4$ der Kraft zu übertragen. — Die Verschwächung des Stosses ist dieselbe wie im Falle 3.; aber es ist gegenüber letzterem Falle nur $^3/_4$ des Gewichts an Nieten und Stossplatten nothwendig, und zudem ist die Doppelblechlage auf eine grössere Länge von Deckplatten frei und zu Befestigung anderer Construktionsglieder geeigneter.

53. Wie aus der vorhergehenden Nummer des Näheren nachgewiesen, sind die Stossplatten, wenn thunlich, beiderseits anzubringen. Diess hat bei Querschnitten, welche aus vielen Stücken zusammengesetzt sind, Schwierigkeiten, zumal für die Stösse der Winkel; in nachstehender Fig. 58 sind die beiderseitigen Stossplatten für den gleichzeitigen Stoss zweier Winkel und

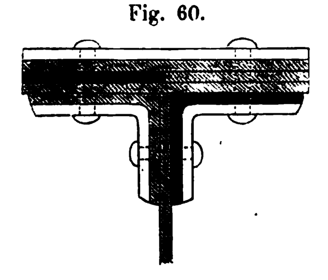
in Fig. 59 für den Stoss eines Winkels eingezeichnet; letztere Anordnung wird ihrer Unregelmässigkeit wegen nicht gerne gewählt werden, während der gleichzeitige Stoss beider Winkel ver-

Fig. 58. Fig. 59.



hältnissmässig stärkere Nieten erfordert (wie bei Fall 1. in Nr. **52**), wenn man nicht die in Fig. 57 gezeichnete Anordnung anwendet; nur selten wird man in der Lage sein, durch Zerlegung einer Kopfblechlage, wie in Fig. 60 angedeutet, beiderseitige Stossplatten in symmetrischer Weise anzuwenden und sich zugleich den Vortheil zu wahren, dass die doppelschnittigen Bolzen nur je eine Blechdicke zu ersetzen haben. — Letztere Anordnung zeigt auch schon ein Beispiel von dem Aufeinanderpacken von 6 Blechlagen, was bei stärkeren Blechen besondere Vorsicht in der Ausführung erheischt.

Fig. 60.



Zur Vereinfachung der Construktion lässt man daher in vielen Fällen die Stossplatten ganz weg und lässt die einzelnen Blechlagen einander in der Weise überbinden, dass dieselben einander gegenseitig als Stossplatten dienen; selbstverständlich dürfen aber dann von m neben einander liegenden Stäben nur m—1 Stäbe als tragend gerechnet werden, und ist auch von diesen m—1 Stäben die Verschwächung durch die Nietlöcher noch in Abzug zu bringen. — Wenn eines der Glieder stärker ist als die andern, so müsste man gerade diesen stärkern Stab vom Gesammt-Querschnitt in Abzug bringen, wenn man nicht die Vorsicht gebraucht, diesen stärkern Stab an seinem Stosse wenigstens theilweise durch eine Stossplatte zu ergänzen. — Wenn man, wie in Fig. 61 angedeutet, mit den Stössen regelmässig abwechselt, so müssen die zwischen 2 Stössen befindlichen Nieten gerade ausreichen, einen der gestossenen Stäbe zu ersetzen; diese Nieten sind blos als einschnittige zu rechnen; es hat diess hier weniger Nachtheil, da man meist Raum genug hat, eine grössere Anzahl schwächerer Nieten hinter

einander anzubringen. — Ganz ähnlich mussten auch in Fig. 57 die mittleren 3 Nieten der Stärke eines der gestossenen Bleche

Fig. 61.

entsprechen, doch genügte im letztern Falle für die doppelschnittigen Nieten zusammen die Hälfte des zu ersetzenden Blech-Querschnitts.

54. Wir stellen im Folgenden die für Stösse der Nietenverbindungen gewonnenen Sätze übersichtlich zusammen:

1) Wenn ein Stoss mit einer Stossplatte bedeckt ist, welche selbst genügend stark und mit hinreichend vielen Nieten versehen ist, so bestimmt sich die Verschwächung des Stosses dadurch, dass man in einem Schnitte zunächst dem Stossplattenrande die Nietenlöcher vom Gesammt-Querschnitt in Abzug bringt.

2) Um zu untersuchen, ob die Stossplatten genügend stark und mit hinreichend vielen Nieten versehen sind, dienen
   für flache Bleche mit einschnittigen Nieten: Gleichung 80)—82),
   für ditto Bleche mit zweischnittigen Nieten: Gleichung 83)—85),
   für beliebige Querschnitte: Gleichung 86)—88).

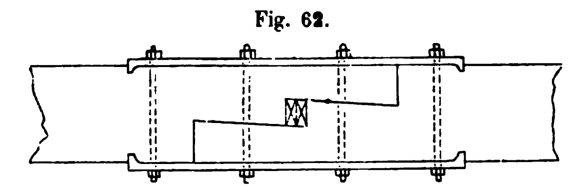
3) Zur Bestimmung der günstigsten Materialanordnung für die Stösse flacher Blechplatten dienen die Gleichungen 89) und 90), beziehungsweise 89ª) und 90ª), und zwar bestimmt sich insbesondere der Nietendurchmesser nach Gleichung 90) und 90ª).

4) Wenn keine Stossplatten angewendet werden, so lässt man die einzelnen Stäbe sich gegenseitig überbinden und sind dann von m neben einander liegenden Stäben je nur m—1 als wirksam zu rechnen (s. Fig. 61), und zwar sind von den m—1 Stäben die in demselben Querschnitt zunächst dem Stosse befindlichen Nietenlöcher gleichfalls in Abzug zu bringen.

55. Stösse von Hölzern, welche auf Zug in Anspruch genommen sind, sind schwierig befriedigend herzustellen: Wenn man die Verbindung blos mit Eisenplatten und Bolzen herstellen will, so wird nur ein kleiner Theil des Holzquerschnitts von denselben getroffen, und beide werden wirkungslos, wenn in Folge des Austrocknens und Zusammengehens der Hölzer die Anschlussflächen sich nicht mehr vollständig berühren. Durch Nachziehen der Bolzen ist man zwar im Stande, eine Reibung zwischen Platten und Holz hervorzurufen, diese ist aber zu unbedeutend und unsicher zu Uebertragung der Zugkräfte.

Beistehende Figur 62 zeigt einen Stoss, wo das Ineinandergreifen des Holzes durch Deckplatten unterstützt ist, es ist jedoch auf Uebertragung der dem Holzquerschnitt entsprechenden Zug-

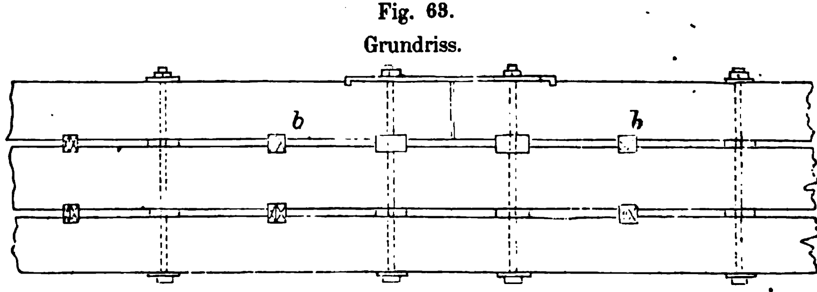
Fig. 62.



kraft nur in beschränktem Masse zu nehmen, und thut man besser, Gurtungen, welche auf Zug in Anspruch genommen sind, aus mehreren Hölzern zusammenzusetzen, deren Stösse abwechseln, analog der Anordnung der Nr. **53** für Gurtungen aus Eisen, welche aus vielen Stücken zusammengesetzt sind.

Fig. 63.

Grundriss.

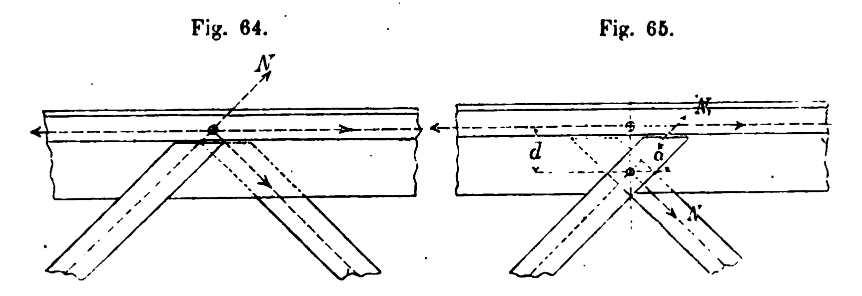


Eine solche Construktion zeigt Fig. 63. Es sind 3 horizontal neben einander liegende Hölzer, welche die Gurtung bilden, der Stoss ist zwar durch Platten verstärkt, die Uebertragung des Zugs im gestossenen Theil erfolgt vorzugsweise mit Hülfe der Keile b der Art, dass in jedem Querschnitt die Gurtung als nur aus 2 Hölzern bestehend zu betrachten ist. Durch Nachziehen der Keile ist man in den Stand gesetzt, die vollständige Uebertragung des Zuges von dem gestossenen Theil der Gurtung auf die durchlaufenden Hölzer zu erhalten.

Bei Gurtungen aus Holz, welche auf Druck in Anspruch genommen sind, genügt es, die gestossenen Hölzer sorgfältig zusammen zu passen, häufig werden noch Blechplatten oder gusseiserne Schuhe dazwischen gelegt, um das Einbeissen der Hirnflächen in einander zu vermeiden.

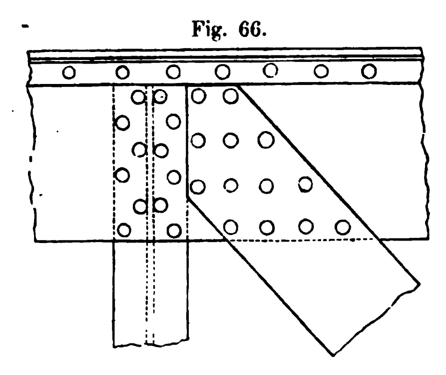
56. Wenn mehrere Glieder an einem Knotenpunkte vereinigt sind, so ist danach zu trachten, dass die Axen der Mittelpunkte für Druck oder Zug sämmtlicher im Knotenpunkt sich treffenden Construktionsglieder sich in einem Punkte schneiden. Handelt es sich beispielsweise um die Verbindung einer Zug- und einer Druckstrebe mit einer Gurtung, so sollen die Axen der Streben sich im Druckmittelpunkt der Gurtung (welcher sehr annähernd mit dem Schwerpunkt zusammenfällt) vereinigen, vergl. Fig. 64.

Fig. 64. Fig. 65.



Liegt der Durchschnittspunkt O beider Streben nicht im Schwerpunkt der Gurtung, sondern in einem Abstand d von demselben entfernt, so ist die Uebertragung der beiden Kräfte N und N_1 auf die Gurtung nur durch ein Gegenpaar möglich, dessen Moment $= d\,(N + N_1) \cos \alpha$, und wird durch dieses Gegenpaar die Gurtung weiterhin auf relative Festigkeit in Anspruch genommen, die grösste Spannung vermehrt, und eine Vergrösserung des Gurtungsquerschnitts nöthig.

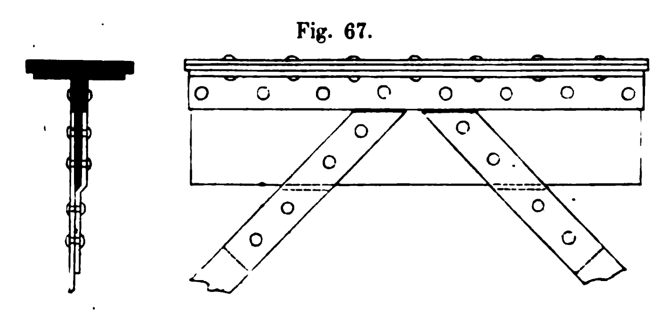
Fig. 66.



Was die Befestigung solcher Gitterstäbe an eine durchlaufende Gurtung anbelangt, so muss die Nietenzahl dem anzuheftenden Stabe entsprechend sein; sind z. B., wie diess meist der Fall ist (s. Fig. 66) die Nieten nur einschnittig, so muss der Querschnitt der Nieten zusammen mindestens so gross sein, als der durch die Nietbolzen

verschwächte Stab, so dass man wo möglich mehrere Nieten hinter einander anbringt. Einige Ingenieure haben auch bei Gitterstäben

Fig. 67.



doppelschnittige Nieten dadurch hergestellt, dass sie die Wandbleche mit besonderen Beilagen umfassten (s. Fig. 67).

Fig. 68.

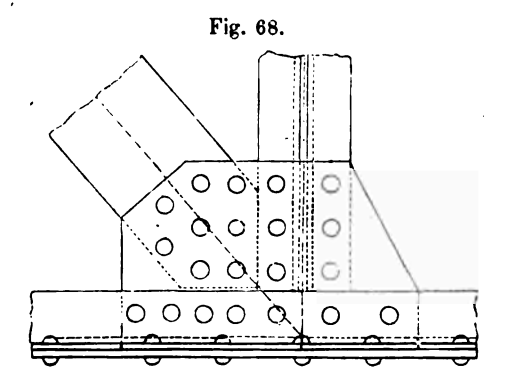
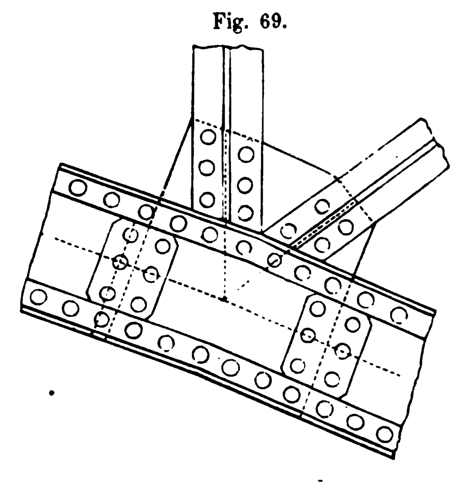


Fig. 69.



Die Anordnung der Fig. 66 und 67 erfordert sehr breite Stehplatten der Gurtungen, um für die dem Querschnitt der Gitterstäbe entsprechenden Nietbolzen Platz zu schaffen.

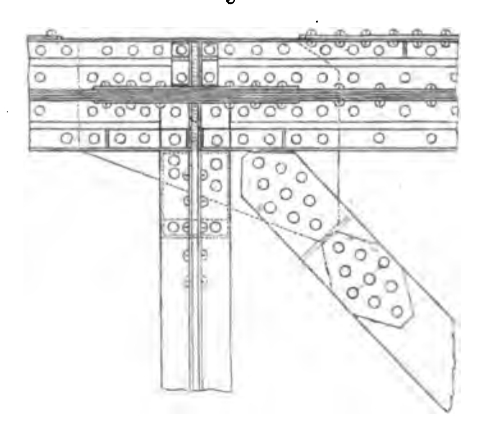
Sind solche breite Wandbleche nicht vorhanden, so benutzt man in den Knotenpunkten besondere Eckplatten, welche die Gitterstäbe aufnehmen und ihrerseits an die Gurtungen befestigt sind (s. Fig. 68). Die Abmessungen dieser Eckplatten müssen den für Stossplatten der Nr. **44**—**47** aufgestellten Regeln entsprechen, mit den Gurtungen müssen dieselben mit so viel Nieten verbunden sein, als den in den Gitterstäben wirkenden Kräften entspricht. Diese Ecklatten vermehren in gleicher Weise, wie die Stossplatten das todte Gewicht der

Eisenconstruktionen, und muss man desshalb suchen, die Dimensionen derselben zu reduciren, indem man die Nieten möglichst nahe beisammen gruppirt. Bei kleineren Brücken ist es besser, dieselben zu vermeiden, und die Gurtungen mit Stehplatten zu versehen.

Eine andere Anordnung zeigt Fig. 69, wo die Eckplatte zugleich einen Bestandtheil der Gurtung bildet, wesshalb Stossplatten zwischen den Eckplatten und den Wandplatten der Gurtung nicht fehlen dürfen. Diese Anordnung wird namentlich angewendet, wenn die Gurtung am Knotenpunkt nicht gerade fortläuft, wie bei Bogenbrücken, oder bei gekrümmten Gurtungen von Fachwerkbrücken, wo das Wandblech ohnediess gestossen werden müsste.

Eine Kombination einer Eckplatte mit Laschenbefestigung der Gitterstäbe ist angewendet bei der Isarbrücke in München, construirt von Ingenieur Gerber. Fig. 70 zeigt die Anordnung,

Fig. 70.

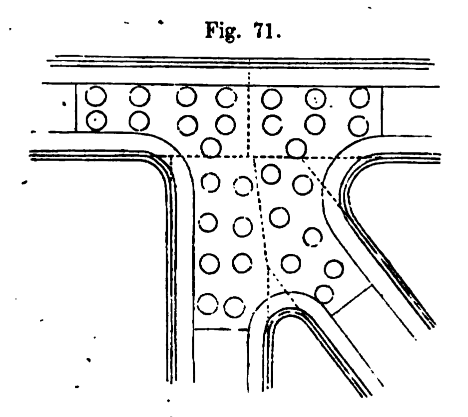


und dient die Eckplatte hier zugleich als Stossplatte für die Gurtung. Der Gitterstab liegt mit der Eckplatte in gleicher Ebene und ist mit derselben durch Laschen verbunden. Die pyramidale Anordnung der Nieten hat den Zweck, die Verschwächung des Gitterstabs durch die Bolzenlöcher auf ein Minimum zu bringen, indem nach Nr. **44** die grösste Verschwächung des Stabes an der äussersten Nietreihe eintritt, wo der durch die Durchbohrung verschwächte Stab noch den vollen Zug auszuhalten hat.

Treffen an einem Knotenpunkt mehrere breite Stäbe (Bleche) zusammen, so erhalten sie gewöhnlich gemeinsame Stossplatten. Fig. 71 stellt einen derartigen Stoss dar, wie er bei schmiedeisernen Bogenbrücken angewendet wird. Man sieht oft eine grosse Nietenanzahl auf einen Knotenpunkt vereinigt, indem die

Gesammtzahl der Nietenschnitte (doppelschnittige Nieten doppelt gerechnet) dem durch die Nietenlöcher verschwächten Querschnitt sämmtlicher am Knotenpunkt sich vereinigenden Glieder mindestens gleich sein muss.

Fig. 71.



Amerikanische Ingenieure geben häufig bei seitlicher Befestigung von Gitterstäben an die Gurtungen der Verbindung durch Bolzen den Vorzug vor der Vernietung, und zwar wenden dieselben nur einen einzigen Bolzen an, der sämmtliche im Knotenpunkt sich kreuzende Glieder fasst. Es ist nicht zu läugnen, dass ein solcher einzelner sorgfältig abgedrehter Bolzen in ein ebenso sorgfältig gebohrtes Loch mit grosser Genauigkeit passt, und die Bedingung, dass die Axen sämmtlicher Glieder eines Knotenpunkts sich in einem Punkte schneiden, vollständig erreicht werden kann.

Fig. 72.

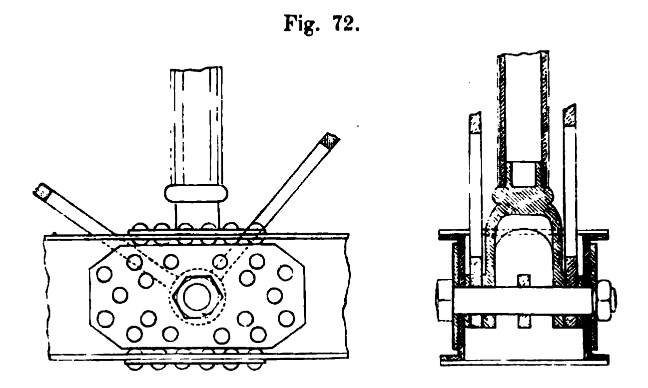


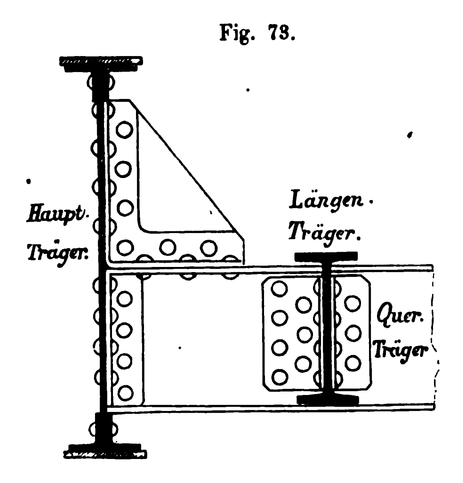
Fig. 72 zeigt einen solchen Knotenpunkt, es sind hiebei an den Stellen, wo der Bolzen durch die schwachen Wandbleche der

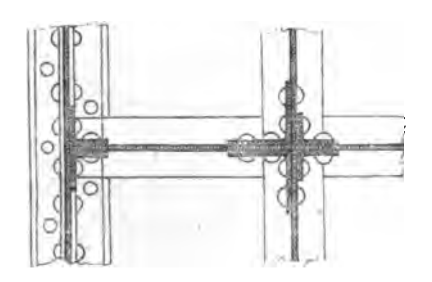
Gurtung durchgeht, letztere durch angenietete Laschen verstärkt (vergl. Nr. **52.**)

Bei Anwendung solcher Bolzen ist auf die Reibung nicht zu rechnen, und nehmen die amerikanischen Construkteure, wohl auch mit Rücksicht auf relative Inanspruchnahme der Bolzen, desshalb die im Bolzen herrschende zulässige Schubspannung nur zu 420 Kil. pro □Centim. an, wenn die absolute Spannung des Eisens auf 700 Kil. pro □Centim. normirt ist. Die Verbindung der Knotenpunkte durch einen Bolzen hat noch den Vortheil leichterer Aufstellung der Träger, indem Vernietungen auf der Baustelle möglichst vermieden werden.

57. Eine besondere Besprechung erfordert noch die seitliche Befestigung von Construktionstheilen: der Längenträger an die Querträger und der letztern an die Brückenträger.

Fig. 73.





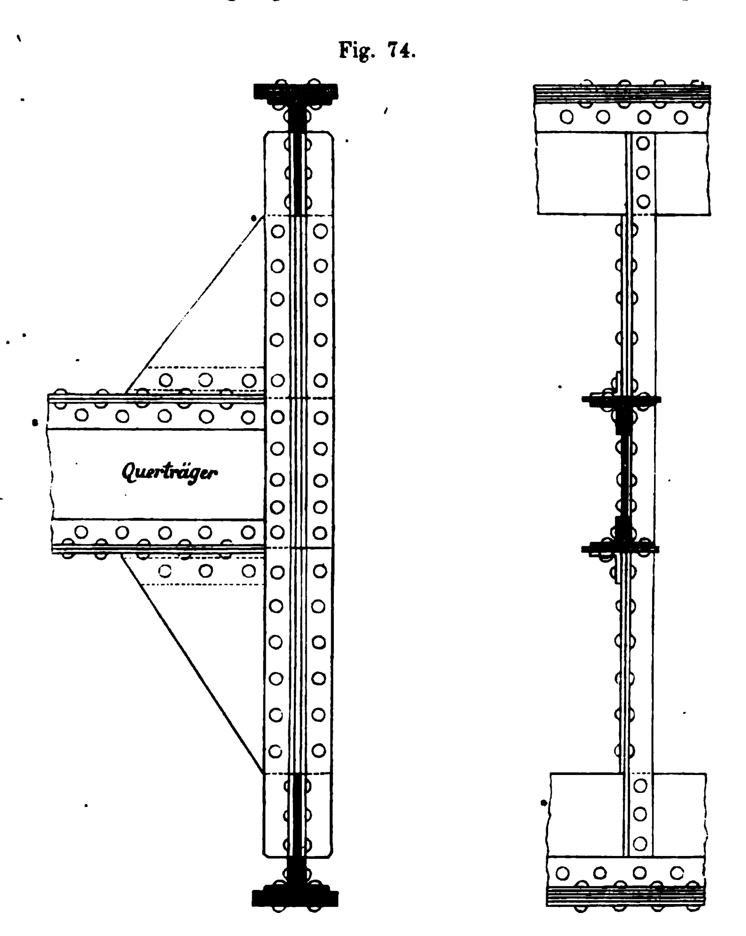
Damit die Hauptträger durch die seitlich angreifenden Hülfsträger nicht auf Torsion in Anspruch genommen sind, soll die Resultante der seitlich angreifenden Kräfte durch die Axe des Hauptträgers gehen. Diese Bedingung wird am einfachsten dadurch erreicht, dass die Hülfsträger oben auf den Gurtungen der Hauptträger aufliegen, oder von unten an dieselben angehängt sind.

Gewöhnlich sind aber diese Träger seitlich befestigt, und ist darauf zu sehen, dass die Anschlussfläche möglichst nahe an der Trägeraxe sich befinde.

Fig. 73 zeigt die Befestigung eines Längenträgers an den Querträger und des letzteren an den Hauptträger, wie solche gewöhnlich vorkommt. Es sind einschnittige Nieten vorhanden, deren Querschnitt der jeweiligen Vertikalkraft entspricht. Die Längenträger liegen auf den Flantschen der Querträger nicht auf, die Querträger reichen bis zum Wandblech des Hauptträgers, somit beinahe bis zur Trägeraxe.

Bei Gitterbrücken greifen die Querträger entweder direkt an der Gurtung an, und sind in diesem Fall an das vertikale Stehblech derselben befestigt, wie im obigen Beispiel, oder benützt man zu der Befestigung die vertikalen Streben. In Fig. 74 ist

Fig. 74.



der Querträger seitlich an die Vertikalständer angenietet mit einschnittigen Nieten: Die Vertikalständer fassen das vertikale Wandblech der Gurtung zwischen sich, und die Uebertragung der Last des Querträgers auf die Axe des Hauptträgers ist vollständig erreicht.

Bei Hauptträgern mit Doppelwänden (Kastenträgern) können häufig die Querträger direkt nur an dem innern Träger befestigt werden. Damit in Folge dessen der innere Träger nicht stärker belastet werde, als der äussere, sind beide durch eine steife Wand,

welche die Fortsetzung des Querträgers bildet, zu verbinden. Einen solchen Fall zeigt Fig. 75. Der Querschnitt der Nieten, mit denen die Verbindungsplatte an den beiden Wandplatten der Gurtung befestigt ist, soll der vom Querträger auf die Gurtung zu übertragenden Last entsprechen, und soll nicht darauf gerechnet werden, dass die Last durch direktes Aufliegen des Querträgers auf der Gurtung übertragen werde.

Fig. 76.

Fig. 75.

Figur 76 stellt die an der Rheinbrücke in Mainz angewendete Construktion dar. Die Querträger sind an den Vertikalständern aufgehängt, welche die Gurtungen vollständig zwischen sich fassen. Eine einseitige Belastung der Gurtungen ist hiedurch vollständig ausgeschlossen.

Dritter Abschnitt.

Bestimmung der Vertikalkräfte und der Angriffsmomente.

§. 6. Frei aufliegender Träger.

58. Wenn ein Träger auf zwei Endpunkten frei aufliegt, so werden sämmtliche Gewichte nach dem Hebelgesetz auf die beiden Auflager übertragen und können daher die Auflagerdrücke stets bestimmt werden, sobald das Gesetz der Belastung bekannt ist.

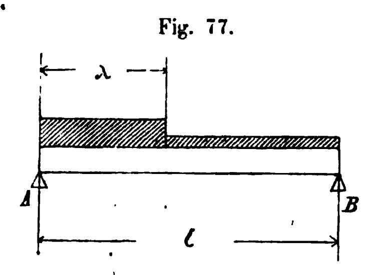
Das Eigengewicht einer Brücke oder eines Trägers dürfen wir auf die ganze Länge gleichmässig vertheilt annehmen, und bezeichnen wir dasselbe, auf die Längeneinheit reducirt, mit p. — Die über eine Brücke sich bewegende zufällige Last kann zwar auf ganz verschiedene Weise auf der Brücke vertheilt oder auch auf einzelnen Punkten derselben concentrirt sein; sobald aber mehrere Lastpunkte vorhanden sind, hauptsächlich aber, wenn, wie bei grösseren Eisenbahnbrücken, die Axlasten in gegebenen Entfernungen einander folgen, combiniren sich deren Einwirkungen der Art, dass man einen grösseren oder kleineren Theil des Brückenträgers als gleichmässig belastet annehmen darf, ohne bei der Berechnung einen merklichen Fehler zu begehen; eine nähere Untersuchung über die Grösse der für concentrirte Gewichte zu substituirenden per Längeneinheit berechneten gleichförmigen Last wird an seinem Orte angestellt werden.

Diess vorausgesetzt, denken wir uns die Aenderung in der Belastung dadurch dargestellt, dass die per Längeneinheit berechnete Ueberlast k von einem Brückenende zum andern vorschreitet, so dass dieselbe schliesslich die ganze Brückenöffnung bedeckt. — In Folge dieser Annahme ist ein beliebiges Fragment der Brückenlänge, insoweit es ausser dem Eigengewicht noch eine Ueberlast zeigt, mit einem Gewichte von $p + k$ per Längeneinheit behaftet; diess ist zugleich die grösste per Längeneinheit eintretende Totallast $q = p + k$, welche auf die ganze Brückenlänge ausgedehnt, die grösste denkbare Belastung der Brücke darstellt. —

Wir werden diese Art der Belastung im Allgemeinen den späteren Berechnungen zu Grunde legen und seltener concentrirte Lasten in Anwendung zu bringen haben.

59. Die Annahme der gleichförmigen Vertheilung von Eigengewicht und Ueberlast lässt eine Reihe wichtiger Eigenschaften der balkenförmigen Träger zur Anschauung kommen. — Die Weite einer Brückenöffnung A B sei mit l bezeichnet; ein Stück der

Fig. 77.



Brücke von der Länge λ sei mit $q = p + k$, der Rest blos mit dem Eigengewicht p belastet; da die Länge λ noch ganz willkürlich ist, so sind in diesem Falle alle in Betracht zu ziehenden Belastungen der Brücke inbegriffen. — Wir bestimmen zunächst die Auflagerdrücke A und B. Es ist nach dem Hebelgesetz, nach Gleichung 4) der Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{lp}{2} + \lambda k \frac{2l - \lambda}{2l} \\ B &= \frac{lp}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 91)$$

Erinnern wir uns nun, dass für einen Querschnitt x bezeichnet:

$\mathfrak{V}$ die algebraische Summe der am Fragment A x thätigen äusseren Kräfte (die Vertikalkraft),

$\mathfrak{M}$ das Moment derselben äusseren Kräfte in Beziehung auf den fraglichen Querschnitt x,

so erhalten wir (Richtung der Schwerkraft positiv, Drehrichtung von links nach rechts positiv):

für das belastete zunächst A liegende Stück, Coordinaten-Ursprung im Querschnitt x

$$\mathfrak{V} = -A + (k + p)\,x \quad \ldots\ldots \quad 92)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - (k + p)\frac{x^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 93)$$

für das unbelastete zunächst B gelegene Stück

$$\mathfrak{V} = -A + \lambda k + px \quad \ldots\ldots \quad 94)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \lambda k\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{px^2}{2} \quad . \quad 95)$$

Für die gleichförmig vertheilte Maximallast gehen die Gleichungen 91)—93) in folgende Form über:

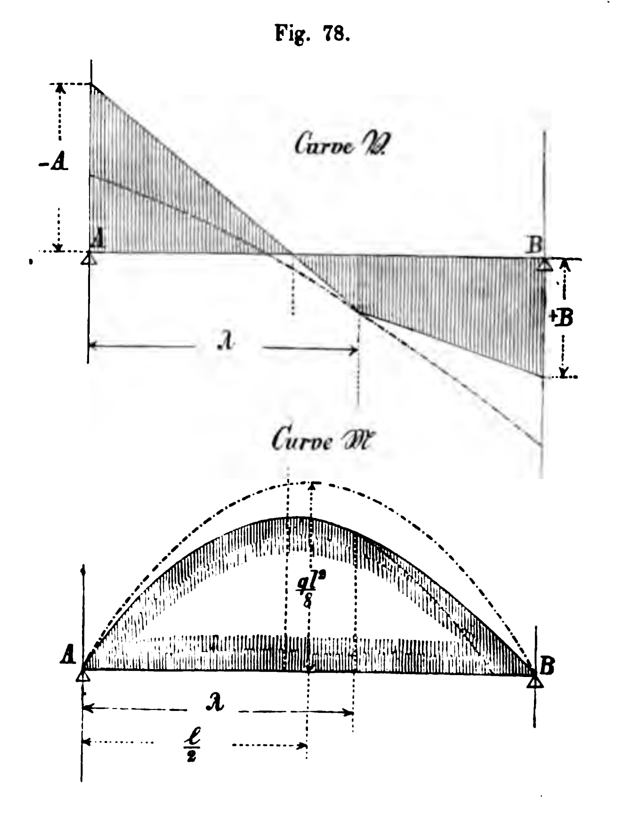
$$A = B = \frac{ql}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91^a)$$

$$\mathfrak{B} = -A + qx \quad \ldots\ldots\ldots \quad 92^a)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{qx^2}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad \ldots \quad 93^a)$$

Letztere Gleichung nach Abscisse $x_1 = \frac{l}{2} - x$ ausgedrückt, gibt,

Fig. 78.



indem $x = \frac{l}{2} - x_1$ gesetzt wird

$$\mathfrak{M} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qx_1^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 93^b)$$

welch letztere Gleichung desshalb häufig angewendet wird, weil

das constante Glied $\frac{ql^2}{8}$ jedenfalls berechnet werden muss, daher als bekannt angenommen werden darf.

Wenn man die einzelnen Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$ und Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für hinreichend viele Werthe x aus den Gleichungen 92)—95) berechnet, die so gewonnenen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ als Ordinaten der Abscissen x aufträgt, wenn man endlich die Endpunkte dieser Ordinaten durch eine stetige Linie verbindet, so erhält man 2 Kurven, welche für jeden denkbaren Werth von x die entsprechenden $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ durch Abgreifen mit dem Zirkel geben; die Fig. 78 stellt uns diese Kurven für eine bestimmte Länge λ der Ueberlast dar; die Kurve $\mathfrak{V}$ besteht aus geraden Linien, deren Neigung gegen die Abscissenaxe proportional den Belastungen q und p ist; — die Kurve $\mathfrak{M}$ setzt sich aus Parabelbögen zusammen, deren Axen vertikal stehen und deren Parameter denselben Belastungen q und p umgekehrt proportional sind.*) Diese Bemerkungen dienen uns, um die Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ aufzutragen, wenn nur einige wenige Werthe nach den Gleichungen 92)—95) berechnet worden sind.

Die Gleichungen 92)—95) geben $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ nur für einen bestimmten Werth von λ; um alle möglichen Belastungen zu berücksichtigen, sind die Umhüllungslinien sämmtlicher Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ zu bestimmen. — Es ist für jedes x dasjenige λ zu bestimmen, welches den grössten Werth von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ gibt. Um das Maximum, beziehungsweise Minimum von $\mathfrak{V}$ zu bestimmen, setzen wir in Gleichung 94) für A seinen Werth aus Gleichung 91) ein und erhalten:

$$\mathfrak{V} = -\frac{lp}{2} + \frac{\lambda^2 k}{2l} + px$$

Für ein und dasselbe x hat dieser Ausdruck einen desto grössern positiven oder kleineren negativen Werth, je grösser λ ist, vorausgesetzt, dass λ nicht grösser ist als x. Würde nun λ über x hinaus zunehmen, so würde $\mathfrak{V}$ nicht mehr durch Gleichung 94), sondern durch Gleichung 92) bestimmt sein, und aus dieser letztern Gleichung folgt, dass solange $\lambda > x$ stets der positive Werth von $\mathfrak{V}$ im betrachteten Querschnitt kleiner, der negative Werth aber grösser ist, je grösser A, d. h. je grösser λ ist. — Wenn eine per Längeneinheit gleichförmig vertheilte Last k von A nach B vorrückt, so findet an jedem Punkte dann das positive Maximum oder das negative Minimum von $\mathfrak{V}$ statt, wenn $\lambda = x$; hiedurch geht Gleichung 94) in die Form über:

*) Auf Seite 36 Zeile 12 und folg. ist zu lesen: Die Kurve $\mathfrak{M}$ eine Parabel vom Parameter $\frac{1}{q}$, wenn die Gleichung der Parabel die Form hat $x^2 = 2py$.

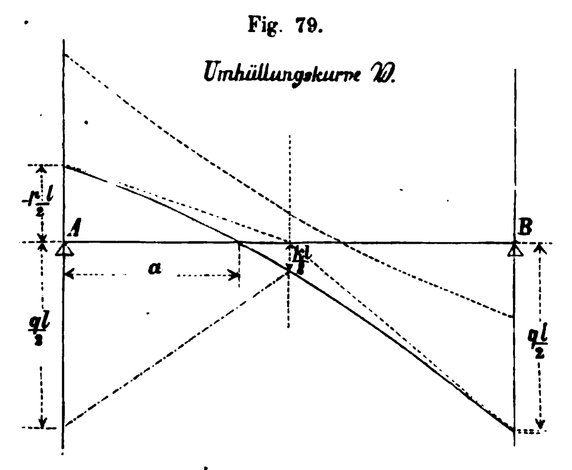
$$\max \mathfrak{V} = -\frac{pl}{2} + \frac{kx^2}{2l} + px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96)$$

was die Umhüllungskurve für das Minimum oder Maximum von $\mathfrak{V}$ ist, wenn die Last von A nach B vorrückt; eine zweite symmetrische Kurve

$$\max \mathfrak{V} = \frac{pl}{2} - \frac{k(l-x)^2}{2l} - p(l-x) \quad . \quad . \quad 96^a)$$

ist ebenso die Umhüllungslinie sämmtlicher Maxima oder Minima von $\mathfrak{V}$, wenn die Last von B nach A sich bewegt. — In Fig. 79 sind diese beiden Kurven eingetragen; je der grössere dieser

Fig. 79.



beiden Werthe gibt den absolut grössten Werth von $\mathfrak{V}$; derselbe ist durch Gleichung 96) gegeben, wenn $x > \frac{l}{2}$, durch Gleichung 96^a), wenn $x < \frac{l}{2}$.

Wir bemerken in Fig. 79, dass die beiden Kurvenzweige, welche die absolut grössten Werthe von $\mathfrak{V}$ angeben (welche unterhalb der Abscissenaxe mittelst theilweiser Umklappung zusammengestellt sind), nahezu geradlinig sind; es wird also hinreichend sein, wenn ausser den grössten Werthen von A und B

$$A = B = (p + k)\frac{l}{2} = q\frac{l}{2}$$

auch noch der Werth $\max \mathfrak{V}_m$ für $x = \frac{l}{2}$ bekannt ist; dieser Werth findet sich aber aus Gleichung 96) und 96^a)

$$\max \mathfrak{V}_m = \frac{kl}{8}.$$

Die Umhüllungslinie sämmtlicher Kurven $\mathfrak{M}$ ist diejenige Parabel, welche der gleichförmig vertheilten Maximallast q entspricht. Denn wir ersehen aus Gleichung 91), dass A und B Maxima sind für $\lambda = l$; somit hat unter allen denkbaren Kurven $\mathfrak{M}$ die der Maximallast entsprechende Parabel gemäss Gleichung 17) die grössten trigonometrischen Tangenten an den Auflagern; eine andere aus verschiedenen Parabelbögen zusammengesetzte Kurve kann daher die genannte Umhüllungslinie nicht überschreiten. — In Fig. 78 sind für eine beliebige Länge der Ueberlast, in der Figur mit λ bezeichnet, die Kurven $\mathfrak{M}$ eingetragen und hieraus ersichtlich, wie solche ganz innerhalb der beschriebenen Umhüllungslinie sich befinden.

60. Die Maximalwerthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$, wie solche durch die vorbeschriebenen Umhüllungslinien für jeden Schnitt x erhalten werden, sind nur dann zur Bestimmung der Dimensionen genügend, wenn letztere blos durch $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{V}$ bestimmt sind; ist dagegen irgend ein Construktionsglied gleichzeitig von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ abhängig, so müssen offenbar auch gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ in Rechnung gezogen werden.

Die Umhüllungskurve $\mathfrak{M}$ ist, wie in Nr. **59** nachgewiesen, nichts Anderes als die Kurve der gleichförmig vertheilten Maximallast q; hiefür ist $A = \frac{ql}{2}$ und die einzelnen $\mathfrak{V}$ finden sich nun sehr leicht nach Gleichung 92), d. h. die Kurve $\mathfrak{V}$ besteht für die Maximallast aus Geraden, welche die Abscissenaxe in der Entfernung $x = \frac{l}{2}$ schneiden.

Die grössten Werthe der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ finden nach Nr. **59** für jeden Abstand x dann statt, wenn die Last bis zum Punkte x vorgerückt ist und sind diese grössten Werthe von $\mathfrak{V}$ durch Gleichung 96), beziehungsweise 96[a]) gegeben; da die Last von A oder B hereinrücken kann, so entstehen zwei Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$, und sind entsprechend auch zwei Kurven $\mathfrak{M}$ vorhanden, welche für jedes max $\mathfrak{V}$ das zugehörige gleichzeitige Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ erkennen lassen.

Die Last gehe von A nach B, und sei bis zum Punkt x vorgerückt, so ist

$$\mathfrak{M} = Ax - (p + k)\frac{x^2}{2}$$

$$A = \frac{pl}{2} + kx\,\frac{2l - x}{2l}$$

woraus für die eine der beiden gesuchten Kurven folgt

$$\mathfrak{M} = \frac{pl}{2}x + \frac{k - p}{2}x^2 - \frac{k}{2l}x^3 \quad . \quad 97)$$

Diese Kurve erreicht ihr Maximum für

$$x = l\left\{\frac{k-p}{3k} \pm \sqrt{\frac{p}{3k} + \left(\frac{k-p}{3k}\right)^2}\right\} \quad . \quad . \quad 98)$$

Wenn die Last von B nach A rückt, so sind die der Umhüllungscurve max $\mathfrak{V}$ entsprechenden Angriffsmomente ausgedrückt durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{pl}{2}(l-x) + \left(\frac{k-p}{2}\right)(l-x)^2 - \frac{k}{2l}(l-x)^3 \quad . \quad . \quad 97^a)$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird nach Gleichung 97) und 97ᵃ) gefunden

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{p}{8} + \frac{k}{16}\right)l^2$$

61. In vielen Fällen ist es von Werth, den Punkt x zu kennen, wo $\mathfrak{V}$ gleich Null wird; wenn die Brücke entweder gar nicht, oder auf ihre ganze Länge belastet ist, ist der Punkt $\mathfrak{V} = 0$ in der Brückenmitte, bei einseitiger Belastung rückt dieser Punkt gegen eines der Auflager vor; um zu bestimmen, wie viel sich hiebei $\mathfrak{V} = 0$ aus der Brückenmitte entfernen kann, benützen wir die Fig. 79, wo die äussersten Grenzen für sämmtliche $\mathfrak{V}$ durch die beiden Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$ angegeben sind; befinden sich für ein bestimmtes x beide Werthe max $\mathfrak{V}$ auf derselben Seite der Abscissenaxe, so kann für dieses x kein Werth von $\mathfrak{V}$ gleich Null werden; dieses kann vielmehr nur dann stattfinden, wenn die beiderlei Werthe von max $\mathfrak{V}$ zu verschiedenen Seiten der Abscissenaxe liegen, oder aber auch wenn einer derselben auf der Abscissenaxe selbst sich befindet; es geht hieraus hervor, dass diejenigen Punkte, wo die beiden Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$ die Abscissenaxe schneiden, zugleich die beiden äussersten Lagen des Punktes $\mathfrak{V} = 0$ sind: bezeichnen wir mit a die Abscisse eines dieser Schnittpunkte, so ist nach Gleichung 96) für $\mathfrak{V} = 0$

$$0 = -\frac{pl}{2} + \frac{ka^2}{2l} + pa$$

woraus

$$a = \left\{-\frac{p}{k} \pm \sqrt{\frac{p}{k} + \left(\frac{p}{k}\right)^2}\right\} l \quad . \quad 99)^*)$$

62. Wir zeigen die Resultate der Formeln 91)—99) in einer graphischen Darstellung Tafel II. (am Schlusse des Buches), indem wir 6 verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{k} = \frac{\text{Eigengewicht}}{\text{zufällige Last}}$ zu Grunde legen. — In dieser graphischen Darstellung sind die Um-

*) Diese Relation wurde von Schwedler erstmals aufgestellt (Berliner Bauzeitung 1851).

hüllungslinien max $\mathfrak{M}$ und max $\mathfrak{V}$, sowie die zugehörigen Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ enthalten. Bezüglich der Kurven $\mathfrak{V}$ ist zu bemerken, dass negative Werthe $\mathfrak{V}$ nach unten umgeklappt gezeichnet sind, so dass aus den graphischen Darstellungen nur die absoluten Werthe von $\mathfrak{V}$ entnommen werden können.

Die Umhüllungslinie max $\mathfrak{M}$ und die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{V}$ finden sich nach den Gleichungen 92ᵃ) und 93ᵃ); diese Kurven sind für alle Verhältnisse $\frac{p}{k}$ dieselben; die Kurve max $\mathfrak{M}$ ist eine Parabel, deren Scheitel-Ordinate stets $= 0{,}125\ ql^2$; die zugehörige Kurve $\mathfrak{V}$ besteht aus 2 Geraden, welche in der Mitte der Abscissenaxe sich schneiden und deren Ordinaten an den Endauflagern bestimmt sind durch die Werthe $A = B = 0{,}5\ ql$.

Die Umhüllungslinien max $\mathfrak{V}$ sind bestimmt durch die Gleichung 96), beziehungsweise 96ᵃ); die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{M}$ finden sich nach Gleichung 97) und 97ᵃ); der Punkt, wo letztere Kurven ihr Maximum erreichen, ist durch Gleichung 98) gegeben.

Die Kurve max $\mathfrak{M}$ und die gleichzeitige Kurve $\mathfrak{V}$ kann aus den bekannten Eigenschaften der Parabel und der geraden Linie nach vorstehenden Andeutungen ohne Weiteres aufgezeichnet werden; die Kurve max $\mathfrak{V}$ und die der gleichzeitigen $\mathfrak{M}$ erfordern für die verschiedenen Verhältnisse $\frac{p}{k}$ eine wiederholte Anwendung der Gleichungen 96)—99), deren Resultate für die fragliche Tafel II. in nachfolgender Tabelle XV. enthalten sind.

In den graphischen Darstellungen der Tafel II. sind die absolut grössten Werthe max $\mathfrak{M}$ und max $\mathfrak{V}$ sammt ihren gleichzeitigen Werthen $\mathfrak{V}$, beziehungsweise $\mathfrak{M}$ eingetragen; jedes einzelne Construktionsglied wird im Allgemeinen entweder für max $\mathfrak{M}$ oder für max $\mathfrak{V}$ eine grössere Krafteinwirkung erleiden; es wäre zwar denkbar, dass 2 andere gleichzeitige, aber sonst beliebige Werthe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ das fragliche Construktionsglied mehr in Anspruch nehmen; es lässt sich jedoch (wenn die Ueberlast per Längeneinheit gleichförmig vertheilt ist), im speciellen Falle nachweisen, dass diess nicht der Fall ist, und dass somit die gleichförmig vertheilte Maximallast (Kurve max $\mathfrak{M}$) und die bis zum betrachteten Punkte ausgedehnte einseitige Belastung (max $\mathfrak{V}$) zur Bestimmung der Dimensionen genügen; in welcher Weise aus zwei gegebenen gleichzeitigen Werthen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ die in irgend einem Construktionsglied wirkende Kraft gefunden wird, wird in den späteren Abschnitten dargelegt werden und dienen hiezu insbesondere die mehrfach erwähnten praktischen Formeln, in welchen stets die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ wieder erscheinen werden.

Tabelle XV.

Abscissen.		$^1/_4$ l	$\mathfrak{V} = 0$	$^1/_2$ l		Max $\mathfrak{M}$		$^3/_4$ l
$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{k}$	$\mathfrak{M}$ n. Gl. 97)	Absc. x nach Gl. 99)	$\mathfrak{V} = \frac{kl}{8}$	$\mathfrak{M} = \left(\frac{p}{8} + \frac{k}{16}\right) l^2$	Absc. x n. Gl. 98)	$\mathfrak{M}$ Gl. 97)	$\mathfrak{M}$ Gl. 97)
1	∞	0,0950 ql^2	0,500 l	0	0,125 ql^2	0,500 l	0,1250 ql^2	0,0950 ql^2
$^3/_4$	3	0,0761 ql^2	0,465 l	0,0312 ql	0,1094 ql^2	0,535 l	0,1099 ql^2	0,0880 ql^2
$^2/_3$	2	0,0703	0,450	0,0416	1,1041	0,550	0,1052	0,0859
$^1/_2$	1	0,0586	0,414	0,0625	0,0937	0,572	0,0962	0,0820
$^1/_3$	$^1/_2$	0,0469	0,365	0,0830	0,0833	0,608	0,0870	0,0780
$^1/_5$	$^1/_4$	0,0375	0,302	0,1000	0,0750	0,632	0,0820	0,0750
$^1/_9$	$^1/_8$	0,0312	0,250	0,1110	0,0694	0,647	0,0784	0,0729

Die Anwendung der graphischen Darstellung Tafel II. geschieht am einfachsten dadurch, dass man die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ mit dem Zirkel absticht; genauere Resultate erhält man, wenn man dieselben Figuren mit Hülfe der Tabelle XV., beziehungsweise der Gleichungen 97)—99), in einem grösseren Maasstabe aufträgt, wobei die Figuren der Tafel II. gleichsam als Vorlegeblätter dienen. — Endlich aber haben diese graphischen Darstellungen den Zweck, das Verständniss der vorstehenden und der folgenden Entwicklungen zu erleichtern und die Resultate der Formeln und der Rechnungen zur Anschauung zu bringen.

63. Es soll nun der Einfluss concentrirter Lasten untersucht und mit einer gleichförmig vertheilten Ueberlast verglichen werden.

Zu Gewinnung allgemeiner Formeln nehmen wir zunächst an, ein Träger AB Fig. 80 sei ausser dem gleichförmig vertheilten Gewicht p noch mit einer Reihe concentrirter Lasten G_1 G_2 G_3 G_4 in den (zunächst unveränderlich gedachten) Abständen g_1 g_2 g_3 g_4 von A belastet. Es bezeichne l die Trägerlänge, so erhalten

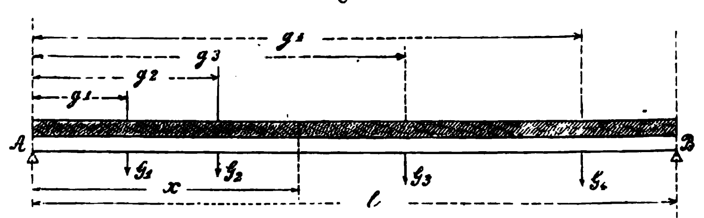
wir durch Anwendung des Hebelgesetzes (Gleichung 4) die Auflagerdrücke:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{pl}{2} + \frac{(l - g_1) G_1 + (l - g_2) G_2 + (l - g_3) G_3 + \ldots}{l} \\ B &= \frac{pl}{2} + \frac{g_1 G_1 + g_2 G_2 + G_3 g_3 + \ldots}{l} \end{aligned}\right\} \quad 100)$$

und wenn wir mit G und g überhaupt eine Einzelkraft respective deren Abstand von A bezeichnen, so erhalten diese Gleichungen die allgemeine Form:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{pl}{2} + \frac{\Sigma G (l - g)}{l} \\ B &= \frac{pl}{2} + \frac{\Sigma G g}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 100^a)$$

Fig. 80.



Für einen Querschnitt x bestimmen sich sodann die Grössen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ mit Bezugnahme auf Fig. 80 wie folgt:

$$\mathfrak{V} = -A + px + G_1 + G_2 \quad \ldots \ldots \quad 101)$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{px^2}{2} - G_1 (x - g_1) - G_2 (x - g_2) \quad 102)$$

oder in allgemeiner Form:

$$\mathfrak{V} = -A + px + \Sigma_0^x G \quad \ldots \ldots \quad 101^a)$$

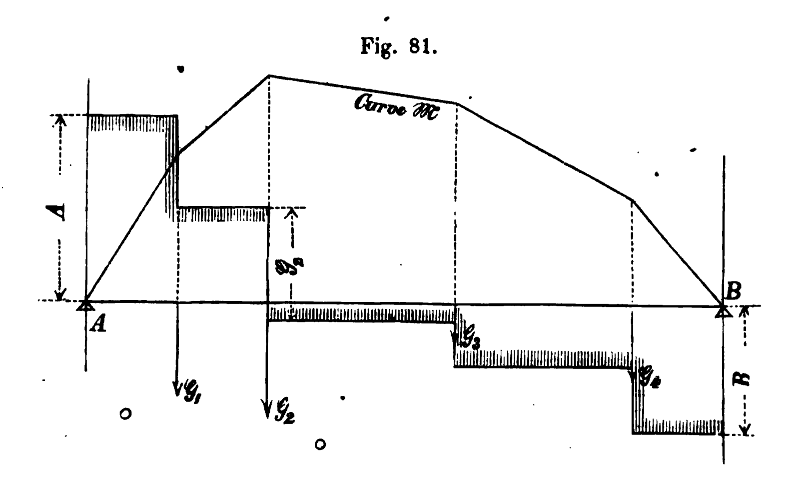
$$\mathfrak{M} = Ax - \frac{px^2}{2} - \Sigma_0^x G (x - g) \quad \ldots \quad 102^a)$$

Wir können einige allgemeine Folgerungen aus diesen Gleichungen ziehen

Was zunächst die Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ betrifft, so denken wir uns eine Abscisse $x = a$ so gewählt, dass für dieselbe $A = pa + \Sigma_0^a G$. Es folgt für diesen Werth von x aus Gleichung 101^a) $\mathfrak{V} = 0$. Für den Trägertheil von $x = 0$ bis a ist sodann $\mathfrak{V}$ negativ, für $x = a$ bis l dagegen positive. Um die Form der Kurve $\mathfrak{V}$ zur

Anschauung zu bringen, denken wir uns vorläufig den Träger AB schwerlos mit den einzelnen Gewichten G belastet, es ist dann nach Gleichung 101) die Vertikalkraft zwischen den einzelnen Lastpunkten constant (diess folgt schon aus Gleichung 16), da für $q = 0$ $d\mathfrak{V} = 0$ ist). Es ist somit die Kurve $\mathfrak{V}$ aus einzelnen horizontalen Geraden zusammengesetzt (vergl. Fig. 81), deren jeweiliger Vertikalabstand = G. Wird das gleichförmig vertheilte Eigengewicht mit in Rechnung gezogen, so erhalten die einzelnen Staffeln der Kurve $\mathfrak{V}$ eine Neigung gegen die Abscissen-

Fig. 81.



achse, deren trigonometrische Tangente dem Eigengewicht p des Trägers proportional ist. Es folgt diess aus Gleichung 101), indem man durch Differenziren derselben erhält:

$$\frac{d\mathfrak{V}}{dx} = p$$

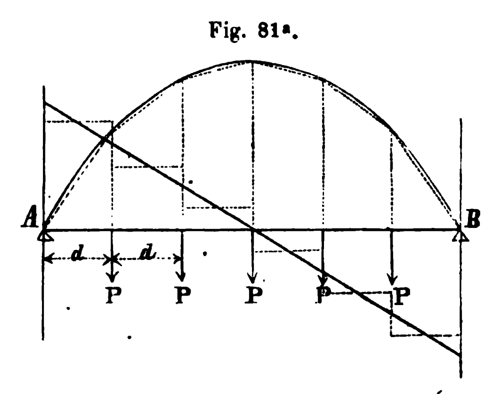
Uebergehend auf die Kurve $\mathfrak{M}$ bemerken wir, dass dieselbe zunächst für den schwerlos gedachten Träger ein Polygon bildet, dessen Eckpunkte durch die einzelnen Lastpunkte bestimmt sind. Diess ergibt sich aus Gleichung 102), indem für $p = 0$ diese Gleichung vom 1ten Grade. — Durch Berücksichtigung des Eigengewichts gehen die Polygonseiten in schwach gekrümmte Parabelbögen über, die Kurve $\mathfrak{M}$ bildet aber keinenfalls eine stetige Kurve, sondern findet je am Angriffspunkt einer Einzelkraft ein Wechsel der Tangenten statt.

Denken wir uns den einfachsten Fall, dass am schwerlos gedachten Träger gleich grosse concentrirte Lasten P wirken, welche ausserdem gleichförmig über den Träger vertheilt sind, (vergl. Fig. 81a), so liegen die Ecken des genannten Polygons $\mathfrak{M}$ auf einer Parabel, welche der gleichförmig vertheilten Be-

lastung $\frac{P}{d}$ entspricht, wo $d = \frac{1}{n} l$ den Abstand zweier Einzelkräfte bezeichnet.*)

Je mehr Knotenpunkte das Polygon zeigt, das heisst, je näher die Angriffspunkte der Lasten beisammen liegen, desto mehr wird sich das Polygon der genannten Parabel anschliessen.

Fig. 81a.



Diese Verhältnisse bleiben dieselben, wenn das Eigengewicht mit in Rechnung gezogen wird. Die den Angriffspunkten der Kräfte P entsprechenden Ordinaten von $\mathfrak{M}$ fallen mit der Parabel zusammen, welche der gleichförmigen Belastung $p + k$ entspricht, die Polygonseiten gehen, wie wir gesehen haben, in flache Parabeln über.

Für den besprochenen Fall der Belastung des schwerlos gedachten Trägers durch gleich grosse gleichvertheilte Einzellasten lässt sich bezüglich der Kurve $\mathfrak{B}$ nachweisen, dass je in der Mitte der einzelnen Felder die Ordinaten der staffelförmigen Kurve mit der Geraden zusammenfallen, welche nach Gleichung 92a) der gleichmässig und stetig vertheilten Totallast entspricht.

---

*) Um diess nachzuweisen, haben wir in Gleichung 102a) zu setzen $p = 0$, $G_1 = G_2 = \ldots = P = kd$, ferner $nd = l$ und erhalten für einen beliebigen Knotenpunkt $x = md$:

$$A = \frac{\Sigma G (l - g)}{l} = kd \left[\frac{(n-1) d + (n-2) d + \ldots + d}{nd} \right] = kd \frac{n-1}{2}$$

$$\mathfrak{M} = Ax - \Sigma_0^x G (x - g)$$

$$= kd \cdot \frac{n-1}{2} \cdot x - kd \left[(m-1) d + (m-2) d + \ldots + d \right]$$

$$= kd \frac{n-1}{2} \cdot x - kd^2 m \left(\frac{m-1}{2} \right) = kl \frac{x}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

Es ist nämlich für $x = md + \frac{d}{2}$

$$\mathfrak{V} = -A + mP = -qd\frac{n-1}{2} + m.d.q$$

$$= qx. - \frac{ql}{2} \text{ wie in Gleichung 92a)}$$

Auch hier werden bei vermehrter Zahl der Lastpunkte die staffelförmigen Absätze abnehmen und der Geraden der gleichförmig vertheilten Last $k = \frac{P}{d}$ sich nähern; bei Berücksichtigung des Eigengewichts, der Geraden der gleichförmig vertheilten Last $k + p$, wie sich leicht nachweisen lässt.

Wenn dagegen die einzelnen Lasten beliebig gross und beliebig vertheilt sind, so werden auch die Polygone $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ um so mehr von den Kurven für eine gleichförmig vertheilte Last sich entfernen, je verschiedener die Einzelkräfte sind und je grösser deren Abstand im Verhältniss zur Trägerlänge.

Wir haben bisher den Abstand der Einzelkräfte untereinander und den Auflagern des Trägers als unveränderlich angenommen: bei Brückenträgern und Eisenbahnbrücken insbesondere ist aber in Betracht zu ziehen, dass in Folge der Bewegung eines Bahnzuges von A nach B die Abstände der Einzellasten von A sich verändern, und ist im Weitern noch zu berücksichtigen, dass die ungleich belasteten Fahrzeuge eines Bahnzuges nicht immer in derselben Ordnung auf einander folgen. Wären Achsbelastung und Achsentfernung gleich gross, so könnte man einfach, wie in Fig 81. geschehen, die Einzellasten durch eine gleichförmig vertheilte Last $\frac{P}{d}$ ersetzen, und würden sich die Maxime von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für jeden Querschnitt x direct aus Nr. **58—62** ergeben. Diess trifft nun nicht zu, und sind besondere Betrachtungen nöthig, um für einen bestimmten Querschnitt x diejenige Stellung eines Bahnzuges aufzufinden, für welche $\mathfrak{V}$ respective $\mathfrak{M}$ ihr Maximum erreichen.

Wie wir schon im Eingang des §. 6 erwähnt, ist für Bahnzüge der Unterschied der Achsbelastungen und Achsentfernungen nicht derart, dass die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ sich zu sehr von den Kurven der gleichförmig vertheilten Last entfernen, wir werden im Folgenden an einigen Beispielen zeigen, wie durch Gegenüberstellung der aus Gleichung 101) und 102) erhaltenen Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ mit den aus Gleichung 92) und 93) für gleichförmige Belastung erhaltenen, eine gleichförmig vertheilte Last k sich ableiten lässt, die mit grosser Annäherung den concentrirten Gewichten der Achsbelastungen substituirt werden kann.

§. 7. Belastungen und Eigengewichte frei aufliegender Brückenträger.

64. Die Belastung der Brückenträger setzt sich zusammen aus der Belastung der einzelnen Achsen der Fahrzeuge und bei Eisenbahnbrücken insbesondere aus der Belastung der Lokomotiven- und Wagenachsen.

Insofern die Belastung der Lokomotivachsen gewöhnlich grösser ist, als die der belasteten Güterwagen, üben Achslast und Radstand der Lokomotiven einen grossen Einfluss aus auf die Dimensionen der Träger der Eisenbahnbrücken und muss bei Feststellung der Dimensionen derselben namentlich für kleinere Brücken auf die Construktionsverhältnisse der Lokomotiven vorzugsweise Rücksicht genommen werden. — Bahnen mit grossem durchgehenden Verkehr erhalten Lokomotiven mit 3—4 Achsen von 12—14 tons Achsgewicht bei einer Gesammtlänge der Lokomotive von 8—10 Meter, während beladene Güterwagen bei 7—8 Meter Länge fast allgemein nur 15 tons wiegen. Hienach beträgt die Belastung durch Lokomotiven pro laufenden Meter 3,5—4,5 tons, für Güterwagen nur ca. 2 tons.

Noch schwerer sind häufig die Tenderlokomotiven für Bahnen mit starken Steigungen, dieselben haben bis zu 60 tons Gewicht bei 5 Achsen und ca. 11 Meter Gesammtlänge oder ca. 5,5 tons pro laufenden Meter.

Nur bei Lokalbahnen sprechen andere Gründe dafür, die Achslast der Lokomotiven möglichst in Uebereinstimmung mit derjenigen der belasteten Güterwagen zu bringen, so dass nur insofern ein höheres Gewicht als 2 tons pro laufenden Meter anzunehmen ist, als der Achsstand der Lokomotiven kleiner ist, als derjenige der Wagen.

Trotz dieser Verschiedenheit zwischen Lokomotivenbelastung und Belastung der Güterwagen lässt sich doch, wie wir in der Folge sehen werden, stets eine gleichförmig vertheilte Ueberlast bestimmen, welche auf die Brückenträger dieselbe Wirkung hervorbringt, wie die auf einander folgenden Achsbelastungen, und zwar wird diese stellvertretende gleichförmige Ueberlast k für jede Lokomotive eine andere sein.

Wenn man aber, selbst unter Voraussetzung derselben Lokomotivconstruktion den nämlichen Werth von k für Brücken sehr verschiedener Spannweite anwenden wollte, so würde man für Träger kleiner Spannweite wesentlich kleinere Angriffsmomente und Vertikalkräfte erhalten, als die ungünstigsten Stellungen der Lokomotiven nach Gleichung 100)—102) ergeben würden, und zeigt eine weitere Verfolgung dieser Betrachtung, dass diejenige gleichförmig vertheilte Ueberlast k, welche als Aequivalent eines

Eisenbahntrains zu dienen hat, desto grösser sein muss, je kleiner die Spannweite ist, wobei übrigens bei kleinen Spannweiten die Einführung einer gleichförmig vertheilten Belastung nur in bedingter Weise geschehen kann, auch weniger Vortheile bietet, da die Rechnung mit Einzellasten einfach genug auszuführen ist.

Die Annahme einer gleichförmig vertheilten stellvertretenden Belastung hat für die Praxis nicht nur den Vortheil der einfacheren Berechnung einer Trägerconstruktion, sondern giebt dieselbe, — und hierauf legen wir einen grössern Werth — einen sichereren Massstab ab für die Beurtheilung und Vergleichung der Tragfähigkeit der Eisenbahnbrücken, als die Berechnung durch Einzellasten, deren Intensität und Abstand in Folge häufiger Abänderung der Construktion der Lokomotiven stetem Wechsel unterworfen ist.

Nach Vorstehendem wird für die Berechnung der Brückenträger im Allgemeinen die stellvertretende gleichförmige Belastung genügen, während andererseits für solche Glieder, welche direkt von einer oder zwei concentrirten Achslasten in Anspruch genommen werden, die Rechnung, wie schon oben angedeutet, direkt unter Zugrundlegung der in Aussicht zu nehmenden grössten Achslasten durchzuführen ist.

65. Die grössten Güterzüge werden durch höchstens 3 hintereinanderstehende Lokomotiven befördert, welche nach Umständen theilweise mit rückwärts gerichtetem Kamine aufgestellt sein können.

Bei grösseren Brücken ist alsdann der Rest der Brücke mit vollbelasteten Güterwagen bedeckt anzunehmen. (Ein solcher Bahnzug ist in Tafel III abgebildet.)

Wir stellen uns nun die Aufgabe, für einen Brückenträger von bestimmter Spannweite und Eigengewicht bei jeder Stellung eines solchen Bahnzuges in einem beliebigen Querschnitt die Maxima von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, wir lösen diese Aufgabe, indem wir uns den Bahnzug von A nach B, sodann von B nach A fortschreitend denken, für jede Stellung die Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ nach Gleichung 100)—102) berechnen und auftragen, und sodann von diesen sämmtlichen Kurven die Umhüllungslinien bilden.

Schliesslich bestimmen wir dann mit Hülfe der Gleichungen 93ᵃ) und 97) diejenige gleichförmige Last, welche für den Fall der Belastung der ganzen Brücke, resp. eines Theils derselben die gleichen Maxime $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ hervorbringt, die aus den genannten Umhüllungslinien sich ergeben.

Zunächst betrachten wir einige einfache Beispiele.

Ueber einen schwerlos gedachten Träger AB Fig. 82 bewege sich eine Last P von A nach B, wir haben in Nr. **19** Beispiel 2 für diesen Fall die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ berechnet, und gefunden,

wenn λ den Abstand der Last P von A bezeichnet:

Trägerstück AD

$$\mathfrak{V} = -P \frac{l - \lambda}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

$$\mathfrak{M} = P \frac{l - \lambda}{l} x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

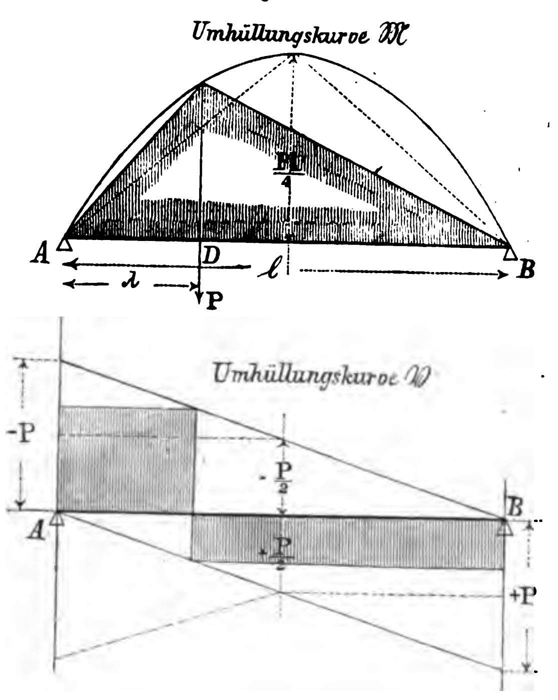
Trägerstück DB

$$\mathfrak{V} = -A + P = +\frac{P\lambda}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

$$\mathfrak{M} = Ax - P(x - \lambda) = P \frac{\lambda(l - x)}{l} \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

In Figur 82 sind für $\lambda = AD$, und $\lambda = \frac{l}{2}$ die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$, sodann auch die Umhüllungskurven von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ eingetragen und ersieht man aus dieser Figur folgendes:

Fig. 82.



1) Bezüglich der Vertikalkraft besteht die Umhüllungslinie aus 2 Geraden, das Maximum von $\mathfrak{V}$ am Auflager ist $= P$, in der Achse des Trägers $= \frac{P}{2}$, eine gleichförmig vertheilte Last

k, welche dieselbe Vertikalkraft hervorbringt, müsste $= \frac{2P}{l}$ respective $\frac{4P}{l}$ sein (nach Gl. 96).

Für jedes einzelne x tritt Max. von $\mathfrak{V}$ ein, wenn die Kraft P im betr. Querschnitt sich befindet.

2) Bezüglich des Momentes $\mathfrak{M}$ ist die Umhüllungslinie eine Parabel, deren Gleichung

$$\mathfrak{M} = P \frac{l - \lambda}{l} . \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad V.$$

die man erhält, indem man in II. und IV. $x = \lambda$ setzt). Das Maximum von $\mathfrak{M}$ findet für einen Punkt x ebenfalls statt, wenn die Last bis x vorgerückt ist, das absolute Maximum von $\mathfrak{M}$ tritt ein in der Trägermitte und ist

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{P . l}{4},$$

die gleichförmige Belastung k_1, welche dieses Moment hervorbringen würde, ist $= \frac{2P}{l}$, somit doppelt so gross, als wenn die Last P gleichförmig auf die Trägerlänge vertheilt wäre.

Wird derselbe Träger mit Zwei Einzellasten P belastet, deren Abstand = d gegeben, und lässt man diese in der Richtung A — B über den Träger sich bewegen, so sind zur Bestimmung der absoluten Maxima von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ nur solche Stellungen zu betrachten, bei denen beide Gewichte P sich gleichzeitig auf der Brücke befinden.

Man erhält aus Figur 83 leicht folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= P \frac{l - \lambda}{l} + \frac{P(l - \lambda - d)}{l} \\ B &= \frac{P\lambda}{l} + \frac{P(\lambda + d)}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad VI.$$

Die Kurve $\mathfrak{V}$ ist für jede Stellung der beiden Lastpunkte eine staffelförmige Linie und ist für das Stück AC $\mathfrak{V} = A$, für CD ist $\mathfrak{V} = A - P$, für DB endlich $\mathfrak{V} = A - 2P$. Die Umhüllungskurve dieser Werthe ist in der Figur 83 eingetragen und besteht aus 2 Geraden, wovon die schwächer gegen den Horizont geneigte diejenige Lage der Lasten begreift, wenn nur eine Last P auf dem Träger sich befindet. Für das Auflager A ist $\mathfrak{V}_{max} = -2P + \frac{Pd}{l}$ für die Mitte $\mathfrak{V}_{max} = \pm \frac{P(l - d)}{l}$

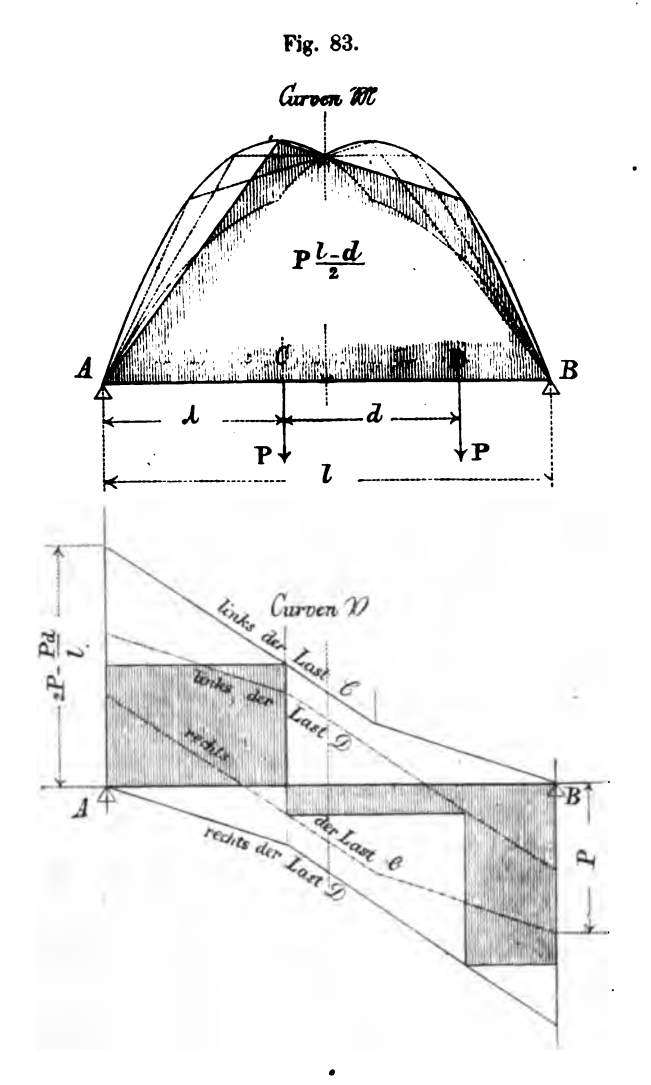
Zur Aufzeichnung des einer bestimmten Belastung entsprechenden Polygons $\mathfrak{M}$ braucht man nur die Werthe für die Angriffspunkte C und D der Kräfte P zu bestimmen und erhält man:

$$\text{für C} \quad \mathfrak{M} = A\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad VII.$$

$$\text{für D} \quad \mathfrak{M} = A(\lambda + d) - Pd \quad \ldots \ldots \quad VIII.$$

Hienach ist in Figur 83 des Polygons 𝔐 für verschiedene Laststellungeu aufgetragen und die Umhüllungslinie 𝔐 eingezeichnet.

Fig. 83.



Letztere ist aus 2 sich schneidenden Parabeln gebildet, deren Gleichung durch VII. und VIII. gegeben, wenn λ als veränderlich angenommen (und für A der Werth aus VI. eingesetzt) wird.

Für einen bestimmten Punkt x wird 𝔐 Maximum, wenn eine Last P über demselben steht, während die andere Last P noch auf dem Träger sich befindet, eine Ausnahme bildet die

Trägermitte, für diese ist $\mathfrak{M}$ constant, so lange auf jeder Seite der Mitte eine Last vorhanden ist, denn für diesen Fall ist für die Trägermitte

$$\mathfrak{M}_0 = A \frac{l}{2} - P\left(\frac{l}{2} - \lambda\right)$$

$$= P \frac{l - d}{2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{IX.}$$

somit unabhängig von λ (und zwar gleich gross wie für einen freiaufliegenden Träger von der Länge $(l - d)$, in dessen Mitte die Last P wirkt).

Den absolut grössten Werth von $\mathfrak{M}$ erhalten wir, indem wir in Gl. VII. λ als veränderlich annehmen und den Differentialquotient $\frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,x} = 0$ setzen. Man erhält hieraus

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\, l - \frac{d}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{X.}$$

und aus Gl. VIII. einen zweiten Werth

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\, l + \frac{d}{4}$$

und durch Einsetzung des Werthes von λ in VII. und VIII.

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{P}{8\,l}(2\,l - d)^2. \quad \ldots \ldots \quad \text{XI.}$$

Anmerkung. Diese Gleichung ist indessen nur richtig für Werthe von $d < \tfrac{2}{3}\, l$, weil für grössere Werthe die zweite Last P nicht mehr auf dem Träger liegt, wenn das erste P die Abscisse $\frac{l}{2} - \frac{d}{4}$ erreicht hat.

66. In ähnlicher Weise könnten nun auch diejenigen Fälle behandelt werden, wo mehr als zwei Einzellasten auf einen Träger einwirken. Allein schon bei drei Lasten, welche wir uns in beliebiger Intensität und in beliebiger Entfernung wirkend denken, wird die Herstellung der die sämmtlichen Maxima enthaltenden Umhüllungskurven sehr complicirt, und nehmen die Schwierigkeiten der Lösung mit der Zahl der Einzelkräfte noch in höherem Masse zu. Man wird sich daher bei gleichzeitiger Wirkung von drei oder mehr concentrirten Lasten begnügen müssen, die Umhüllungskurven auf indirectem Wege dadurch herzustellen, dass man für eine Reihe von Abständen x die Maxima von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ aufzufinden sucht, und demnächst durch Verbindung dieser Maxima auf graphischem Wege eine empirische Umhüllungskurve darstellt.

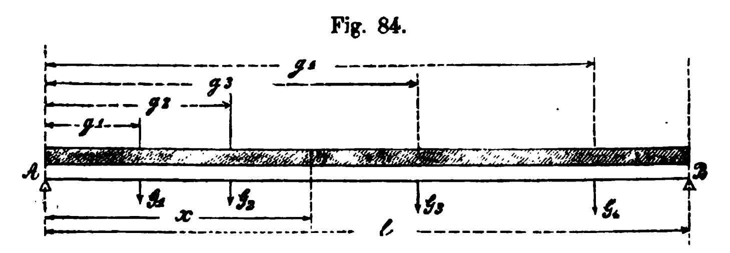
Da wir die Krafteinwirkungen zu untersuchen haben, welchen die Eisenbahnbrücken in Folge der dieselben treffenden Verkehrsbelastungen ausgesetzt sind, so stellen wir nun die Aufgabe, für eine Brücken-Construction, über welche eine grosse Anzahl von

Einzellasten in einer genau festgestellten Ordnung sich bewegt, an jedem einzelnen Punkte die Maximalwerthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zu bestimmen.

Was zunächst die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ betrifft, so wird der absolut grösste Werth von $\mathfrak{M}$ an irgend einem Punkte des Trägers dann eintreten, wenn die Brücke thunlich stark belastet ist und wenn gleichzeitig möglichst grosse Lasten zunächst dem betrachteten Punkt sich befinden, wie dies durch nachfolgende Rechnung näher nachgewiesen wird.

Behalten wir die Bezeichnungen der Nr. **63**, so erhalten wir nach Gl. 102a für das Moment im Querschnitt x eines Trägers AB, welcher ausser dem Eigengewicht p noch mit beliebigen Einzelkräften G belastet ist:

Fig. 84.



$$\mathfrak{M}_x = A x - \frac{p x^2}{2} - \Sigma_0^x G (x - g) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102^a)$$

und indem wir den Werth von A aus Gl. 100a) substituiren:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p x}{2} (l - x) + \frac{x}{l} \Sigma_0^l G (l - g) - \Sigma_0^x G (x - g) \quad . \; . \quad I.$$

oder indem wir die Summen zerlegen und anders gruppiren:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p x}{2} (l - x) + \frac{l - x}{l} \Sigma_0^x G g + \frac{x}{l} \Sigma_x^l G (l - g). \quad II.$$

Sämmtliche Ausdrücke rechts des Gleichheitszeichens sind positiv; der erste, vom Eigengewicht herrührend, ist für ein bestimmtes x constant, der zweite stellt den Beitrag der links von x, der dritte der rechts von x befindlichen Lasten dar, und sind zunächst beide um so grösser, je mehr und je schwerere Lasten G auf dem Träger sich befinden, im Weiteren nimmt der zweite Ausdruck mit g zu, während der dritte mit g abnimmt, somit sind beide am grössten, je näher die Lasten bei dem betrachteten Querschnitte gruppirt sind, womit der oben aufgestellte Satz nachgewiesen ist.

Wir haben oben für Eisenbahnbrücken drei Güterzug-Maschinen mit darauf folgenden belasteten Güterwagen als grösste Belastung angenommen. Wenn wir zunächst solche Spannweiten betrachten, bei welchen 2 oder 3 Locomotiven die ganze Brückenlänge in

Anspruch nehmen, so wird den im Vorhergehenden gestellten beiden Bedingungen dann im Allgemeinen Genüge geschehen, wenn die vorderste der 3 Locomotiven mit rückwärts liegendem, die beiden andern mit vorwärts liegendem Schornsteine aufgezeichnet werden, und nunmehr für jeden Punkt der Brückenaxe dieser Locomotivtrain so aufgestellt wird, dass die Brücke möglichst vollständig mit Rädern belastet ist, gleichzeitig aber die am stärksten belasteten Räder der beiden vordern Locomotiven möglichst nahe dem betrachteten Punkt zu stehen kommen. (Selbstverständlich genügt die Betrachtung der einen, der Einfahrt des Zugs entgegengesetzten Brückenhälfte.)

Angenommen nun, man habe durch irgend welche Untersuchungen bestimmt, welcher Theil eines Eisenbahnzuges auf dem Träger AB stehen muss, um in x das grösste Angriffsmoment hervorzubringen, so bleibt noch diejenige Stellung des Lastzuges auf dem Träger AB zu ermitteln, für welche $\mathfrak{M}_x$ ein Maximum wird. Wir denken uns den Zug um die unendlich kleine Grösse dg verrückt, wobei sämmtliche Lasten G, insofern sie in unveränderlichen Entfernungen von einander sich befinden, um dieselbe Grösse dg vorrücken, dann wird für diejenige Stellung, bei welcher $\frac{d\,\mathfrak{M}_x}{dg} = 0$ wird, $\mathfrak{M}_x$ seinen grössten Werth erhalten.

Aus Gleichung I. ergiebt sich für diesen Differentialcoefficienten:

$$\frac{d\,\mathfrak{M}_x}{dg} = -\frac{x}{l}\,\Sigma_0^l\, G + \Sigma_0^x\, G = 0,$$

und muss hienach die Beziehung stattfinden:

$$\frac{x}{l}\,\Sigma_0^l\, G = \Sigma_0^x\, G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 103).$$

Dieser Gleichung wird nun direct nur in den seltensten Fällen genügt werden können, da der Ausdruck $\frac{x}{l}\,\Sigma_0^l\, G$ meist einen Werth darstellt, der durch die Summe einzelner Radlasten nicht hergestellt werden kann, dagegen wird der Gleichung 103) immer dadurch Genüge geleistet werden können, dass ein Rad bis zum Querschnitt x selbst vorrückt, in welchem Falle man einen Theil des Radgewichts dem links von x liegenden Trägertheile, den andern nach rechts zurechnen kann.

Um die Zulässigkeit des letzteren Verfahrens sich klar zu machen, kann man sich unendlich kleine Verrückungen der beiden Lastfractionen denken, welche eine Aenderung des Moments nicht hervorbringen. Dass aber jeder Theil der Kraft in der erforderlichen Weise wirkt, geht aus Gleichung II hervor, indem für g = x

$$\frac{l-x}{l}\,g = \frac{x}{l}\,(l-g) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

somit kann eine im Querschnitt x angreifende Kraft G ganz oder theilweise der einen oder der andern der beiden Summen der Gleichung II zugezählt, oder was dasselbe ist, an einem oder dem andern Trägertheil (bezüglich des Querschnitts x) wirkend gedacht werden.

Unter dieser Voraussetzung spricht sich Gleichung 103) folgendermassen aus:

Für irgend ein bestimmtes mobiles Lastsystem tritt im gegebenen Querschnitt x das Maximum $\mathfrak{M}_x$ bei derjenigen Laststellung ein, für welche die Summe der links vom Querschnitt wirkenden Lasten sich zur Gesammtlast auf dem ganzen Träger AB verhält wie x : l. Meist steht dann eine der Lasten G auf dem Querschnitt x. *)

Da in Gleichung 103) das Eigengewicht nicht auftritt, so hat obiger Satz allgemeine Gültigkeit für beliebige Lastsysteme bei beliebigem Eigengewicht des Trägers.

Bei obiger Untersuchung ist stillschweigend vorausgesetzt, dass durch die Bewegung des Lastzuges bis zur Stelle, welche dem max $\mathfrak{M}_x$ entspricht, weder Lasten die Brücke verlassen, noch neue hinzutreten. Tritt einer dieser Fälle ein, so haben wir es mit einem neuen Lastsystem zu thun, und ist eine neue Untersuchung behufs Bestimmung der max $\mathfrak{M}_x$ nöthig, indem für die zuerst angenommene Belastungsart ein Maximum im Querschnitt x überhaupt nicht zu erreichen ist.

Die Untersuchung, welche Zugstellung anzunehmen ist, um im Querschnitt x den grössten Werth von $\mathfrak{M}_x$ hervorzubringen, lässt sich theoretisch nicht durchführen, es ist hiebei, wie oben bemerkt, die doppelte Bedingung zu erfüllen, dass einmal möglichst viele und grosse Lasten auf der Brücke sich befinden und sodann, dass die grösste dieser Lasten thunlich nahe dem betrachteten Punkte liegen; diese beiden Kriterien werden häufig ausreichen, sofort diejenigen Lasten zu erkennen, welche auf der Brücke sich befinden müssen, um das Maximalmoment zu bewirken; in andern Fällen müssen zwei und mehrere Fälle theilweise untersucht werden, um die richtige Stellung der in Frage kommenden Belastungen zu erhalten.

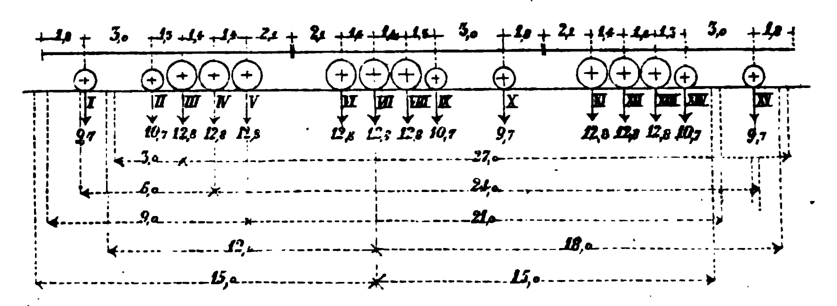
Wir haben schon angedeutet, dass von den drei Güterzug-Locomotiven, welche dem Eisenbahnzuge vorgespannt sind, in der Regel nur die vorderste mit rückwärts liegendem Schornstein angewendet wird und ist dadurch für sämmtliche Fahrzeuge und Lasten die Reihenfolge genau bestimmt. Da ferner in der Regel

*) Zu vergleichen Weyrauch Hannover'sche Bauzeitung 1875.

eine Axe im betrachteten Punkt sich befinden soll, so reduziren sich die in Frage kommenden Fälle in der Praxis stets auf eine sehr geringe Anzahl, aus denen allerdings durch Probiren die ungünstigste Belastung gefunden werden muss.

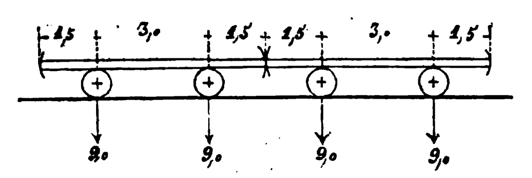
Als Beispiel wählen wir eine Brücke von 30,0^{m} Spannweite, welche durch einen mit einer bayrischen Tendermaschine bespannten Güterzug befahren wird, wie dies durch Fig. 85 dargestellt ist.

Fig. 85.



Die schwer belasteten Güterwagen, welche bei grösseren Spannweiten hinzutretend gedacht werden, sind in Fig. 86 skizzirt.

Fig. 86.



Für einen Punkt im Abstande $x = 3,0^{m}$ tritt das grösste Angriffsmoment dann ein, wenn die erste Locomotiv-Axe III unmittelbar über diesem Punkt sich befindet; in diesem Fall befinden sich die Axen II—XV auf der Brücke und beträgt deren Gesammtlast 166,7 Tonnen, links vom Punkte $x = 3,0^{m}$ soll die Belastung nach den oben gegebenen Regeln, beziehungsweise nach Gleichung 103) $= 166,7 \times \frac{x}{l} = 16,67$ Tonnen sein, welcher Bedingung dadurch entsprochen ist, dass zu der Axe II $= 10,7^{T}$ weitere $5,97^{T}$ vom Gewicht der Axe III hinzugefügt werden; hieraus berechnet sich max $\mathfrak{M}_3 = 251,896^{mT}$. Für die Abscisse $x = 6,0^{m}$ findet max $\mathfrak{M}$ dann statt, wenn die Axe IV über diesem Punkte steht; in diesem Fall ist $A + B = 176,4^{T}$, folglich soll links vom Punkt $x = 6,0^{m}$ eine Belastung von

$\frac{6}{30} \cdot 176{,}4 = 35{,}34^T$ sich befinden, welche Belastung durch die drei Axen I, II und III schon nahezu erreicht wird, so dass von der Axe IV nur $2{,}14^T$ für die linke Seite gerechnet werden müssen; hieraus berechnet sich max $\mathfrak{M}_6 = 433{,}784^{mT}$.

Für die Abscisse $x = 9{,}0^m$ findet max $\mathfrak{M}$ dann statt, wenn die Axe V über diesem Punkt steht; $A + B$ ist $= 166{,}7^T$, und soll links vom Punkte $x = 9{,}0^m$ eine Belastung von $\frac{9}{30} \cdot 166{,}7 = 50{,}01^T$ sich befinden, während die 4 Axen I—IV schon $46{,}0^T$ ergeben; max $\mathfrak{M}_9$ wird $= 556{,}47^{mT}$ erhalten. — Für die Abscisse $x = 12{,}0^m$ findet max $\mathfrak{M}$ dann statt, wenn die Axe VII über diesem Punkt steht, wobei $\frac{12}{30} \cdot 166{,}7 = 66{,}68^T$ links vom Punkte $x = 12{,}0^m$ aufgestellt sein müssen, was durch die Axen II bis VI und $4{,}78^T$ vom Gewicht der Axe VII erzielt wird; max $\mathfrak{M}_{12}$ erhält man $= 632{,}7^{mT}$. Wir bemerken hiebei, dass auch dann ein Maximum eintritt, wenn die Axe VI über dem Punkt $x = 12{,}0^m$ sich befindet; dieses max $\mathfrak{M}_{12}$ beträgt aber nur $630{,}54^{mT}$.

Für $x = 15{,}0^m$ tritt das grösste Angriffsmoment dann ein, wenn die Axe VII über diesem Punkt sich befindet, in welchem Fall $A = 78{,}1^T$, $B = 88{,}6^T$ und $A + B$ gleichfalls gleich $166{,}7^T$ ist, und erhalten max $\mathfrak{M}_{15} = 657{,}86^{mT}$.

Wenn man die im Vorstehenden gefundenen Werthe für die einzelnen Abscissen 3, 6, 9, 12 und 15 aufträgt, so sieht man sofort, dass die einzelnen Punkte annähernd in einer Parabel von vertikaler Axrichtung liegen; die gleichförmig vertheilten Lasten, welche dieselben max $\mathfrak{M}$ hervorbringen würden, sind 6220, 6198, 5888, 5858 und 5840, der mittlere Werth beträgt ziemlich genau $k = 6000^k$ pro Meter.

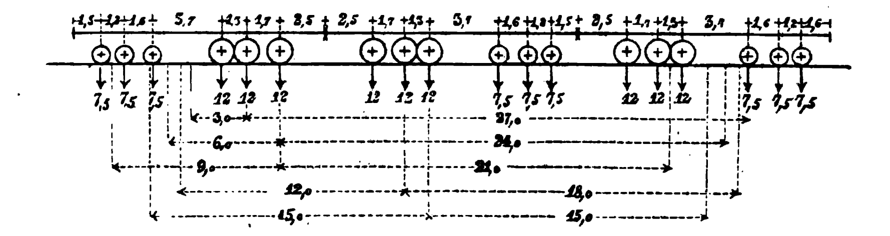
In Fig. b der Tafel III. ist die dieser letzteren Belastung entsprechende Parabel aufgetragen, ebenso wie die für die einzelnen Abscissen direct berechneten Angriffsmomente $\mathfrak{M}$, und ist hieraus ersichtlich, dass eine gleichförmig vertheilte Maximallast von 6000^k pro laufenden Meter an Stelle des in Fig. a derselben Tafel dargestellten Eisenbahntrains gesetzt werden kann, sobald es sich nur um die Bestimmung der Maximal-Werthe von $\mathfrak{M}$ handelt.

Es sind übrigens in vorerwähnter Fig. b auch die mit den einzelnen Maximal-Momenten zusammentreffenden $\mathfrak{V}$ eingetragen, und zwar für jede Abscisse je 2 Werthe, da in sämmtlichen Fällen $\mathfrak{V}$ am betrachteten Punkt seinen Werth sprungweise ändert. Wenn man aufeinanderfolgend die hohen und niedrigen Werthe $\mathfrak{V}$ je durch ein Polygon verbindet, so befindet sich die der

gleichförmig vertheilten Maximallast $k = 6000^k$ entsprechende Linie $\mathfrak{B}$ vollständig zwischen den beiden Polygonkurven.

Wir haben dieselbe Rechnung, welche im Vorstehenden für die in Fig. 85 dargestellte Locomotive für die Spannweite von $30{,}0^m$ erläutert wurde, auch für die in nachstehender Fig. 87 dargestellte württembergische Güterzug-Maschine für dieselbe Spannweite von $30{,}0^m$ durchgeführt, wobei diejenigen Belastungen, welche die grössten Angriffsmomente ergeben, ersichtlich gemacht sind (zu vergleichen Fig. e der Tafel III).

Fig. 87.



Auch bei den in Fig. 87 dargestellten 5 Fällen musste immer die im betrachteten Punkte x angebrachte Axlast nach links und rechts vertheilt gedacht werden, um die dem Maximalmomente entsprechende Vertheilung der Lasten zu erzielen, der Art, dass die links und rechts befindlichen Lasten sich wie die Längen der beiderseitigen Strecken verhalten, respective dass Gleichung 103) erfüllt ist. [Für die Abscissen $x = 6$, 9 und 12^m haben sich je 2—3 Maxima ergeben, wobei die absoluten Maxima, von den andern Maximalwerthen theilweise nur wenig abweichend, im Nachfolgenden zu Grunde gelegt sind.]

Wir erhielten

für $x = 3{,}0^m$ max $\mathfrak{M}_3 = 200{,}62^{mT}$

zugehörige Auflagerdruck $A = 70{,}12^T$

gleichzeitige $\mathfrak{B}_3$ links $= -58{,}12^T$, rechts $= -46{,}12^T$

$x = 6{,}0^m$ max $\mathfrak{M}_6 = 330{,}06^{mT}$

$A = 64{,}41$ $\mathfrak{B}_6 = \begin{matrix} -40{,}41 \\ -28{,}41 \end{matrix}$

$x = 9{,}0^m$ max $\mathfrak{M}_9 = 453{,}1^{mT}$

$A = 65{,}85$ $\mathfrak{B}_9 = \begin{matrix} -26{,}85 \\ -14{,}85 \end{matrix}$

$$x = 12,0^m \qquad \max \mathfrak{M}_{12} = 492,24^{mT}$$

$$A = 67,52 \quad \mathfrak{V}_{12} = \begin{matrix} - & 19,52 \\ - & 7,52 \end{matrix}$$

$$x = 15,0^m \qquad \max \mathfrak{M}_{15} = 505,55^{mT}$$

$$A = 67,52 \quad \mathfrak{V}_{15} = \begin{matrix} & 0,0 \\ + & 12,0 \end{matrix}$$

Die über die ganze Brückenlänge gleichförmig vertheilten Lasten k, welche an den Punkten 3, 6, 9, 12 und 15 dieselben Maximalmomente hervorrufen würden, sind der Reihe nach 4954, 4584, 4800, 4558 und 4494, im Mittel 4675.

In Fig. f der Tafel III. sind die einzelnen vorstehend aufgeführten Maximalmomente, sowie die der Belastung $k = 4675^k$ entsprechende Parabel aufgetragen; ebenso sind die gleichzeitigen Werthe $\mathfrak{V}$, sowohl für die Radbelastung, als für die gleichförmig vertheilte Last $k = 4675^k$, und sind ferner in Fig. e derselben Tafel die dem Maximalwerthe von $\mathfrak{M}$ entsprechenden Stellungen des betrachteten Eisenbahnzuges ersichtlich.

Aus vorerwähnter Fig. f geht hervor, dass bei solchen Constructionsgliedern, welche der Voraussetzung nach vorzugsweise von max $\mathfrak{M}$ abhängig, nebenbei aber durch die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{V}$ erheblich beeinflusst sind, wie dies für die Gurtungen nicht geradlinig begrenzter Träger der Fall ist, in vorliegendem Beispiele die Berechnung einer gleichförmig vertheilten Last $k = 4674^k$ ein mathematisch ganz genaues Resultat nicht geben würde; da jedoch der Einfluss von $\mathfrak{V}$ als zurückstehend gegenüber dem des Angriffsmomentes $\mathfrak{M}$ vorausgesetzt ist, so werden die Ungenauigkeiten, welche bei der Berechnung von A sich ergeben, keinerlei nachtheiligen Einfluss auf die Bestimmung der Querschnittsdimensionen ausüben.

Aus der speziellen Behandlung der beiden vorerwähnten Beispiele ziehen wir den durch viele anderweitige Rechnungen gerechtfertigten Schluss, dass für Spannweiten von 30 und mehr Metern, und in wenig eingeschränktem Maasse auch für die geringeren Spannweiten von $10-30^m$ stets gleichförmig vertheilte Maximallasten gefunden werden können, welche bezüglich der von den Maximalmomenten $\mathfrak{M}$ abhängigen Constructionsglieder denselben Einfluss üben, wie die in Folge der Belastung mit Eisenbahnzügen eintretenden aufeinanderfolgenden Einzellasten.

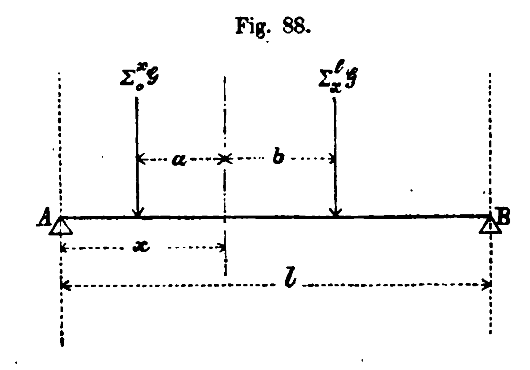
67. Um die grösste Vertikalkraft zu bestimmen, welche eine bestimmte Reihenfolge von Einzellasten an irgend einem Punkte x eines Trägers AB hervorruft, haben wir, indem wir die Resultante der links von x wirkenden Kräfte mit $\Sigma_0^x G$ die der rechts von x wirkenden mit $\Sigma_x^l G$ und mit a und b deren Abstände von x bezeichnen, nach der nachstehenden Fig. 88 als Werth des Auflagerdrucks:

$$A = \frac{\Sigma_0^x G}{l}\,(l - (x - a)) + \frac{\Sigma_x^l G}{l}\,(l - (x + b)) \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Und folgt hieraus für die im Punkte x wirkende Vertikalkraft $\mathfrak{V}$.

$$\mathfrak{V}_x = -A + \Sigma_0^x G = -\frac{\Sigma_x^l G}{l}(l - (x + b)) + \frac{\Sigma_0^x G}{l}(x - a) \quad \text{II.}$$

Fig. 88.



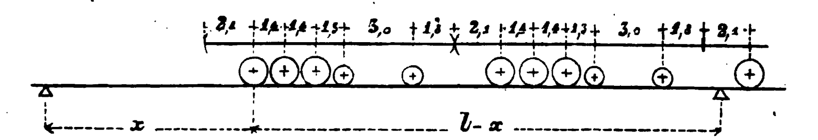
Aus Gleichung II. geht hervor, dass die beiden Glieder der rechten Seite der Gleichung jedenfalls in entgegengesetztem Sinne auf den Werth $\mathfrak{V}$ einwirken. Bleiben wir zunächst bei der Bestimmung des grössten negativen (kleinsten positiven) Werthes von $\mathfrak{V}$, so ist leicht ersichtlich, dass bei constantem Werthe $\left(\Sigma_0^x G + \Sigma_x^l G\right)$ der negative Werth $\mathfrak{V}$ dann besonders gross sein wird, wenn sämmtliche Lasten rechts vom Punkte x sich befinden, wenn also $\Sigma_0^x G$ = Null ist, andererseits nimmt bei überwiegendem Werthe des ersten Gliedes der (negative) Werth $\mathfrak{V}$ mit abnehmendem b zu. — An irgend einem Punkte x wird daher der negative Maximalwerth (oder positive Minimalwerth) von $\mathfrak{V}$ dann eintreten, wenn der Trägertheil zwischen dem betrachteten Querschnitt und dem rechtseitigen Stützpunkte B vollständig mit Einzellasten bedeckt ist, und wenn der Axenpunkt der Gesammtheit dieser letztern möglichst nahe an dem betrachteten Querschnitt sich befindet; letztere Bedingung wird, wenn die Belastung des Trägers auf den einen Theil seiner Länge beschränkt ist, dann eintreten, wenn das vorderste Rad im betrachteten Querschnitte selbst angelangt ist.

Eine ganz gleiche Betrachtung lehrt erkennen, dass das positive Maximum (negative Minimum) von $\mathfrak{V}$ dann eintritt, wenn das Trägerstück zwischen x und dem rechtseitigen Stütz-

punkt B leer, das Stück A bis x dagegen voll belastet ist, und das vordere Rad eben im Querschnitt x angelangt ist.

Bei einem aus drei auf einanderfolgenden Locomotiven gebildeten Eisenbahnzuge wird den im Vorhergehenden für max $\mathfrak{V}_x$ aufgestellten Bedingungen im Allgemeinen dadurch entsprochen werden, dass die einzelnen Locomotiven mit dem Kamin nach vornen unmittelbar hinter einander aufgestellt sind und dabei das vorderste Rad der ersten Locomotive gerade bis zu dem betrachteten Punkt x vorgerückt ist, wie dies für das Beispiel der oben betrachteten bayerischen Tenderlocomotiven und des negativen Maximum $\mathfrak{V}$ in nebenstehender Fig. 89 dargestellt ist; denn bei

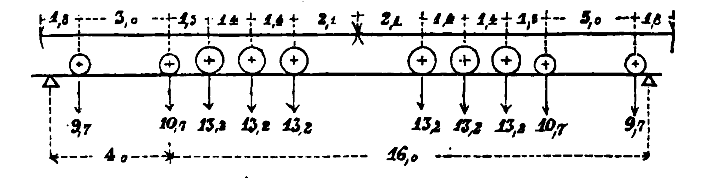
Fig. 89.



dieser Aufstellung sind rechts vom Punkte x möglichst viele Locomotivaxen aufgestellt, deren Axenpunkt, soweit es sich ohne Rechnung übersehen lässt, auch möglichst nahe dem Punkte x gerückt ist. Diese Belastungsweise ist ausserdem analog derjenigen, welche bei einer auf eine bestimmte Länge gleichförmig vertheilten Ueberlast k′ der Kurve max $\mathfrak{V}$ entspricht, indem bei letzterer Belastungsweise max $\mathfrak{V}$ an jedem Punkte dann eintritt, wenn die gleichförmig vertheilte Last k von dem entfernten Auflager gerade bis zu dem betrachteten Punkt x vorgerückt ist (vergl. Fig. 79 der Nr. **59**).

Anmerkung. Es gibt allerdings Fälle, wo eine anderweitige Aufstellung der Locomotive an irgend einem Punkte x ein etwas grösseres max $\mathfrak{V}$ ergibt, als nach der durch Fig. 89 dargestellten Belastungsweise eintreten wird. So hat Herr F. Löwe in einer Broschüre über variable Belastung der Eisenbahnbrücken nachgewiesen, dass in dem durch Fig. 89ᵃ dargestellten Falle $\mathfrak{V}_x$ im Punkte $x = 4^m$ den Werth $24{,}548^T$ erhält, während bei einer der obigen Fig. 89 entsprechenden Aufstellung für denselben Abstand $\mathfrak{V}_x = 23{,}604^T$ erhalten wird; die Differenz beträgt in diesem besonderen, überdiess bezüglich Vertheilung der Axbelastungen nicht gerade normalen Falle 4 Procent des Werthes $\mathfrak{V}$, so dass

Fig. 89ᵃ.

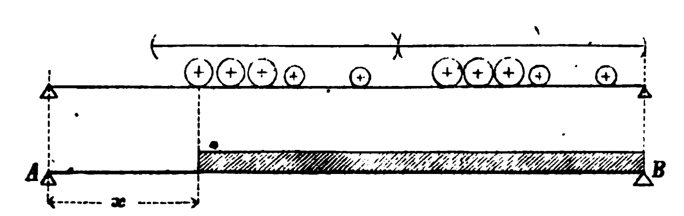


sich unter Bezugnahme hierauf der Schluss ziehen lässt, dass die durch Fig. 89 dargestellte Belastungsweise im Allgemeinen den grössten Werth, zum mindesten einen dem Maximum $\mathfrak{V}$ ziemlich nahestehenden Werth ergibt.

Indem wir unter Bezugnahme auf vorstehende Anmerkung von complicirteren Belastungsweisen absehen, nehmen wir allgemein für die Berechnung von max $\mathfrak{V}$ eine solche Zusammensetzung des Eisenbahnzuges an, dass an der Spitze desselben 3 Locomotiven mit nach vornen gerichteten Kaminen sich befinden, der Rest der Fahrzeuge aber aus den in Fig. 86 dargestellten vollbelasteten Güterwagen besteht.

Diejenige gleichförmige Belastung, welche, vom entfernteren Auflager B bis zum betrachteten Punkt x sich erstreckend, an letzterem Punkte dasselbe $\mathfrak{V}$ hervorbringt, wie ein zwischen B und x aufgestellter, in obengedachter Weise zusammengesetzter Eisenbahnzug hervorbringt, muss, weil in beiden in nebenstehender Fig. 90 dargestellten Fällen zwischen x und A keine neue

Fig. 90.



Last eintritt, denselben Auflagerdruck A hervorbringen, und folgt hieraus, dass eine unter vorstehenden Voraussetzungen bestimmte, von x nach B sich erstreckende gleichförmige Ueberlast k' am Punkte x für das gleichzeitige $\mathfrak{M}$ auch denselben Werth $\mathfrak{M}$ = A . x ergibt. Die zur Bestimmung von max $\mathfrak{V}$ angenommene Belastungsart gibt somit auch für die Bestimmung des gleichzeitigen $\mathfrak{M}$ ein einfaches und correctes Verfahren.

Im Nachfolgenden sind für die in Fig. 89 dargestellte Reihenfolge bei Tenderlocomotiven und für eine Spannweite von 30 Meter die an Abständen x = 3, 6, 9 — 24,27 Meter stattfindenden negativen Maxima $\mathfrak{V}$ zusammengestellt, und sind je diejenigen gleichförmig vertheilten Lasten k' beigefügt, welche an den betreffenden Punkten dieselben max $\mathfrak{V}$ und gleichzeitigen $\mathfrak{M}$ hervorrufen würden.

Es ist

$$\text{für } x = 3^{m} \quad \max \mathfrak{V}_3 = -A = -78{,}11^{T} \quad \mathfrak{M}_3 = A_3 . x = 234{,}33^{mT}$$

$$k' = \frac{2.30}{7^2} . A = 6426^{k}$$

$x = 6^m \quad \max \mathfrak{B}_6 = - A = - 62{,}53, \quad \mathfrak{M}_6 = A_6 \,.\, x = 375{,}18$

$k' = \frac{2.30}{24^2} \,.\, A = 6513$

$x = 9^m \quad \max \mathfrak{B}_9 = - A = - 49{,}66$

$k' = \frac{60}{21^2} \,.\, A = 6756$

$x = 12^m \quad \max \mathfrak{B}_{12} = - A = - 37{,}9$

$k' = \frac{60}{18^2} \,.\, A = 7022$

$x = 15^m \quad \max \mathfrak{B}_{15} = - A = - 27{,}2$

$k' = \frac{60}{15^2} \,.\, A = 7254$

$x = 18^m \quad \max \mathfrak{B}_{18} = - A = - 18{,}3$

$k' = \frac{60}{12^2} \,.\, A = 7625$

$x = 21^m \quad \max \mathfrak{B}_{21} = - A = - 12{,}09$

$k' = \frac{60}{9^2} \,.\, A = 8955$

$x = 24^m \quad \max \mathfrak{B}_{24} = - A = - 6{,}56, \quad \mathfrak{M}_{24} = A \,.\, 24{,}0 = 157{,}44^{mT}$

$k' = \frac{2.30}{6^2} \,.\, 6{,}56 = 10933{,}3$

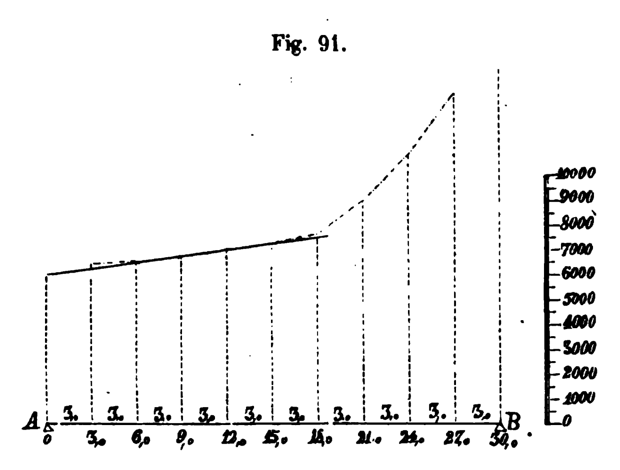
$x = 27^m \quad \max \mathfrak{B}_{27} = - A = - 1{,}984, \quad \mathfrak{M}_{27} = A \,.\, 27 = 53{,}568^{mT}$

$k' - \frac{2.30}{3^2} \,.\, 1{,}984 = 13226{,}6.$

Wir sehen aus diesem Beispiel, dass die stellvertretende gleichförmige Belastung, welche dasselbe max $\mathfrak{B}$ hervorbringt, wie die Aufeinanderfolge einzelner Axbelastungen, bei abnehmender Länge des belasteten Brückenstückes fortwährend zunimmt, dass somit der relative Einfluss der Einzellasten desto grösser wird, je geringer die Zahl der letzteren, wie dies durch nachstehende Fig. 91 graphisch dargestellt ist. In dieser Figur ist auch eine gerade Linie eingezeichnet, welche von dem für die Brücken-Mitte gültigen Werthe k_{15} ausgehend am Auflager A dem Werthe $\frac{k'_{15} + k}{2}$ entspricht, wobei für k der oben für die grösste Maximallast gefundene Mittelwerth $k = 6000^k$ in Rechnung genommen wurde. Für die linke Brückenhälfte $x = 0$ bis $x = 15^m$ und noch etwas darüber hinaus weicht das durch die specielle Berechnung gefundene, durch die gebrochene Linie dargestellte

Resultat nur wenig von der zur Vergleichung beigefügten geraden Linie ab, und erst bei weiterer Annäherung an das rechte Auflager B nehmen die Abweichungen zu.

Fig. 91.



In diesen letztern Fällen und noch mehr, wenn die Spitze des Zuges nur wenig über B hinausgerückt ist, befinden sich nur wenige Axen auf der Brücke, so dass die Maximalwerthe von $\mathfrak{V}$, sowie überhaupt diejenigen Werthe von $\mathfrak{V}$, welche die einzelnen Constructionsglieder am meisten in Anspruch nehmen, leicht durch directe Rechnung erhoben werden.

Im Nachfolgenden sind die Rechnungsresultate für die in Fig. 92 dargestellte Reihenfolge württembergischer Güterzugmaschinen aufgeführt.

Fig. 92.

$$x = 3^m \qquad \max \mathfrak{V}_3 = -A = -62{,}97^T$$

$$k' = \frac{60}{27^2} . A = 5182$$

$$x = 6^m \qquad \max \mathfrak{V}_6 = -A = -51{,}27^T$$

$$k' = \frac{60}{24^2} . A = 5340$$

$x = 9^m \quad \max \mathfrak{V}_9 = -A = -40{,}27$

$k' = \frac{60}{21^2} \cdot A = 5479$

$x = 12^m \quad \max \mathfrak{V}_{12} = -A = -30{,}62$

$k' = \frac{60}{18^2} \cdot A = 5670$

$x = 15^m \quad \max \mathfrak{V}_{15} = -A = -21{,}85$

$k' = \frac{60}{15^2} \cdot A = 5827$

$x = 18^m \quad \max \mathfrak{V}_{18} = -A = -15{,}40$

$k' = \frac{60}{12^2} \cdot A = 6416$

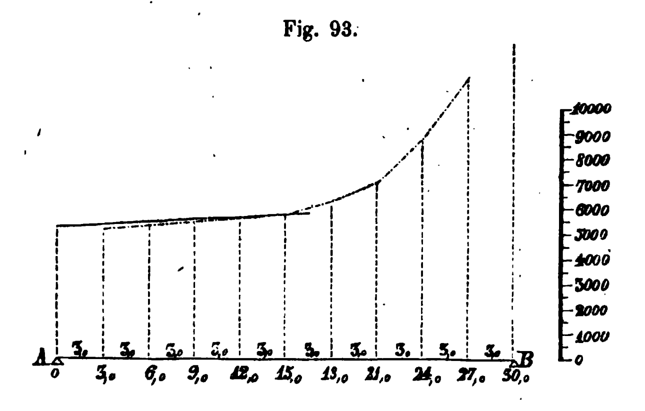
$x = 21^m \quad \max \mathfrak{V}_{21} = -A = -9{,}67$

$k' = \frac{60}{9^2} \cdot A = 7163.$

$x = 24^m \; k' = 8866, \quad x = 27^m \; k' = 11466.$

Indem wir auch für das vorstehende Beispiel die einzelnen **k'** in Fig. 93 aufgetragen und auch für eine durch die Werthe

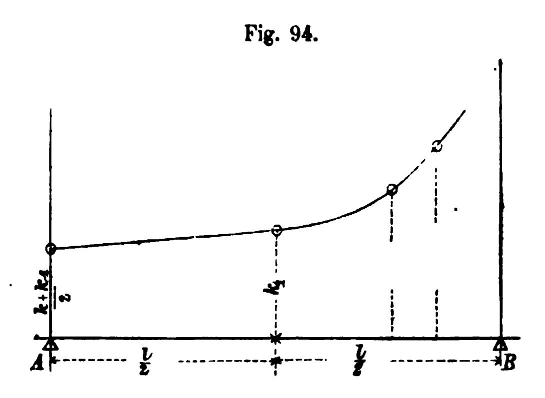
Fig. 93.



k'_{15} und $k'_0 = \frac{k'_{15} + k}{2} = \frac{5827 + 4674}{2}$ bestimmte Gerade zur Vergleichung beigesetzt haben, ergibt sich das auch im vorhergehenden Beispiel erhaltene Resultat, dass die vorbeschriebene Gerade auf die Länge 0 bis 15^m ohne erheblichen Fehler an Stelle der durch directe Rechnung erhaltenen gebrochenen Linie gesetzt werden kann. Aehnliche Resultate haben wir für andere Spannweiten und abweichende Belastungen erhalten, und ergibt sich hieraus die durch Fig. 94 dargestellte allgemeine empirische Regel, deren Anwendung eine sehr einfache ist: Man hat nach

Anleitung des, Eingangs dieser Nummer gegebenen, Verfahrens für irgend eine Locomotive, deren 3 einem vollbelasteten Güterzuge vorgespannt gedacht sind, die dem Maximalangriffsmoment entsprechende (mittlere), gleichförmig vertheilte Belastung k, sodann nach dem im Vorstehenden gegebenen Verfahren diejenige gleichförmige Belastung k′ bestimmt, welche für den in gleicher Weise zusammengesetzten Eisenbahnzug in der Brückenmitte dasselbe max 𝔙 hervorruft.

Fig. 94.



Unter Zugrundlegung dieser beiden Werthe k und k′ wird nach Anleitung der Fig. 94 eine gerade Linie aufgezeichnet, deren Ordinaten für jede zwischen A und $\frac{1}{2}$ l befindliche Abscisse x sofort den zugehörigen Werth k′ durch directes Abgreifen mit dem Zirkel oder durch eine einfache Rechnung ergeben, während die zwischen x = $\frac{1}{2}$ l und B gelegene Kurve nach directer Bestimmung von 2 bis 3 Werthen nach Maassgabe der Fig. 91 und 93 auf graphischem Wege ohne störende Ungenauigkeit bestimmt werden kann.

68. Unter Zugrundelegung der im Vorstehenden gegebenen Regeln und Rechnungsresultate haben wir für die mehrerwähnte bayrische Tender-Locomotive und ebenso für die gleichfalls besprochene württembergische Güterzug-Maschine diejenigen gleichförmigen Belastungen k und k′ zusammengestellt, welche einestheils hinsichtlich der Maximal-Angriffsmomente, anderntheils hinsichtlich der in der Trägermitte bei einseitiger Belastung entstehenden grössten Vertikalkräfte denselben Einfluss üben, wie die thatsächlich wirkenden concentrirten Belastungen des Eisenbahntrains. Die Belastungen sind für die bayrische Locomotive den Fig. 85 und 89, für die württembergische Locomotive den Fig. 87 und 92 entsprechend gedacht und ist in Wiederholung der im Vorhergehenden ermittelten Resultate zu bemerken, dass die den Maximalmomenten entsprechenden k einen auf die ganze Trägerlänge gültigen mittleren Werth

repräsentiren, während die k′ in Verbindung mit den erwähnten Werthen k nach Maassgabe der Fig. 94 zur Aufzeichnung einer einfachen graphischen Darstellung benützt werden, welch letztere die den einzelnen Abständen entsprechenden, von A gegen B an Grösse zunehmenden Werthe k′ enthält.

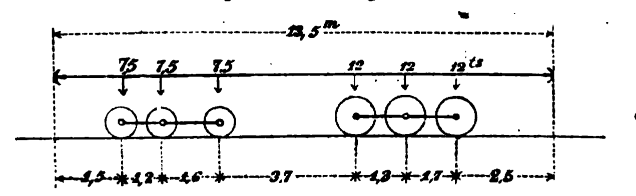
Anmerkung. In den beiden den nachstehenden Tabellen zu Grunde liegenden Verkehrsbelastungen ist das Gewicht der Güterwagen zu 3000 Kilogr. per laufenden Meter angenommen, was mit der Eingangs der N°. 64. befindlichen Angabe nicht übereinstimmt; die hier angenommene stärkere Belastung entspricht dem per laufenden Meter berechneten Gewicht vollständig belasteter besondes schwerer Güterwagen oder desgleichen Kohlenwagen von kleinem Radstande während die obige niedrigere Gewichtsangabe sich auf den Durchschnitt der in einem Eisenbahnzug befindlichen belasteten Wagen bezieht, wie z. B. ein vollbelasteter 8 m langer Wagen bei 16,0 Tons Gesammtbelastung per laufenden Meter nur 2,0 Tons wiegt.

Tabelle XVI
bayerische Tender-Locomotive.

11,0 m
2,1 1,4 1,4 1,3 3,0 1,8
12,8 t 12,8 12,8 10,7 9,7

Spannweite		10m	15m	20m	30m	40m	60m	100m
Eigengewicht der Brücke per laufenden Meter = p		1440	1660	1880	2320	2760	3640	5400
Maximal-belastung der ganzen Brücke	stellvertretende gleichförmig vertheilte Verkehrslast = k	8000	6760	6420	6000	5780	5200	4100
	gleichförmig vertheilte Totalbelastung $q = p + k$	9440	8420	8300	8320	8540	8840	9500
	Verhältniss: $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{6,5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4,4}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,4}$	$\frac{1}{1,8}$
Grösste Belastung der einen Brückenhälfte	stellvertretende gleichförmig vertheilte Last = k′	11670	9760	8430	7250	6860	6340	5530
	gleichförmig vertheilte Totalbelastung d. belasteten Brückenhälfte $q' = p + k'$	13110	11420	10310	9570	9620	9980	10930
	Verhältniss: $\frac{p}{q'}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5.5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{2,7}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle XVII
württembergische Güterzug-Locomotive.



Spannweite		10m	15m	20m	30m	40m	60m	100m
Eigengewicht der Brücke per laufenden Meter		1150	1325	1500	1850	2200	2900	4300
Maximal-belastung der ganzen Brücke	stellvertretende gleichförmig vertheilte Verkehrslast = k	5780	5100	4970	4675	4550	4350	3800
	gleichförmig vertheilte Totalbelastung $q = p + k$	6930	6425	6470	6525	6750	7250	8100
	Verhältniss: $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{6,03}$	$\frac{1}{4,85}$	$\frac{1}{4,3}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,5}$	$\frac{1}{1,9}$
Grösste Belastung der einen Brückenhälfte	stellvertretende gleichförmig vertheilte Last = k'	10300	7800	6850	5825	5540	5100	4700
	gleichförmig vertheilte Totalbelastung der einen Brückenhälfte $q' = p + k'$	11450	9125	8350	7675	7740	8060	9000
	Verhältniss: $\frac{p}{q'}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5,5}$	$\frac{1}{4,1}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{2,76}$	$\frac{1}{2,4}$

Anmerkung. Die Werthe k der Tabelle XVII. sind grösser als die der Tabelle XVII^a früherer Auflagen, weil in letzterer nur die grössten Momente in der Brückenmitte, in Tabelle XVII. aber nunmehr der mittlere Werth sämmtlicher Maximalmomente berechnet ist; ebenso sind die Werthe k' in Tabelle XVII. grösser, als die Werthe k' der früheren Tabelle XVII^a, weil letztere Werthe aus der Gestalt der bei einseitiger Belastung eintretenden Kurve 𝔐 bestimmt worden waren.

Trotz der bedeutenden Verschiedenheit in der Axendistanz der den Tabellen XVI. und XVII. zu Grunde liegenden Locomotiven verhalten sich die Werthe k und k' der genannten beiden Tabellen wenigstens für die Werthe bis $l = 60^m$ ziemlich annähernd, wie die auf den laufenden Meter reducirten Gewichte der beiden

Locomotiven, welche für Tabelle XVI. $= \frac{58,8}{11,0} = 5395^k$, für Tabelle XVII. $= \frac{58,5}{13,5} = 4333^k$ beträgt, und ergibt sich hieraus die Möglichkeit, mittelst Interpolation auch für andere Locomotiven die stellvertretenden k und k' aus den beiden Tabellen XVI. und XVII. annähernd zu bestimmen.

Solche annähernde Berechnungen geben zunächst eine bequeme Controle für die Richtigkeit der etwa angestellten genauen Berechnung der Einwirkung einer beliebig gewählten Locomotive, sie sind aber von besonderem Werthe, wenn es sich darum handelt, bei rascher Ausführung, wie solche behufs Aufrechterhaltung des Bahnbetriebs in Kriegs- und Friedenszeiten häufig nothwendig wird, ohne jedweden Zeitverlust sofort hinreichend genaue Resultate zu erhalten.

Der bei Anwendung von gleichförmigen Belastungen erzielte Grad der Genauigkeit ist übrigens im Allgemeinen desshalb zureichend, weil in den meisten Fällen die Brücke nicht gerade für eine einzige Classe von Locomotiven gebaut werden kann, vielmehr auch dann ihrem Zweck entsprechen muss, wenn Locomotiven abweichender Construction gebaut werden oder gegen Erwarten die Brücke passiren müssen.

Aus letzterem Grunde gestatten die Tabellen XVI. und XVII., welche für die betreffenden Locomotivtypen vollständig genaue Resultate ergeben, allgemeine Anwendung, indem Tabelle XVII. für gewöhnliche Hauptlinien, Tabelle XVI. für solche Bahnen anzuwenden ist, woselbst besonders kräftige Locomotiven passiren müssen.

69. Die in der Tabelle XVII. eingetragenen Eigengewichte p entsprechen der Relation

$$p = 35\,l + 800^k \quad \ldots\ldots \quad 104)$$

und ist in gleicher Weise für Tabelle XVI.

$$p = 44\,l + 1000^k \quad \ldots\ldots \quad 104^a)$$

angenommen, wobei selbstredend die Coefficienten 35 und 44, sowie die constanten 800 und 1000 Mittelwerthe darstellen und zunächst nur für vorläufige Berechnungen bestimmt sind.

Vielfache und von verschiedenen Seiten angestellte Untersuchungen lassen es als zulässig und ganz correct erscheinen, die constanten Glieder der Gleichungen 104) und 104ᵃ) als Gewicht der Fahrbahn anzunehmen, während die Glieder 35 l, beziehungsweise 44 l, das Gewicht der Hauptträger einschliesslich einer etwaigen zweiten Querabsteifung und einschliesslich der diagonalen Windverstrebung darstellen.

Mit dieser Annahme stimmt überein, dass die Gesammtlast $q = p + k$ in den Tabellen XVI. und XVII. für die Spannweiten von 15 bis 60 Meter ziemlich constant, im Mittel circa 8300,

beziehungsweise 6600 Kilogr. per laufenden Meter ist, so dass gleiche Construction und gleiches Verhältniss zwischen Trägerlänge und Trägerhöhe vorausgesetzt, das per laufenden Meter berechnete Gewicht der Gurtungen wie auch das Gewicht der Wandverstrebung, somit überhaupt das Gewicht der Hauptträger proportional der Spannweite sein soll, wie dies nach vorerwähnten Untersuchungen bei gleicher Construction und gleicher Maximalspannung in Wirklichkeit wenigstens annähernd stattfindet. — Anderseits wechselt der Coefficient C des dem Hauptträgergewichte entsprechenden Gliedes mit der gewählten Constructionsweise — die obigen Werthe 35 und 44 sind ja nur Mittelwerthe — und kann man nach Umständen die Zweckmässigkeit einer Construction nach dem vorerwähnten Coefficienten beurtheilen.

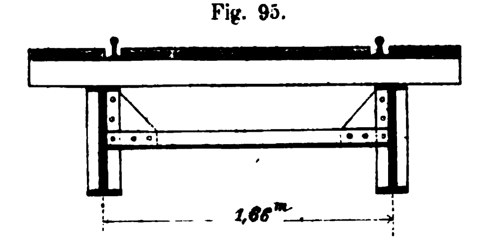
Das dem Fahrbahngewichte entsprechende constante Gewicht, welches wir mit F bezeichnen wollen, ist selbstredend in gleicher Weise von der Constructionsweise abhängig, insbesondere wesentlich von der Zahl und Distanz der Hauptträger bedingt. — Wir werden im Nachfolgenden für einige Haupttypen die Gewichte der per laufenden Meter berechneten Fahrbahngewichte zusammenstellen, bemerken aber zunächst, dass bei dem Fahrbahngewicht eiserner Brücken zwischen dem Eisengewicht F' der eigentlichen Brückenconstruction und dem Gewicht F'' des Oberbaues einschliesslich Bedielung, Geländer etc. unterschieden werden muss.

Die allgemeine Formel für das Eigengewicht eiserner Brückenconstructionen spricht sich daher in nachfolgender Weise aus:

$$p = C.l + F = Cl + F' + F'' \quad . \quad 105).$$

Wir werden die Coefficienten C, welche je nach der Verschiedenheit der Hauptträger-Constructionen und Querschnitt-Anordnungen in sehr mannigfaltiger Weise beeinflusst werden, aber doch bei rationell angelegten Brücken im grossen Ganzen eine immer mehr sich entwickelnde annähernde Uebereinstimmung zeigen, im Verlauf dieser Untersuchungen bei den einzelnen Beispielen jeweils bestimmen und beschränken uns zunächst darauf, die Constanten F, d. h. die Gewichte der Fahrbahn je per laufenden Meter Brückenlänge und je auf ein Geleise berechnet, für einige Grundtypen zusammenzustellen.

Fig. 95.



Anordnung 1. Wie in beistehender Figur 95 skizzirt ist, ruhen die beiden Schienenstränge mittelst gewöhnlicher Querschwellen auf dèn Hauptträgern unmittelbar auf; die Entfernung der Querschwellen betrage 0,9^{m}. —. Das Gewicht der Fahrbahn (ohne die diagonale Windverstrebung beträgt per laufenden Meter:

2 Fahrschienen per laufenden Meter, incl. Befestigungsmitteln je 40 Kilo wiegend	80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen je 2,5^{m} lang $^{24}/_{15}$ ^{cm} stark per Stück 67,5 Kilo wiegend	75 „
2,2 Quadratmeter eichene Bedielung von 7^{cm} Dicke	115 „
Hiezu für Platten, Schrauben etc.	15 „
	285 Kilo.

Fig. 95^{a}.

Anordnung 2. Die in Fig. 95^{a} dargestellte Anordnung ist immer möglich, wenn die Schienenoberkante nicht mehr als 0,75^{m} unterhalb der Oberkante der Hauptträger liegt; die Schienen ruhen mittelst Querschwellen auf besondern Zwischenträgern, sog. Schwellenträgern auf, letztere auf Querträgern, welche in Entfernungen von 1,8^{m} gedacht sind; die Fahrbahn (ohne Diagonalverbindungen) wiegt per laufenden Meter:

2 Fahrschienen à 40 Kilo	80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen je 2,5^{m} lang $^{24}/_{15}$^{cm} stark, je 67 Kilo wiegend	75 „
2,2 Quadratmeter eichene Bedielung von 7^{cm} Dicke	115 „
2 Schwellenträger je 45 Kilo per laufenden Meter wiegen sammt Befestigung	120 „
$\frac{1,0}{1,8}$ Querträger je circa 360 Kilo wiegend . . .	200 „
	590 Kilo,

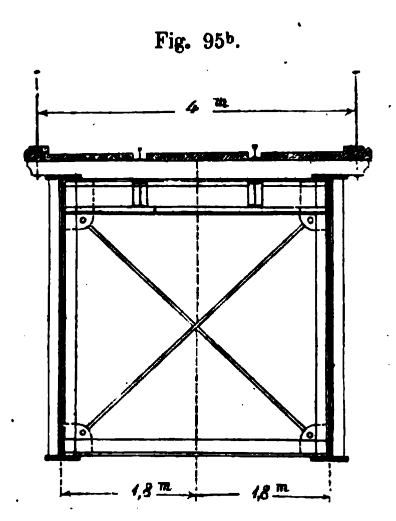
worunter 320 Kilo Eisengewicht (excl. Schienen).

Anordnung 3. Wie in Fig. 95^{b} dargestellt, so kann bei sonst gleicher Anordnung ein Seitengeländer nothwendig werden, wodurch das Gewicht der Fahrbahn sich erhöht; die durch die Höhe der Hauptträger bedingte 2te Querverbindung bleibt bei der folgenden Gewichtberechnung ausser Betracht, da diese Con-

structionstheile von der Trägerhöhe abhängig und somit veränderlich sind.

Indem im Uebrigen die Entfernung der Querträger mit 1,8 Meter beibehalten wird, berechnet sich das Gewicht der Fahrbahn per laufenden Meter:

Fig. 95b.



2 Fahrschienen à 40 Kilo	80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen, je 4,5m lang, 24/15cm stark, je 120 Kilo wiegend	133 „
4,0 Quadratmeter eichene Bedielung von 7 Cent. Dicke	210 „
2 Schwellenträger je 45 Kilo per laufenden Meter wiegend sammt Befestigung	120 „
$\frac{1,0}{1,8}$ Querträger zu circa 360 Kilo	202 „
Das Geländer mag per laufenden Meter je 35 Kilo, somit beiderseitig zusammen wiegen	70 „
	813 Kilo,

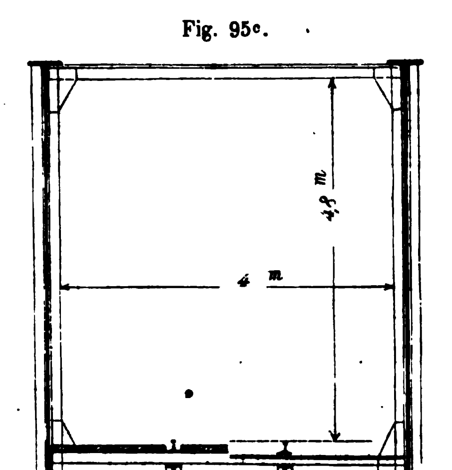
worunter excl. Geländer 322 Kilo Eisengewicht.

Anordnung 4. Wenn die Schienenoberkante mehr als 1,2m unterhalb der Trägeroberkante liegt, so muss die lichte Weite zwischen den Hauptträgern mindestens 4,0m betragen; in Fig. 95c ist ein Fall dargestellt, wo die Fahrbahn möglichst tief gelegt ist und wegen der grossen Trägerhöhe oberhalb eine 2te Querverbindung angebracht ist. — Die lichte Entfernung von der Schienenoberkante zur obern Querverbindung soll wenigstens 4,8 m

betragen (diese Massangaben entsprechen dem Normalprofil des Vereins deutscher Eisenbahnen). — Die Entfernung der Querträger sei wieder 1,8^{m}.

Das Gewicht der Fahrbahn (ohne die 2te Querverbindung und ohne die Diagonalverbindungen) beträgt:

Fig. 95c.



2 Fahrschienen	80 Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen, je 5,5^{m} lang, $^{24}/_{15}$ ^{cm} stark, je 120 Kilo wiegend	133 „
4,0 Quadratmeter eichene Bedielung von 7^{cm} Dicke	210 „
2 Schwellenträger je 45 Kilo per laufenden Meter wiegend sammt Befestigung	120 „
$\frac{1,0}{1,8}$ Querträger, je circa 520 Kilo wiegend . . .	288 „
	831 Kilo,

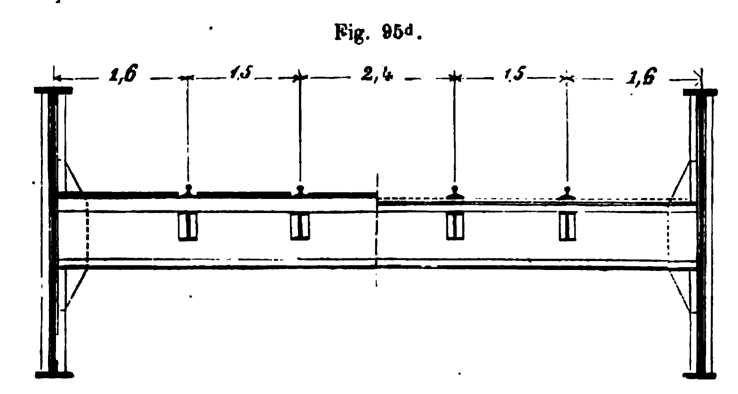
worunter 408 Kilo Eisengewicht.

Hätte man die Entfernung der Querträger grösser, z. B. gleich 2,7^{m} genommen, so hätte sich das Gewicht nicht wesentlich vermehrt; die Schwellenträger wären per laufenden Meter allerdings bedeutend schwerer geworden, wogegen das Querträgergewicht, auf den laufenden Meter reducirt, entsprechend geringer geworden wäre.

Anordnung 5. Es sind 2 Geleise zwischen den 2 Hauptträgern angenommen, wobei, wie aus Fig. 70 ersichtlich, eine Distanz der Hauptträger gleich 8,6^{m} angenommen ist. — Die Entfernung der Querträger betrage 3,6^{m}, auf welche Weite die Last durch

die Schwellenträger übertragen werden muss. Das Gewicht der Fahrbahn berechnet sich per laufenden Meter für 2 Geleise:

Fig. 95d.



4 Fahrschienen à 40 Kilo	160	Kilo
$\frac{1,0}{0,9}$ Querschwellen, je 8,5^m lang, $^{24}/_{15}$ ^{cm} stark, je 225 Kilo wiegend	252	"
7,6 Quadratmeter eichene Bedielung von 5^{cm} Stärke	400	"
4 Schwellenträger, per laufenden M. mit Befestigung 125 Kilo wiegend	500	"
$\frac{1,0}{3,6}$ Querträger, je 1830 Kilo wiegend	508	"
	1820	Kilo,

somit per laufenden Meter für ein Geleise 910 Kilo, worunter 504 Kilo Eisengewicht; je nach den bestehenden Verhältnissen kann dieses Gewicht vermindert werden, indem man den Querträgern und Schwellenträgern eine grössere Höhe giebt, wodurch der Gurtungs-Querschnitt derselben verringert wird.

Aus vorstehenden für die Anordnungen 1—4 gegebenen Berechnungen kann der Werth der Grössen F' und F'' in Gleichung 105) sowohl für Gesammtgewicht als für das Eisengewicht der Fahrbahn entnommen werden und erhält man das durchschnittliche Gewicht einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke wie folgt:

$$\text{Totalgewicht } p = 35\, l + F' + F''$$
$$\text{Eisengewicht } p_1 = 35\, l + F'.$$

70. Die grösste Belastung, welche Strassenbrücken ausser ihrem Eigengewichte auszuhalten haben, besteht theils in einem Menschengedränge, theils in schweren Lastwagen.

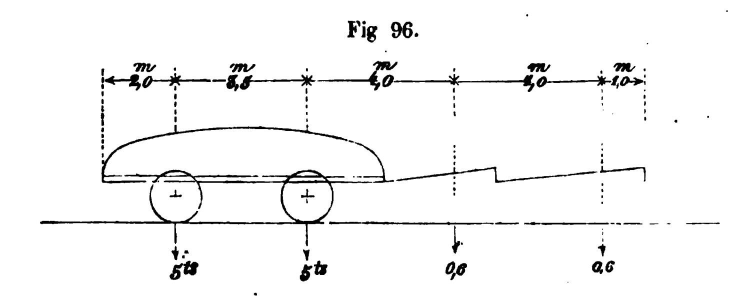
Die Belastung durch Menschengedränge wird zu 360 Kilo per □^{m} angenommen; bei Bestimmung der Dimensionen der Hauptträger ist diese Belastung nicht nur für die Fusswege in Rechnung zu ziehen, sondern sie giebt auch für die Fahrbahn

der Fuhrwerke dann in der Regel die grösste Ueberlast, wenn die Spannweite gross ist.

Für die Berechnung der einzelnen Theile der Fusswege, z. B. Consolen, Zwischenträger, Bedielung, soll eine Belastung von 560 Kilo per Quadratmeter gerechnet werden, indem letztere Belastung dann eintritt, wenn die Menschen so dicht stehen, dass dieselben sich nicht mehr bewegen können.

Die Belastung mit Lastwagen ist für die eigentliche Fahrbahn der Brücke massgebend, dessgleichen für die Hauptträger der Brücken kleinerer Spannweite; bei Brücken mittlerer Spannweite wird der hinter den Lastwagen befindliche Theil der Fahrbahn mit Menschen besetzt angenommen

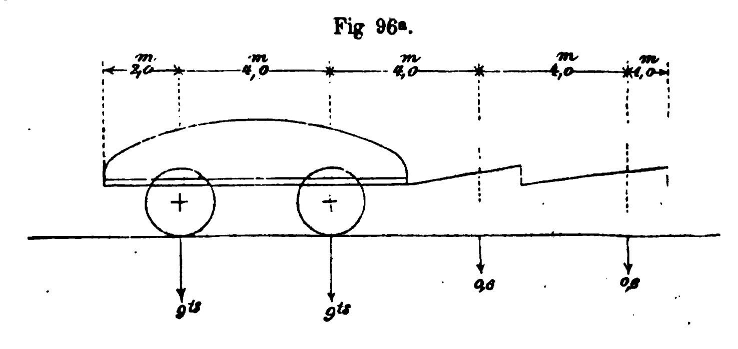
Fig 96.



In Figur 96 ist für schweres Landfuhrwerk die Vertheilung der Lasten angegeben; es entspricht diess einem Gesammtgewicht eines belasteten Wagens von 10 tons, während das Gewicht zweier Pferde zu 0,6 tons angenommen ist (wobei die Zahl der Pferde von den näheren Umständen abhängig ist).

Bei bedeutenderen Strassen, insbesondere in der Nähe von grösseren Städten, muss ein höheres Wagengewicht gerechnet werden; es können z. B. schwere Maschinen, Geschütze, Dampfkessel transportirt werden; für diese grössten Lasten ist per Axe 9 tons zu rechnen, wie untenstehende Figur 96ª des Näheren angiebt.

Fig 96ª.



Bei solchen **schwersten** Wagen braucht die gleichzeitige Passage mehrerer Fuhrwerke nicht in Rechnung genommen zu werden; diese grössten Lasten kommen daher nicht sowohl bei den Hauptträgern, als vielmehr bei der Construction der Fahrbahn in Betracht. —

Brücken, deren Fahrbahn für die in Fig. 96ᵃ skizzirten Lastwagen berechnet ist, können jederzeit für eine Eisenbahn benützt werden, welche mit Pferden oder Locomotiven, deren Axgewicht das der Wagen nicht übersteigt, betrieben wird.

Aus den in jedem speziellen Falle angenommenen Belastungen berechnen sich die grössten Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ nach den Gleichungen 100)—102). — Für Strassenbrücken von 5 bis 5,5^m Fahrbahnbreite ist (zunächst abgesehen von den Fusswegen) die ungünstigste Stellung zweier nebeneinander befindlichen Landfuhrwerke (Fig. 96) zu rechnen, wozu ein hinter den Wagen befindliches Menschengedränge hinzukommt, wie in Fig. 96ᵇ dargestellt ist; hienach sind in Tabelle XVIII für die Spannweiten von 7—30 Meter die grössten Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für eine Fahrbahnbreite von 5,5^m berechnet und zwar ist diejenige per laufenden Meter gleichförmig vertheilte Last k bestimmt, welche dasselbe max $\mathfrak{M}$ hervorrufen würde.

Fig. 96ᵇ.

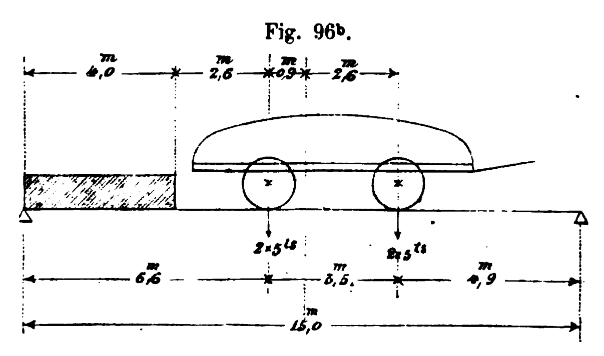


Tabelle XVIII.

Spannweite.	7^m	10^m	15^m	20^m	30^m
gleichförmig vertheilte Ueberlast k per laufenden Meter	3215	2910	2470	2080	1854

Da auf die angenommene Fahrbahnbreite von 5,5^m das Menschengedränge per laufenden Meter 55 × 360 = 1980 Kilogr. antrifft, so ersieht man aus Tabelle XVIII., dass bei Spannweiten von über 25 Meter die Belastung mit Menschengedränge für die Hauptträger massgebend ist.

In Tabelle XIX. sind nunmehr diejenigen zufälligen Belastungen zusammengestellt, welche für Strassenbrücken von 7,5^m Totalbreite (wovon 2^m für die Fusswege) als grösste Belastung für Berechnung der Hauptträger angenommen werden dürfen:

Tabelle XIX.
Zufällige Belastung für Berechnung der Hauptträger von Strassenbrücken.

Spannweite.	7^m	10^m	15^m	20^m	über 25^m
Belastung der 5,5^m breiten Fahrbahn mit 2 Landfuhrwerken, beziehungsweise Menschengedränge.	3215	2910	2470	2080	1980
Belastung der 2 Meter breiten Fusswege mit Menschengedränge.	720	720	720	720	720
zus. per laufenden Meter bei 7,5^m Breite.	3935	3630	3190	2800	2700

Wenn die Breite einer Brücke von 7,5^m abweicht, so kann man die auf die Hauptträger treffenden Belastungen durch einfache Betrachtungen aus Tabelle XIX. ableiten, indem im Allgemeinen die Belastung proportional der Breite der Fahrbahn anzunehmen ist. —

Bei Berechnung der Bestandtheile der Fahrbahn, als Querträger, Zwischenträger, sind die in Fig. 71 und 72 skizzirten Lastwagen in Rechnung zu ziehen, je nachdem die Strasse höheren oder niederen Ranges ist; übrigens muss auch hier (wie bei den Hauptträgern) das Eigengewicht der Brücke in Rechnung gezogen werden, welches bei vorhandener Beschotterung sehr bedeutend sein kann.

Bei Berechnung der Bestandtheile der Fusswege (Trottoirs) wird, wie schon angeführt, eine grösste Belastung von 560 Kil. per Quadratmeter angenommen. —

71. Für Vergleichung der Eigengewichte der Strassenbrücken wird ebenso wie bei den Eisenbahnbrücken das Gewicht der Hauptträger und das der Fahrbahn ausgeschieden, indem in der Gleichung

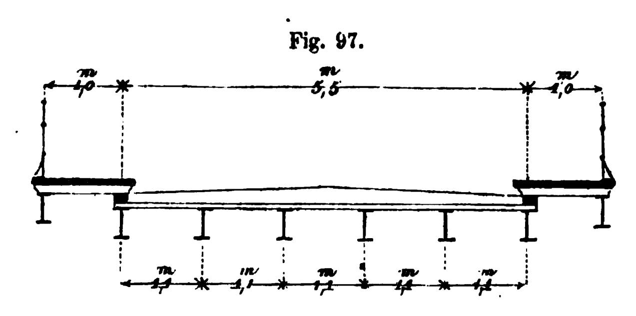
$$p = C \cdot l + F \quad \quad 106)$$

l die Spannweite, C . l das Gewicht der Hauptträgerconstruction und F das Gewicht der Fahrbahn per laufenden Meter bezeichnet; es sind hiebei Brücken mit Beschotterung und solche mit einfacher Holzüberlage wesentlich zu unterscheiden, wie aus der folgenden Zusammenstellung einiger Fahrbahngewichte erhellt. —

Anordnung 1. Die Breite der Fahrbahn ist, wie in allen zu vergleichenden Fällen, zu 5,5^m, die der beiden Fusswege zu

je 1ᵐ angenommen; wie aus Fig. 97 ersichtlich, ist bei dieser Anordnung vorausgsetzt, dass die Träger unterhalb der Fahrbahn liegen, und hiebei einander so nahe gestellt sind, dass keine Querträger nothwendig werden.

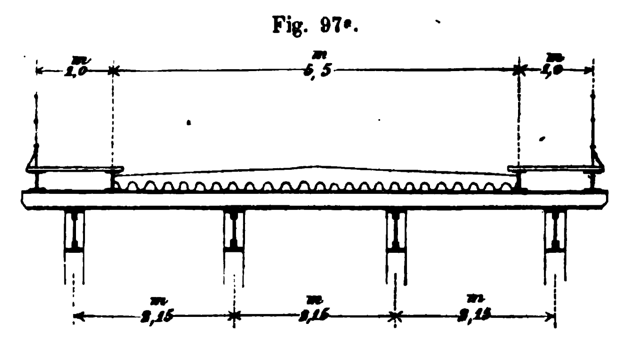
Fig. 97.



Fahrbahn-Gewicht per laufenden Meter.	a) bei Anwendung von 0,2ᵐ dicker Beschotterung und schwersten Lastwagen.	b) bei Anwendung doppelter eichener Bedielung und schwerer Landfuhrwerke.
Befestigung der Fahrbahn und des Trottoirs . .	30ᵏ	30ᵏ
Geländer	70	70
5,5 □ᵐ Wellenblech von 6ᵐᵐ Dicke	330	—
zus. Eisengewicht:	430ᵏ	100ᵏ
Trottoirschwelle von Eichenholz	30	30
Trottoirbelag von 8ᶜᵐ dickem Eichenholz . . .	120	120
Doppelte eichene Bedielung der Fahrbahn 14ᶜᵐ dick	—	600
Beschotterung 0,2ᵐ dick (incl. Kiesabschlussschwelle	2400	—
total:	2980ᵏ	850ᵏ

Anordnung 2. Wenn Höhe genug vorhanden und die Spannweite grösser ist, kann die in Fig. 97ᵃ skizzirte Anordnung gewählt werden, welche eine geringere Anzahl von Hauptträgern erfordert.

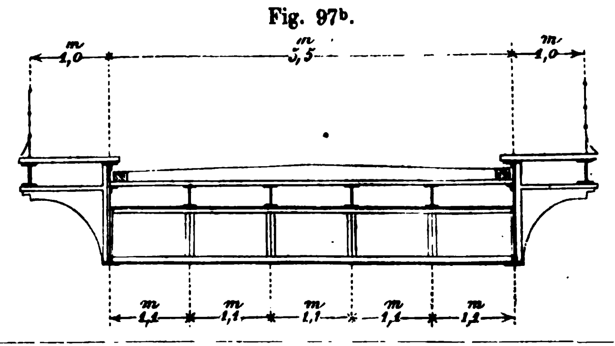
Fig. 97ᵃ.



Fahrbahn-Gewicht per laufenden Meter.	a) bei Anwendung von 0,2m dicker Beschotterung und schwersten Lastwagen.	b) bei Anwendung doppelter eichener Bedielung und schwerer Landfuhrwerke.
Querriegel von I Eisen in Entfernung von 1,1m	240k	210k
4 Trottoirträger	140	140
Geländer	70	70
Befestigung der Fahrbahn	30	30
5,5 □m Wellenblech von 6mm Dicke	330	—
zus. Eisengewicht:	810k	450k
Trottoirbelag von Eichenholz	120	120
Doppelte eichene Bedielung der Fahrbahn . . .	—	600
0,2m dicke Beschotterung	2400	—
total:	3330k	1170k

Anordnung 3. Es ist hier vorausgesetzt, dass die Höhe der beiden Hauptträger nicht über die Trottoirs hinausrage, so dass erstere zum Auflegen des Fusswegs benützt werden können.

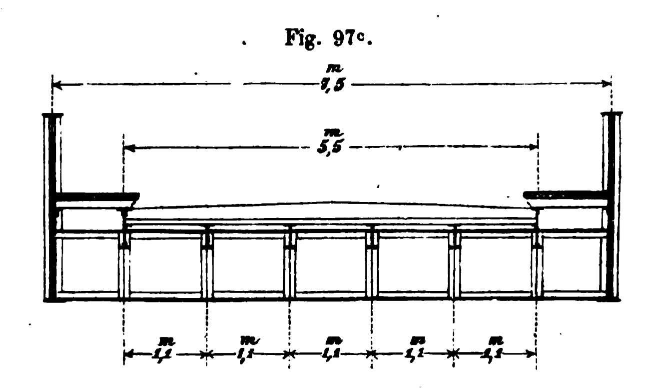
Fig. 97b.



Fahrbahn-Gewicht per laufenden Meter.	a) bei Anwendung von 0,2m dicker Beschotterung und schwersten Lastwagen.	b) bei Anwendung doppelter eichener Bedielung und schwerer Landfuhrwerke.
Querträger in Entfernungen von 3m	300k	180k
4 Zwischenträger zus.	340	180
Consolen	120	120
Träger auf den Consolen	80	80
Befestigung der Fahrbahn	50	50
Geländer	70	70
5,5 □m Wellenblech von 6mm	330	—
zus. Eisengewicht:	1290k	680k
Trottoirbelag von Eichenholz	120	120
Doppelte eichene Bedielung der Fahrbahn . . .	—	600
0,2m dicke Beschotterung derselben	2400	—
total:	3810k	1400k

Anordnung 4. Wenn die Hauptträger über die Trottoirhöhe hinausragen, ist es meist zweckmässig, auch die Fusswege zwischen den Hauptträgern anzubringen.

Fig. 97c.



Fahrbahn-Gewicht per laufenden Meter der Brücke.	a) bei Anwendung von 0,2 m dicker Beschotterung und schwersten Lastwagen.	b) bei Anwendung doppelter eichener Bedielung und schwerer Landfuhrwerke.
Querträger in 3m Entfernung	660k	400k
6 Fahrbahnträger	510	270
Befestigung von Fahrbahn und Trottoir	80	80
5,5 □m Wellenblech von 6mm Dicke	330	—
zus. Eisengewicht:	1580k	750k
Trottoirbelag von Eichenholz	120	120
Doppelte eichene Bedielung der Fahrbahn	—	600
0,2m dicke Beschotterung	2400	—
total:	4100k	1470k

Nachdem die Fahrbahngewichte und durch Tabelle XIX. auch die grössten zufälligen Belastungen bekannt sind, lässt sich zunächst für Brücken von 7,5m Breite die Belastung der Hauptträger entwickeln und mit den in Tabelle XVI. und XVII. enthaltenen Belastungen der Eisenbahnbrücken vergleichen, indem man übrigens berücksichtigen muss, dass in den letztgenannten Tabellen auch das Hauptträgergewicht inbegriffen ist.

Auf Grund dieser Betrachtungen kann man den Coefficienten C des Hauptträgergewichts für eiserne Strassenbrücken von 7,5m, bei Brücken mit Beschotterung auf 42 und bei Brücken mit Holzbelag auf 28 für vorläufige Berechnungen annehmen und bestimmt sich hienach das mittlere Eigengewicht p eiserner Strassenbrücken von 7,5m Totalbreite:

a) bei Anwendung von $0{,}2^m$ dicker Beschotterung

$$p = 3600 + 42\,l$$

b) bei Anwendung von doppelter eichener Bedielung

$$p = 1300 + 28\,l$$

Will man jedoch nur das Eisengewicht p′ und zwar exclusive etwaigem Wellenblech oder sonstiger eiserner Schotter-Unterlage überschlagen, so kann man setzen:

$$\text{ad a) } p' = 900 + 42\,l$$

$$\text{ad b) } p' = 600 + 28\,l$$

wobei bezüglich genauerer Angabe der Fahrbahngewichte auf die vorstehenden Anordnungen 1—4 verwiesen wird.

Wenn die Gesammtbreite der Brücke von $7{,}5^m$ abweicht, so ist p (beziehungsweise p′) entsprechend den vorliegenden Verhältnissen zu modificiren.

§. 8. Continuirliche Träger.

72. Bei den continuirlichen Trägern sind, wie schon in N°. **20** erwähnt, die Rückwirkungen der Stützpunkte (Auflagerdrücke) nicht als bekannt anzunehmen, da die Bedingungen des Gleichgewichts nicht mehr unmittelbar zur Auffindung dieser Kräfte ausreichen.

Das Verfahren, mittelst dessen man diese Auflagerdrücke auffindet, ist in N°. **21** und **22** allgemein beschrieben, und zwar ist in diesen Nummern das zuerst von Clapeyron angewendete Verfahren angegeben, wonach, mit Umgehung der doppelten Integration, zunächst die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ auf den Stützen, und aus diesen sodann die Auflagerdrücke etc. abgeleitet werden.

Wenn die Spannweiten nicht zu gering sind (was bei continuirlichen Trägern ohnedem nicht rathsam ist), so darf im Allgemeinen, wie beim frei aufliegenden Träger, das Eigengewicht und die zufällige Last je auf eine gewisse Länge gleichförmig vertheilt angenommen werden, und werden, ähnlich wie beim einfachen Träger, bezeichnen:

p das Eigengewicht der Brücke,
k die zufällige Last,
$q = p + k$ die Totallast

und zwar je auf die Längeneinheit einer Brückenöffnung berechnet.

Immerhin kommen aber in der Praxis Fälle vor, wo man concentrirte Lasten durch eine gleichförmig vertheilte Last nicht ersetzen kann, auch ist es überdies zur Klarstellung des Sachverhalts nothwendig, dass man sich über die Wirkung einzelner concentrirter Lasten genaue Rechnung geben kann.

Indem wir desshalb im Nachfolgenden die allgemeinen Formeln in solcher Gestalt aufstellen, dass dieselben auch für con-

centrirte Lasten angewendet werden können, so setzen wir uns, wie beim einfachen Träger, die Aufgabe, für beliebige Stellung eines aus Locomotiven und Wagen zusammengesetzten Bahnzuges die Werthe von 𝔐 und 𝔙 in jedem Querschnitt zu finden, und sodann für einen bestimmten Querschnitt x diejenige Zugstellung ausfindig zu machen, für welche 𝔐 und 𝔙 Maximum werden. Die Umhüllungslinie der Max. 𝔐 und 𝔙 werden wir sodann wenigstens für gleichförmige Belastung ableiten.

Anmerkung. Wir benützen im Folgenden vorzugsweise die Abhandlung von Dr. Weyrauch »Continuirliche Träger«, in welcher der Einfluss concentrirter Lasten auf continuirliche Träger auf allgemeinste Weise behandelt ist.

Es sei AB eine beliebige Oeffnung eines continuirlichen Trägers von n Oeffnungen, die Bezeichnungen seien die in N°. **21.** gewählten, mit dem Unterschied jedoch, dass statt einer gleichförmig vertheilten Last q eine Anzahl Einzellasten G, am Hebelsarme g (von A aus gerechnet) in der Oeffnung AB vorhanden sei.

Indem wir den gleichen Gang der Rechnung verfolgen wie in N°. **21**, so schreiben sich die Gleichungen I. bis VII. dieser N°. folgendermassen an:

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -\mathfrak{M}_x = -\mathfrak{M} + \Sigma_0^x G(x-g) + A_B . x \quad . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

ferner die Vertikalkraft rechts vom Auflager A

$$A_B = \frac{1}{l}\left[\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1 - \Sigma_0^l G(l-g)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

Durch Integration der Gleichung I. erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{1}{E\Theta}\int_0^x \Sigma_0^x G(x-g) + A_B \frac{x^2}{2E\Theta} - \frac{\mathfrak{M}x}{E\Theta} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{III.}$$

oder da

$$\int_0^x \Sigma_0^x G(x-g) = {}^1/_2\, \Sigma_0^x G(x-g)^2 \; ^{*)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \frac{1}{2E\Theta}\left[\Sigma_0^x G(x-g)^2 + A_B . x^2 - 2\,\mathfrak{M}x\right] \quad . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

woraus

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2E\Theta}\left[\Sigma_0^l G(l-g)^2 + A_B l^2 - 2\,\mathfrak{M}l\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{V.}$$

Durch nochmalige Integration von IV. erhält man sodann, da

$$\int_0^x \Sigma G(x-g)^2 = \frac{1}{3}\Sigma(x-g)^3 \; ^{*)}$$

$$y = c + \alpha . x + \frac{1}{6E\Theta}\left[\Sigma G(x-g)^3 + A_B x^3 - 3\,\mathfrak{M}x^2\right] \quad . \; . \; . \quad \text{V}^a.$$

---

*) Vergl. J. Weyrauch, Continuirliche Träger S. 168.

für $x = l$ wird $y = c_1$, somit

$$c_1 = c + \alpha\, l + \frac{1}{6E\Theta}\left[\Sigma\, G\,(l-g)^3 + A_B\, l^3 - 3\,\mathfrak{M}\, l^2\right]$$

und wenn man in Beziehung auf α auflöst und den Werth von A_B aus II. einsetzt, nach einiger Reduction:

$$\alpha = \frac{c_1 - c}{l} + \frac{1}{6E\Theta}\left[2\,\mathfrak{M}\, l + \mathfrak{M}_1 l + \frac{1}{l}\,\Sigma_0^l\, Gg\,(l-g)\,(2\,l-g)\right] \quad \text{VI.}$$

Setzt man diesen Werth von α in Gleichung V. ein, indem man zugleich für A_B seinen Werth aus II. einführt und reducirt, so folgt:

$$\alpha_1 = \frac{c_1 - c}{l} - \frac{1}{6E\Theta}\left[2\,\mathfrak{M}_1 l + \mathfrak{M}\, l + \frac{1}{l}\,\Sigma^l\, Gg\,(l-g)\,(l+g)\right] \quad \text{VII.}$$

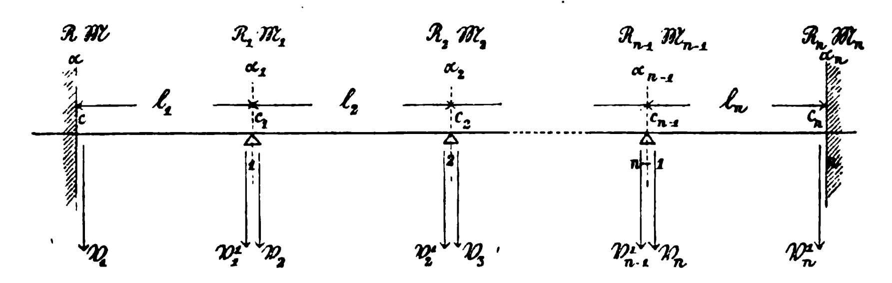
Anmerkung. Die Gleichungen VI. und VII. unterscheiden sich von den gleichnamigen der No. **21**. nur dadurch, dass wir hier statt des Ausdrucks $\frac{ql^3}{24E\Theta}$ etwas complicirtere Summenausdrücke erhalten haben. Führen wir statt der Einzelkräfte G eine gleichförmig vertheilte Last q ein, so gehen die Summenausdrücke in die der No. **21** über, denn es ist, wenn $G = q\,dg$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{l}\,\Sigma_0^l\, Gg\,(l-g)\,(2\,l-g) = \frac{1}{l}\int_0^l q\,dg\,.\,g\,(l-g)\,(2\,l-g) = \frac{ql^3}{4}.$$

73. Wir können nun in gleicher Weise, wie diess in No. **22** geschehen, die Gleichungen VI. und VII. der vorigen Nummer für jede Stütze anschreiben, einfacher und für die folgenden Erörterungen passender ist aber die nachfolgende Form der Gleichungen.

Um den Formeln möglichste Allgemeinheit zu geben, führen wir die in nachstehendem Schema Fig. 98 enthaltenen Bezeich-

Fig. 98.



nungen ein, wonach für die m^{te} Oeffnung eines beliebigen continuirlichen Trägers bedeutet:

$\mathfrak{M}_{m-1}$ Moment auf der linkseitigen Stütze m—1,

$\mathfrak{M}_m$ „ „ „ rechtseitigen „ m,

$\mathfrak{V}_m$ die Vertikalkraft zunächst der linkseitigen Stütze m—1,

$\mathfrak{V}'_m$ „ „ „ „ rechtseitigen „ m (Richtung nach unten positiv).

Wir erhalten sodann aus Gleichung VII. für den Winkel α_m der elastischen Linie auf der rechtseitigen Stütze m:

$$\alpha_m = \frac{c_m - c_{m-1}}{l_m} - \frac{1}{6E\Theta}\left[2\,\mathfrak{M}_m l_m + \mathfrak{M}_{m-1} l_m + \frac{1}{l_m}\,\Sigma_m Gg(l-g)(l+g)\right] \quad . \quad \text{I.}$$

ebenso für den Winkel α_m in der Spannweite l_{m+1} am linkseitigen Stützpunkt m aus Gleichung VI.

$$\alpha_m = \frac{c_{m+1} - c_m}{l_{m+1}} + \frac{1}{6E\Theta}\left[2\,\mathfrak{M}_m l_{m+1} + \mathfrak{M}_{m+1} l_{m+1} + \frac{1}{l_{m+1}}\,\Sigma_{m+1} Gg(l-g)(2l-g)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

und durch Gleichsetzung beider Werthe und Reduction:

$$\mathfrak{M}_{m-1} l_m + 2\,\mathfrak{M}_m (l_m + l_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1} l_{m+1} = 6E\Theta\left(\frac{c_m - c_{m-1}}{l_m} - \frac{c_{m+1} - c_m}{l_{m+1}}\right) - \frac{1}{l_m}\Sigma_m Gg(l-g)(l+g) - \frac{1}{l_{m+1}}\Sigma_{m+1} Gg(l-g)(2l-g) \quad . \quad \text{III.}$$

Für die Endöffnungen eines continuirlichen Trägers erhalten wir aus Gleichung II. und I., indem für die erste Oeffnung in Gleichung II. m = 0, für die letzte in Gleichung I. m = n einzuführen ist:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathfrak{M} l_1 + \mathfrak{M}_1 l_1 &= \left[\alpha - \frac{c_1 - c}{l_1}\right] 6E\Theta - \frac{1}{l_1}\Sigma_1 Gg(l-g)(2l-g) \\ \mathfrak{M}_{n-1} l_n + 2\,\mathfrak{M}_n l_n &= \left[\frac{c_n - c_{n-1}}{l_n} - \alpha_n\right] 6E\Theta - \frac{1}{l_n}\Sigma_n Gg(l-g)(l+g) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

Wir setzen zur Vereinfachung der Gleichungen III. und IV. die Ausdrücke rechts des Gleichheitszeichens = R, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} R_m &= 6E\Theta\left(\frac{c_m - c_{m-1}}{l_m} - \frac{c_{m+1} - c_m}{l_{m+1}}\right) - \frac{1}{l_m}\Sigma_m Gg(l-g)(l+g) - \frac{1}{l_{m+1}}\Sigma_{m+1} Gg(l-g)(2l-g) \\ R &= \left(\alpha - \frac{c_1 - c}{l_1}\right) 6E\Theta - \frac{1}{l_1}\Sigma_1 Gg(l-g)(2l-g) \\ R_n &= \left(\frac{c_n - c_{n-1}}{l_n} - \alpha_n\right) 6E\Theta - \frac{1}{l_n}\Sigma_n Gg(l-g)(l+g) \end{aligned}\right\} \quad . \quad 107)$$

Anmerkung. In den Gleichungen I. bis IV. und 107) sind die unter dem Summenzeichen Σ stehenden Grössen mit demselben Index versehen anzunehmen, den das Zeichen Σ trägt.

Wenn wir dann für jede der n—1 Mittelstützen die Gleichung III. und für die Endstützen die Gleichung IV. anschreiben, so erhalten wir folgende n + 1 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll}
1^{\text{te}}\text{ Endstütze} & 2\mathfrak{M}l_1 + \mathfrak{M}_1 l_1 & = R \\
1^{\text{te}}\text{ Mittelstütze} & \mathfrak{M}l_1 + 2\mathfrak{M}_1(l_1+l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 & = R_1 \\
\dots & \dots & \dots \\
m^{\text{te}}\text{ Mittelstütze} & \mathfrak{M}_{m-1} l_m + 2\mathfrak{M}_m(l_m + l_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1} l_{m+1} & = R_m \\
\dots & \dots & \dots \\
\text{letzte } (n-1^{\text{te}})\text{ Mittelstütze} & \mathfrak{M}_{n-2} l_{n-1} + 2\mathfrak{M}_{n-1}(l_{n-1}+l_n) + \mathfrak{M}_n l_n & = R_{n-1} \\
\text{Endstütze} & \mathfrak{M}_{n-1} l_n + 2\mathfrak{M}_n l_n & = R_n
\end{array}\right\} \quad 107^a)$$

Die erste und letzte der Gleichungen 107ᵃ) sind nur nothwendig für Träger mit eingespannten Enden, wenn die Winkel α und α_n, welche die Axe des Trägers an den Endauflagern mit der Horizontalen bildet, gegeben sind. Liegt der Träger auf den Endstützen frei auf, so ist zu setzen $\mathfrak{M} = 0$ $\mathfrak{M}_n = 0$ und können dann die Gleichungen zu Bestimmung der Unbekannten α und α_n dienen (die jedoch für die Praxis meist kein Interesse haben).

Die übrigen n—1 Gleichungen reichen zur Bestimmung der unbekannten Stützenmomente (auf den n—1 Mittelstützen) vollkommen aus, die Gleichungen sind vom 1ten Grad und durch Elimination leicht zu lösen, wie in jedem speciellen Fall gezeigt werden soll. Eine allgemeine Lösung kann hier unterbleiben.

Nachdem mit Hülfe der Gleichungen 107) und 107ᵃ) die Stützenmomente berechnet sind, können die sämmtlichen übrigen Grössen, welche auf die Berechnung des Trägers Bezug haben, ohne Schwierigkeit bestimmt werden. — Legen wir die Bezeichnungen der Fig. 98 zu Grunde, so ist für die mte Oeffnung eines Trägers, deren Spannweite $= l_m$ weiterhin:

Vertikalkraft zunächst der linkseitigen Stütze aus Gl. II. der N°. **72**:

$$\mathfrak{V}_m = \frac{1}{l_m}\left[\mathfrak{M}_{m-1} - \mathfrak{M}_m - \Sigma_0^l G(l-g)\right] \quad \dots \quad 108)$$

somit die Vertikalkraft zunächst dem rechtseitigen Auflager (links desselben)

$$\mathfrak{V}'_m = \mathfrak{V}_m + \Sigma G$$

$$= \frac{1}{l_m}\left[\mathfrak{M}_{m-1} - \mathfrak{M}_m + \Sigma_0^l Gg\right] \quad \dots \quad 108^a)$$

sodann die Vertikalkraft an beliebiger Stelle, deren Abscisse $= x$

$$\mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_m + \Sigma_0^x G \quad \dots \quad 109).$$

Nach dem Hebelgesetz ist weiterhin das Moment im Querschnitt x

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{m-1} - \Sigma_0^x G(x-g) - \mathfrak{V}_m x \quad \dots \quad 110)$$

Anmerkung. Differenzirt man Gleichung 109) nach x, so erhält man

$$\frac{d\,\mathfrak{M}_x}{dx} = -\frac{d\,\Sigma_0^x G(x-g)}{dx} - \mathfrak{V}_m$$

$$= -\Sigma_0^x G - \mathfrak{V}_m = -\mathfrak{V}_x \quad \dots \quad 17^a)$$

womit der in N°. **5** für frei aufliegende Träger aufgestellte Satz auch für continuirliche Träger bei beliebiger Belastung allgemein bewiesen ist.

Die Auflagerreactionen der Pfeiler sind aus den Vertikalkräften zunächst des Auflagers leicht zu bestimmen, indem offenbar die Vertikalkraft rechts des Auflagers die Resultante ist aus der Vertikalkraft links und der Auflagerreaction. Nennen wir A_m die Auflagerreaction auf der Stütze m, so folgt aus Obigem

$$\mathfrak{V}_{m+1} = \mathfrak{V}'_m + A_m$$

woraus

$$A_m = \mathfrak{V}_{m+1} - \mathfrak{V}'_m \quad . \; . \; . \; . \qquad V.$$

Ist das fragliche Feld ein Endfeld, so lässt sich der Auflagerdruck A, wenn der Träger in A eingespannt ist, nicht bestimmen, ausser wenn über die Art der Einspannung etwas bekannt ist (vergl. hierüber N°. **20**). Liegt aber der Träger bei A frei auf, so ist $\mathfrak{V}'_m = 0$, somit $A_0 = + \mathfrak{V}_1$. Ist A_m das letzte freie Trägerende n, so folgt ebenso $A_n = - \mathfrak{V}'_n$.

Anmerkung. Da beim freiaufliegenden Träger die Auflagerreactionen stets, bei continuirlichen Trägern meist nach oben gerichtet sind, so nimmt man häufig für diese Reactionen die Richtung nach oben als die positive an, und sind dann die Vorzeichen entsprechend zu ändern (wie wir bei Aufstellung der Gleichungen N°. 91)—95) und 101) und 102) gethan haben).

Weiterhin kann bei continuirlichen Trägern noch interessiren die Gestalt der neutralen Faser und Werth und Abscisse der grössten Einsenkung. Wir erhalten erstere aus Gleichung V^a) der N°. **72**

$$y = c + \alpha . x + \frac{1}{6E\Theta}\left[\Sigma G (x-g)^3 + \mathfrak{V}_m . x^3 - 3 \mathfrak{M}_{m-1} x^2\right] \quad 111)$$

und die Abscisse a der grössten Einsenkung, bezogen auf die schräge Linie AB, aus der Gleichung: (vergl. Fig. 30)

$$\frac{c_1 - c}{l} = \alpha + \frac{1}{2E\Theta}\left[\Sigma_0^a G (a-g)^2 + \mathfrak{V}_m a^2 - 2 \mathfrak{M}_{m-1} a\right] \quad 112)$$

und der Werth der grössten Einsenkung (vergl. N°. **22**, S. 48):

$$f_a = \left(\alpha - \frac{c_1 - c}{l}\right)a + \frac{1}{6E\Theta}\left[\Sigma G (a-g)^3 + \mathfrak{V}_m a^3 - 3 \mathfrak{M}_{m-1} a^2\right] \quad 112^a)$$

wobei α aus Gleichung VI. der N°. **72** zu berechnen ist.

74. Aus den so gefundenen Formeln der N°. **73** sind nunmehr diejenigen Stellungen der Lasten zu bestimmen, für welche $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zum Maximum werden.

Wir untersuchen zunächst den Einfluss einer Einzellast G, welche in der beliebigen Oeffnung vom Index s am Hebelsarm g angreift. Der continuirliche Träger sei an den Enden eingespannt, die Höhenlage der Stützen sei beliebig, ausserdem der ganze Träger in beliebiger Weise belastet.

Die Einzellast G erzeugt in sämmtlichen Träger-Querschnitten Aenderungen der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$, welche wir mit den entsprechenden kleinen Buchstaben $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{v}$ bezeichnen, wir erhalten für die Zunahmen der Momente auf den Stützen aus Gleichungen 107) und 107^a):

$$\left.\begin{array}{lllll}
& 2m l_1 + m_1 l_1 & \ldots & & = 0 \\
& m l_1 + 2m_1 & (l_1 + l_2) & + m_2 l_2 & = 0 \\
& m_1 l_1 + 2m_2 & (l_2 + l_3) & + m_3 l_3 & = 0 \\
\ldots & & & & \\
s-1^{te}\text{ Mittelstütze} & m_{s-2} l_{s-2} + 2m_{s-1} & (l_{s-1} + l_s) & + m_s l_s & = r_{s-1} \\
s^{te} \quad » & m_{s-1} l_s + 2m_s & (l_s + l_{s+1}) & + m_{s+1} l_{s+1} & = r_s \\
\ldots & & & & \\
& m_{n-3} l_{n-2} + 2m_{n-2} & (l_{n-2} + l_{n-1}) & + m_{n-1} l_{n-1} & = 0 \\
& m_{n-2} l_{n-1} + 2m_{n-1} & (l_{n-1} + l_n) & + m_n l_n & = 0 \\
& & m_{n-1} l_n + 2m_n l_n & & = 0
\end{array}\right\} \quad \text{I.}$$

und zwar ist in obigen Gleichungen zu setzen:

$$\left.\begin{array}{l}
r_{s-1} = -\frac{1}{l_s} G g (l - g)(2l - g) \\
r_s = -\frac{1}{l_s} G g (l - g)(l + g)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Dass die übrigen $r = 0$ sind, überzeugt man sich leicht, da nur in der Oeffnung s Kräfte zukommen, die übrigen Glieder aber sich heben.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich für die Oeffnungen $< s$ der Reihe nach:

$$m_1 = -2m, \quad m_2 = -m_1\left(2 + \frac{3}{2}\frac{l_1}{l_2}\right)$$

$$m_3 = -m_2\left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{2 + \frac{3}{2}\frac{l_1}{l_2}}\right)\right]$$

Hieraus können folgende Sätze abgeleitet werden:

1) Die Aenderungen der Momente $\mathfrak{M}$ wechseln auf benachbarten Stützpunkten in dem Vorzeichen ab.
2) Die Aenderungen wachsen in der Richtung gegen das belastete Feld und zwar so, dass jeder folgende Zuwachs von $\mathfrak{M}$ wenigstens doppelt so gross ist, als der vorhergehende.
3) Das Verhältniss der Aenderungen $\mathfrak{M}$ zwischen zwei benachbarten Stützen ist nur abhängig von der Zahl und Anordnung der Oeffnungen, nicht von Grösse und Lage der Belastung in der Oeffnung s.

Setzen wir dieses Verhältniss der Aenderungen der Stützenmomente μ, so dass

$$m_1 = -\mu_1 m, \quad m_2 = -\mu_2 m_1, \quad m_3 = -\mu_3 m_2$$

und allgemein

$$m_m = -\mu_m m_{m-1},$$

so erhält man für μ der Reihe nach folgende Werthe:

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 2 + \frac{3}{2}\frac{l_1}{l_2}, \quad \mu_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{\mu_2}\right)$$

und nach Analogie allgemein, so lange $m < s$

$$\mu_m = 2 + \frac{l_{m-1}}{l_m}\left(2 - \frac{1}{\mu_{m-1}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 113)$$

Sämmtliche Werthe von μ sind somit positiv und > 2.

Ebenso erhält man für die Oeffnungen rechts von der belasteten Oeffnung s:

$$\mathfrak{m}_{n-1} = -2\mathfrak{m}_n, \quad \mathfrak{m}_{n-2} = -\mathfrak{m}_{n-1}\left(2 + \frac{3}{2}\frac{l_n}{l_{n-1}}\right)$$

$$\mathfrak{m}_{n-3} = -\mathfrak{m}_{n-2}\left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}\left(2 - \frac{1}{2 + \frac{3}{2}\frac{l_n}{l_{n-1}}}\right)\right]$$

und wenn man wieder setzt:

$$\frac{\mathfrak{m}_{n-1}}{\mathfrak{m}_n} = -\mu'_n, \quad \frac{\mathfrak{m}_{n-2}}{\mathfrak{m}_{n-1}} = -\mu'_{n-1} \quad \frac{\mathfrak{m}_{n-3}}{\mathfrak{m}_{n-2}} = -\mu'_{n-2},$$

so erhält man für μ'

$$\mu'_n = 2, \quad \mu'_{n-1} = 2 + \frac{3}{2}\frac{l_n}{l_{n-1}}, \quad \mu'_{n-2} = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}\left(2 - \frac{1}{\mu'_{n-1}}\right)$$

und allgemein, so lange $m > s$

$$\mu'_m = 2 + \frac{l_{m+1}}{l_m}\left[2 - \frac{1}{\mu'_{m+1}}\right] \quad \ldots \ldots \quad 113^a)$$

Die durch die Gl. 113) und 113ᵃ) sich ergebenden Werthe von μ und μ' gelten auch für die Endöffnungen, denn für $m = 1$ wird $l_{m-1} = 0$ und $\mu = 2$, für $m = 2$, $\mu_2 = 2 + {}^3/_2\,\frac{l_1}{l_2}$, ähnlich für μ'.

Ist der Träger am 1ten Endpfeiler nicht eingespannt, sondern frei aufliegend, so modificiren sich die Resultate, die erste der Gleichungen I. fällt aus, in der zweiten ist $m = 0$ zu setzen und erhält man dann auf gleiche Weise wie oben für $m < s$

$$\mathfrak{m}_2 = -2\mathfrak{m}_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right), \quad \mathfrak{m}_3 = -\mathfrak{m}_2\left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)}\right)\right]$$

und für die Coefficienten μ:

$$\mu_1 = \infty, \text{ insofern } m = 0$$

$$\mu_2 = 2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right), \quad \mu_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{\mu_2}\right)$$

und allgemein, so lange $m < s$

$$\mu_m = 2 + \frac{l_{m-1}}{l_m}\left(2 - \frac{1}{\mu_{m-1}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 113^b).$$

Ebenso finden wir, wenn $m > s$

$$\mu'_n = \infty, \quad \mu'_{n-1} = 2\left(1 + \frac{l_n}{l_{n-1}}\right), \quad \mu'_{n-2} = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}\left[2 + \frac{1}{\mu'_{n-1}}\right]$$

und allgemein:

$$\mu'_m = 2 + \frac{l_{m+1}}{l_m}\left[2 + \frac{1}{\mu'_{m+1}}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 113^c).$$

Die Form der Werthe μ bleibt somit gegenüber dem allgemeinen Fall unverändert, die Gleichungen 113) und 113ᵃ) behalten auch für diesen speciellen Fall ihren Werth.

Es bleiben nun noch zu bestimmen die Zuwachse der Momente auf den Stützen der belasteten Oeffnung s, und hat man hiefür nach Gleichung I. und II.

$$\mathfrak{m}_{s-2}\, l_{s-1} + 2\,\mathfrak{m}_{s-1}\,(l_{s-1} + l_s) + \mathfrak{m}_s\, l_s = -\frac{1}{l_s}\, G g\,(l-g)(2l-g) = r_{s-1}$$

$$\mathfrak{m}_{s-1}\, l_s + 2\,\mathfrak{m}_s\,(l_s + l_{s+1}) + \mathfrak{m}_{s+1}\, l_{s+1} = -\frac{1}{l_s}\, G g\,(l-g)\,(l+g) = r_s$$

Es ist nun aber nach Obigem:

$$\mathfrak{m}_{s-2} = -\frac{\mathfrak{m}_{s-1}}{\mu_{s-1}},\quad \mathfrak{m}_{s+1} = -\frac{\mathfrak{m}_s}{\mu'_{s+1}}$$

und nehmen durch Einsetzung dieser Werthe die Gleichungen folgende Form an:

$$\mathfrak{m}_{s-1}\left(2\,l_{s-1} + 2\,l_s - \frac{l_{s-1}}{\mu_{s-1}}\right) + \mathfrak{m}_s\, l_s = r_{s-1}$$

$$\mathfrak{m}_{s-1}\, l_s + \mathfrak{m}_s\left(2\,l_s + 2\,l_{s+1} - \frac{l_{s+1}}{\mu'_{s+1}}\right) = r_s$$

oder mit Benützung der Gleichungen 113) und 113a)

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{m}_{s-1}\, l_s\, \mu_s + \mathfrak{m}_s\, l_s = r_{s-1} \\ \mathfrak{m}_{s-1}\, l_s + \mathfrak{m}_s\, l_s\, \mu'_s = r_s \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

wo μ_s das Verhältniss $\frac{\mathfrak{m}_s}{\mathfrak{m}_{s-1}}$ darstellt, wenn die Oeffnung s nicht belastet, dagegen irgend eine der rechts davon liegenden Oeffnungen belastet wird, ebenso μ'_s das Verhältniss $\frac{\mathfrak{m}_{s-1}}{\mathfrak{m}_s}$, wenn s leer, dagegen in einer der links vom s liegenden Oeffnungen Kräfte wirken.

Man erhält aus obigen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{m}_s = \dfrac{1}{l_s}\, \dfrac{r_{s-1} - r_s\, \mu_s}{1 - \mu_s\, \mu'_s} \\[2ex] \mathfrak{m}_{s-1} = \dfrac{1}{l_s}\, \dfrac{r_s - r_{s-1}\, \mu'_s}{1 - \mu_s\, \mu'_s} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Da μ und μ' positiv und > 2, so ist der Nenner dieser Ausdrücke negativ, es ist nun aber nach Gleichung II.

$$r_{s-1} = -\frac{1}{l_s}\, G g\,(l-g)\,(2l-g)$$

$$r_s = -\frac{1}{l_s}\, G g\,(l-g)\,(l+g)$$

und sieht man leicht, dass absolut genommen $r_{s-1} < 2\, r_s$, somit auch $< r_s\, \mu$, ebenso $r_s < 2\, r_{s-1}$ und $< r_{s-1}\, \mu'$, die Zähler obiger Ausdrücke sind somit positiv, und folgen hieraus unter Beachtung der schon oben erhaltenen Resultate die Sätze:

1) Eine im Felde s wirkende Einzellast erzeugt in den anliegenden Stützpunkten negative Momente,

2) in den übrigen Stützpunkten, welche durch eine gerade Zahl von Oeffnungen vom Felde s getrennt sind, negative, in den durch eine ungerade Zahl von Oeffnungen getrennten Stützpunkten positive Momente,

3) die absolute Grösse der Momente $\mathfrak{m}$ nimmt von s ausgehend, nach beiden Seiten gegen die Endstützen zu ab, und ist jedes folgende $\mathfrak{m}$ jedenfalls kleiner, als die Hälfte des zunächst vorhergehenden.

75. Die Aenderung $\mathfrak{v}$ der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ im Querschnitt x einer Oeffnung m ist nach Gleichung 109) dargestellt durch die Gleichung:

$$\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_m + \Sigma_m^x G \text{ und durch Substitution von } \mathfrak{v}_m \text{ aus 108)}$$

$$= \frac{1}{l_m} (\mathfrak{m}_{m-1} - \mathfrak{m}_m - \Sigma_o^l G (l-g) + \Sigma_o^x G.$$

Diese Gleichung reducirt sich für eine, von s verschiedene Oeffnung, für welche G = 0, auf:

$$\mathfrak{v}_x = \frac{1}{l_m} (\mathfrak{m}_{m-1} - \mathfrak{m}_m) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

somit im ganzen Feld constant = $\mathfrak{v}_m$.

Für die Oeffnungen links von s ist $\mathfrak{m}_m > \mathfrak{m}_{m-1}$, somit $\mathfrak{v}_m$ positiv., wenn $\mathfrak{m}_m$ negativ. Da nun für die belastete Oeffnung s die Stützenmomente negativ sind, so ist $\mathfrak{v}_{s-1}$ positiv, $\mathfrak{v}_{s-2}$ negativ etc.

Für die Oeffnungen rechts von s ist $\mathfrak{m}_{m-1} > \mathfrak{m}_m$, somit $\mathfrak{v}_m$ positiv, wenn $\mathfrak{m}_{m-1}$ positiv, somit aus dem oben angegebenen Grunde $\mathfrak{v}_{s+1}$ negativ, $\mathfrak{v}_{s+2}$ positiv etc.

Schreiben wir für die Oeffnung m + 1 < s die Aenderung der Vertikalkraft an, so folgt wie oben:

$$\mathfrak{v}_{m+1} = \frac{1}{l_m} (\mathfrak{m}_m - \mathfrak{m}_{m+1})$$

somit ist

$$\frac{\mathfrak{v}_{m+1}}{\mathfrak{v}_m} = \frac{\mathfrak{m}_m - \mathfrak{m}_{m+1}}{\mathfrak{m}_{m-1} - \mathfrak{m}_m} = \left\{ \frac{1 - \dfrac{\mathfrak{m}_{m+1}}{\mathfrak{m}_m}}{\dfrac{\mathfrak{m}_{m-1}}{\mathfrak{m}_m} - 1} \right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Da nun $\frac{\mathfrak{m}_{m+1}}{\mathfrak{m}_m}$ negativ und grösser als 2, so ist der Zähler positiv und > 3, der Nenner negativ und $< {}^3/_2$, somit $\frac{\mathfrak{v}_{m+1}}{\mathfrak{v}_m}$ negativ und > 3. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die Zunahme der Vertikalkräfte durch Einwirkung der Einzelkraft G in der Oeffnung s ist in den von s verschiedenen Oeffnungen constant und abwechselnd positiv und negativ, die $\mathfrak{v}$ nehmen nach dem belasteten Felde hin zu, und zwar ist für m < s

$$\mathfrak{v}_{m+1} > 3\, \mathfrak{v}_m$$

für m > s $\mathfrak{v}_m > 3\, \mathfrak{v}_{m+1}$, wobei die Werthe von $\mathfrak{v}$ absolut zu nehmen sind.

Nachdem nunmehr Momente und Vertikalkräfte in den nicht belasteten Oeffnungen nach Grösse und Vorzeichen bekannt sind, bleiben noch Momente und Vertikalkräfte (resp. deren Zunahme) in der Oeffnung l_s zu bestimmen.

Für das Stück 0 bis g hat man nach Gleichung 110) und 108)

$$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{v}_{s-1}\, x$$

$$= \mathfrak{m}_{s-1} - \frac{x}{l_s} \left[\mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{m}_s - G (l-g) \right] ; \quad \ldots\ldots \quad \text{III.}$$

und für das Stück g bis l

$$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{s-1} - \frac{x}{l_s}\left[\mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{m}_s - G\,(l-g)\right] - G\,(x-g)$$

$$= \mathfrak{m}_{s-1} - \frac{x}{l_s}\left[\mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{m}_s + Gg\right] + Gg \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

Die Kurven $\mathfrak{m}$ sind gerade Linien, welche in g einen Punkt gemeinschaftlich haben, und deren Neigung den Vertikalkräften entspricht.

Wir erhalten für letztere (resp. für den Zuwachs in Folge der Einwirkung von G) nach Gleichung 108)—109), oder mit Hülfe der Relation 17a)

für den Trägertheil 0 bis g

$$-\frac{d\,\mathfrak{m}_x}{d_x} = \mathfrak{v}_x = \frac{1}{l_s}\left[\mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{m}_s - G\,(l-g)\right] \; . \; . \; . \; . \quad \text{V.}$$

und für den Theil g bis l

$$\mathfrak{v}'_x = \frac{1}{l_s}\left[\mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{m}_s + Gg\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{VI.}$$

somit sind beide constant gleich der Zunahme der Vertikalkräfte an den Auflagern $\mathfrak{v}_s$ und $\mathfrak{v}'_s$

Die Vorzeichen der Grössen $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{v}'_x$ sind vorerst unbekannt, wir wissen nur, dass $\mathfrak{m}_{s-1}$ und $\mathfrak{m}_s$ negativ, und müssen zu Beurtheilung dieser Frage die Gleichungen IV. der No. 74 beigezogen werden:

Durch Addition der beiden fraglichen Gleichungen erhält man

$$\mathfrak{m}_{s-1}\,(1+\mu) + \mathfrak{m}_s\,(1+\mu') = \frac{1}{l_s}\,(r_{s-1} + r_s)$$

und durch Einführung der Werthe von r und Reduction

$$= 3\,G\,(l-g)\,\frac{g}{l_s} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{VII.}$$

Da nun μ und μ' positiv und > 2, so ist $\mathfrak{m}_{s-1} + \mathfrak{m}_s < G\,(l-g)\,\frac{g}{l_s}$, somit auch $< G\,(l-g)$, die Gleichung V. giebt desshalb einen negativen Werth, da $G\,(l-g) > \mathfrak{m}_s + \mathfrak{m}_{s-1}$, somit umsomehr $> \mathfrak{m}_s - \mathfrak{m}_{s-1}$ (absolut genommen). Ebenso wird gezeigt, dass $\mathfrak{v}'_s$ positiv. Es ist somit in dem Trägerstück links von G die Vertikalkraft negativ und $= \mathfrak{v}_s$, im Trägerstück rechts von G ebenfalls constant $= \mathfrak{v}'_s$ aber positiv. Die Tangente der Kurve $\mathfrak{m}$ für das Stück 0 bis g $\frac{d\,\mathfrak{m}_x}{d_x} = -\,\mathfrak{v}_s$ ist somit positiv, für das Trägerstück g bis l negativ, und zeigen die Kurven $\mathfrak{v}$ die in nachstehender Fig. 99a gezeichnete Gestalt.

Fig. 99a.

Die Kurven $\mathfrak{m}$ für die belastete Oeffnung s sind aus Fig. 99 ersichtlich und schneiden dieselben die Coordinatenaxe in zwei Punkten, deren Abscissen x_0 und x'_0 man findet, wenn man in den Gl. III. und IV. $\mathfrak{m}_x = 0$ setzt. Es ist

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \frac{m_{s-1}}{m_{s-1} - m_s - G(l-g)} \cdot l_s \\ x'_0 &= \frac{m_{s-1} + Gg}{m_{s-1} - m_s + Gg} \cdot l_s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VIII.}$$

Die Lage dieser Punkte ist unabhängig von G (da G in m als Faktor auftritt), nicht aber von g; es lässt sich nachweisen, dass diese Punkte stets zwischen das Auflager und die nächstgelegenen Inflectionspunkte fallen, man kann sie laufende Inflectionspunkte nennen, und stellen sie, wenn der Träger anderweitig nicht belastet ist, die Wendepunkte der elastischen Linie dar (vergl. N°. **20** am Schluss).

76. Aus Vorstehendem können wir nun Schlüsse ziehen auf die Art und Weise der Lastvertheilung, durch welche in einem beliebigen Querschnitt x der Oeffnung s die grössten Vertikalkräfte entstehen:

Die Kraft G erzeugt in dem Stück 0 bis g des Trägers eine negative Vertikalkraft, deren Grösse oben gefunden wurde:

$$\mathfrak{v}_x = \frac{1}{l_s}\left[m_{s-1} - m_s - G(l-g)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

dessgleichen im Trägerstück g bis l eine positive Vertikalkraft

$$\mathfrak{v}'_x = \frac{1}{l_s}\left[m_{s-1} - m_s + Gg\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Das Maximum der negativen Vertikalkraft für den Querschnitt x tritt desshalb offenbar dann ein, wenn in der Oeffnung s der rechts vom Querschnitt befindliche Theil der Oeffnung mit der Maximallast, der links gelegene mit der Minimallast (Eigengewicht) belastet ist. Das Umgekehrte findet bezüglich des positiven Maximums statt, und haben wir desshalb bei continuirlichen Trägern dasselbe Gesetz, das wir in N°. **60** für den einfachen, freiaufliegenden Träger nachgewiesen haben.

Sind ausserdem die übrigen Felder belastet, so erzeugt eine Kraft G in der Oeffnung l_{s-1} in dem der Stütze s—1 zugekehrten Trägerstück eine negative, somit in der Oeffnung l_s selbst eine negative Vertikalkraft. Die negativen Vertikalkräfte in der Oeffnung l_s wachsen desshalb, wenn das links liegende Feld s — 1 mit der Maximallast, das rechts liegende Feld s + 1 aber nicht belastet ist. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Die Vertikalkraft in einem beliebigen Querschnitt des Feldes s wird zum negativen Maximum, wenn im fraglichen Felde das Stück x bis l, das anstossende linke Feld mit dem Maximum belastet, das rechts anstossende Feld aber nicht belastet, alle übrigen Felder aber abwechselnd belastet sind.

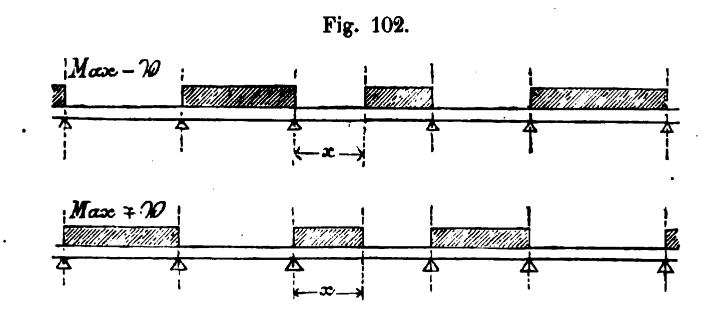
Die Belastungsart ist dargestellt durch die nebenstehende Fig. 102.

Ebenso erhält man das positive Maximum von $\mathfrak{V}$ für die durch nebenstehende Figur dargestellte Belastungsart.

Für die Stützen ergiebt sich hienach leicht, dass das negative Maximum der Vertikalkräfte eintritt, wenn die beiden anliegenden Oeffnungen belastet, die übrigen Oeffnungen abwechselnd belastet sind, somit ebenso, wie für das negative Maximum des Stützenmoments.

Hat man es mit concentrirten Lasten zu thun, so ist die Stellung der Einzellasten zum Querschnitt x nicht gleichgültig: Nach Gleichung I. und II. wird der negative Werth von $\mathfrak{v}_x$ um so grösser, je kleiner g, somit für $g = x$, es muss desshalb eine der grössten Lasten G auf dem Querschnitt x stehen und die andern möglichst nahe gerückt sein, wie wir diess auch für freiaufliegende Träger nachgewiesen haben.

Fig. 102.



77. Es erübrigt noch die Bestimmung der Laststellung, welche im Querschnitt x der Oeffnung l_s das Maximum resp. Minimum der Momente hervorruft.

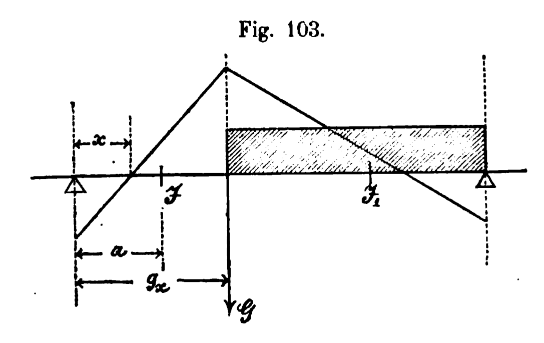
Der Beitrag $\mathfrak{m}_x$ des Momentes im Querschnitt x ist gegeben durch die Gleichungen III. und IV. der No. **75** und haben wir, wenn $x < g$ (Fig. 103)

$$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{s-1} - \frac{x}{l}\left[\mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{m}_s - G\,(l-g)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

Wir haben oben (in No. **75**) gesehen, dass für $x = 0$ $\mathfrak{m}_x$ negativ, für $x = g$ positiv: der Werth von x, für welchen $\mathfrak{m}_x = 0$, wird gefunden durch die Gleichung

$$\mathfrak{m}_{s-1} = \frac{x}{l}\left[\mathfrak{m}_{s-1} - \mathfrak{m}_s - G\,(l-g)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

Fig. 103.



Nimmt man nun x constant und sucht denjenigen Werth von g, für welchen $\mathfrak{m}_x = 0$, so ist diese Gleichung in Beziehung auf g aufzulösen, und

findet man, indem man die Werthe von $\mathfrak{m}_{s-1}$ und $\mathfrak{m}_s$ aus Gleichung IV. der N°. **74** substituirt, nach gehöriger Reduction die Bedingungsgleichung:

$$g^2\left[(\mu+1)x-(\mu'+1)(l-x)\right]+gl\left[(l-x)(2\mu'-1)+x(\mu-2)\right]$$
$$+ x l^2(1-\mu\mu')=0 \quad . \quad . \quad . \quad 115).$$

Sind g_x die Wurzeln dieser Gleichung, und denkt man sich eine Last G von 0 nach l vorrücken, so wird zunächst für $x=0$ $g_x=0$ (die andere Wurzel der Gleichung ist unmöglich). Wächst x, so wächst auch g und ist für den Maximalwerth, den g_x annehmen kann, nämlich $g_x = l$,

$$x=\frac{l(2-\mu')}{2\mu+2-\mu'-\mu\mu'}=\frac{l}{1+\mu}=a \text{ (Gl. 114)},$$

somit die Abscisse des linkseitigen Inflectionspunkts. Eine Kraft G kann also nur in dem Trägerstücke zwischen der linkseitigen Stütze und dem Inflectionspunkt J negative Momente hervorbringen, und diess nur dann, wenn sie zwischen g_x und l liegt, denn wird $x > a$, so wird $g_x > l$, somit unmöglich (vergl. Fig. 103).

Für das Balkenstück $x > g$ (Fig. 103[a]) erhält man nach Gl. IV. der N°. **75**

$$\mathfrak{m}_x=\mathfrak{m}_{s-1}-\frac{x}{l}(\mathfrak{m}_{s-1}-\mathfrak{m}_s+Gg)+Gg \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

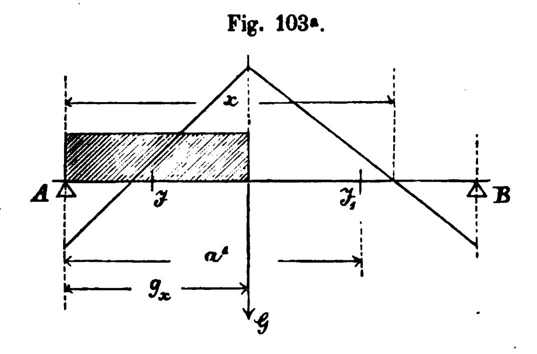
und als Bedingung für $\mathfrak{m}_x = 0$ nach Einführung der Werthe $\mathfrak{m}_{s-1}$ und $\mathfrak{m}_s$:

$$(l-x)(l-g)\left[(2l-g)\mu'-(l+g)\right]+x(l-g)\left[(l+g)\mu-(2l-g)\right]$$
$$+(l-x)\,l^2\,(1-\mu\mu')=0 \quad . \quad . \quad . \quad 115^a)$$

oder in Beziehung auf $l-g$ geordnet:

$$(l-g)^2\left[(l-x)(1+\mu')-x(1+\mu)\right]+(l-g)l\left[(l-x)(\mu'-2)+x(2\mu-1)\right]$$
$$+(l-x)\,l^2(1-\mu\mu')=0,$$

Fig. 103[a].



für $x = l$ entspricht dieser Gleichung der Werth $g_x = l$, für andere Werthe von x wird g_x kleiner, der kleinste mögliche Werth $g_x = 0$ tritt ein für

$$l-x=\frac{l}{1+\mu'},$$

also für den 2ten Inflectionspunkt (vergl. Gleichung 114[a]). Negative Werthe von $\mathfrak{m}_x$ können somit nur eintreten in dem Stück zwischen J_1 und der rechtseitigen Stütze (vergl. Fig. 103[a]) also für $x > a'$ und diess nur dann, wenn $g < g_x$.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel:

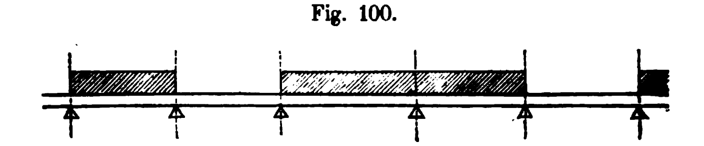
Im mittleren Trägertheil JJ_1 (Fig. 103ᵃ) zwischen den Inflectionspunkten bringt jede in der Oeffnung s wirkende Kraft nur positive Momente hervor, das Maximum der positiven Momente in JJ_1 tritt somit für den Querschnitt x ($x > a$ und $< a'$) dann ein, wenn die ganze Oeffnung s belastet, das Minimum, wenn die ganze Oeffnung leer ist.

Für die äussern Abschnitte AJ und J_1B der Oeffnung AB s sind die negativen Momente Maximum, wenn die Strecken g_x bis B, resp. A bis g_x belastet, die übrigen Theile nicht belastet sind, wobei g_x für einen bestimmten Querschnitt x aus Gleichung 115) resp. 115ᵃ) abzuleiten ist, umgekehrt für die positiven Maximalmomente.

Als specieller Fall hievon ergiebt sich für die Stützen die Bedingung:

An der linkseitigen Stütze ist $x = 0$ und nach obigem $g_x = 0$, es muss somit, damit $\mathfrak{M}_{s-1}$ das negative Maximum er-

Fig. 100.



reicht, die ganze Oeffnung belastet sein. Dasselbe gilt aber auch für die rechtseitige Stütze $\mathfrak{M}_s$, woraus der Satz sich ergiebt.

Das negative Moment auf einer Stütze wird Maximum, wenn die der Stütze anliegenden Oeffnungen vollbelastet sind (vergl. Fig. 100).

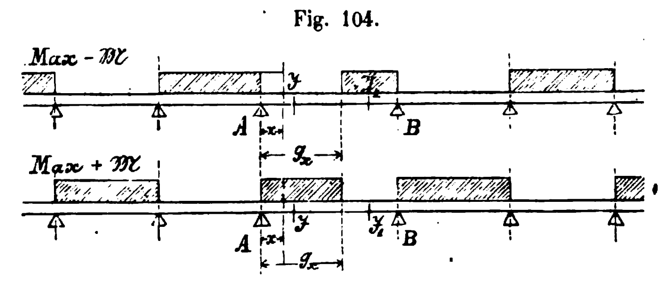
Wir haben diesen Satz schon oben in N°. **74** hergeleitet. Die Wirkung von Lasten, welche in einer der übrigen Oeffnungen wirken, ist am besten aus Fig. 99 zu ersehen. Man überzeugt sich leicht, dass zunächst in dem Trägerstück zwischen dem linken Auflager s—1 und dem Inflectionspunkt J das Moment $\mathfrak{M}$ einen Zuwachs in negativem Sinne erhält, wenn die 2ᵗᵉ, 4ᵗᵉ Oeffnung rechts von der Oeffnung s und die 1ᵗᵉ, 3ᵗᵉ Oeffnung links der Stütze belastet sind, das Umgekehrte findet statt für das Trägerstück J_1 bis zur rechtseitigen Stütze s. Für das Mittelstück JJ_1 wird der Zuwachs des Moments negativ, wenn das 1ᵗᵉ, 3ᵗᵉ Feld rechts und links vom Felde s belastet sind. Es geht diess daraus hervor, dass eine Kraft G im 2ᵗᵉⁿ, 4ᵗᵉⁿ Feld rechts von der Oeffnung s im Trägerstück A bis zum linkseitigen Inflectionspunkt J ein negatives, im Stück J bis B dagegen ein positives Moment erzeugt, umgekehrt für die ungeraden Felder. Ferner entsteht durch eine Kraft G im 2ᵗᵉⁿ, 4ᵗᵉⁿ Felde links von der Oeffnung s im Trägerstück A bis zum rechtseitigen In-

flectionspunkt J_1 ein positives, im Stück J_1 B ein negatives Moment, umgekehrt für die ungeraden Felder.

Bringt man diese Resultate in Verbindung mit den Sätzen für die Vorzeichen der Momente innerhalb der Oeffnung s selbst, die in N°. **74** entwickelt sind, so ergeben sich die Maximas für positive und negative 𝔐 aus den in nachstehenden Figuren gezeichneten Belastungsarten:

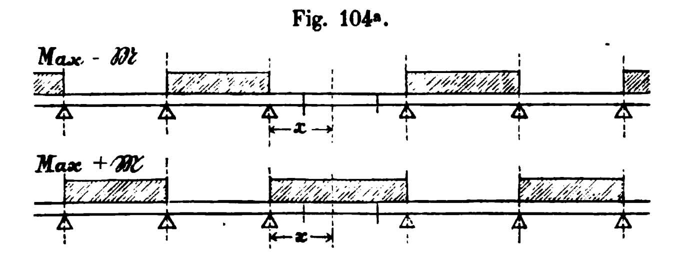
1) Belastungen für das Trägerstück A bis J

Fig. 104.



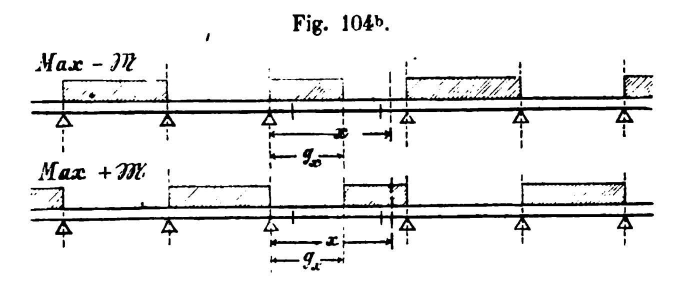
2) Trägerstück JJ′ (zwischen den Inflectionspunkten)

Fig. 104ᵃ.



3) Trägerstück J′ bis B

Fig. 104ᵇ.



Eine besondere Betrachtung erfordern noch die Endöffnungen für den Fall, dass der Träger an den Endauflagern frei aufliegt.

Es sei, wie früher angenommen, der ganze Träger beliebig belastet, und werde ausserdem in der Endöffnung eine Last G am Hebelsarm g wirkend gedacht. Da das Endauflager nicht eingespannt ist, so wird $m = 0$, und erhalten wir für die Zunahme m_1 des Moments auf der 1ten Zwischenstütze die Gleichung:

$$2 m_1 (l_1 + l_2) + m_2 l_2 = r_1 = \frac{1}{l_1} G g (l - g)(l + g)$$

und da nach No. **74** $m_2 = + \frac{m_1}{\mu'_2}$

$$m_1 \left[2 + \frac{l_2}{l_1} \left(2 - \frac{1}{\mu'_2} \right) \right] = \frac{r_1}{l_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{IV.}$$

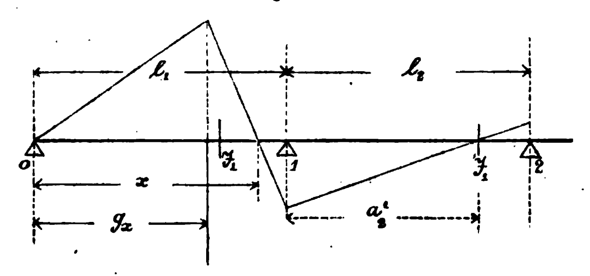
und wenn man analog Gleichung 113a) setzt:

$$2 + \frac{l_2}{l_1} \left(2 - \frac{1}{\mu'_2} \right) = \mu'_1$$

und den Werth von r_1 einführt nach Reduction:

$$m_1 = - \frac{G g (l - g)(l + g)}{\mu'_1 l_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{V.}$$

Fig. 105.



somit das Moment im Querschnitt x der 1ten Oeffnung:

1) wenn $x < g$ nach Gleichung III. der No. **75** (da $m_{s-1} = m_0 = 0$)

$$m_x = G (l - g) \frac{x}{l} \left[1 - \frac{g (l + g)}{\mu' l^2} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{VI.}$$

da $g (l + g)$ stets $< 2 l^2$, so ist m_x stets positiv;

2) wenn $x > g$, so folgt nach Gleichung IV. der No. **75.**

$$m_x = - \frac{x}{l} (- m_1 + G g) + G g$$

$$= - \frac{G g (l - g)(l + g) x}{\mu'_1 l_1^3} - G g \frac{x}{l} + G g \quad \ldots \quad \text{VII.}$$

und erhalten wir für $m_x = 0$ folgende Bedingungsgleichung:

$$0 = \frac{(l - g)(l + g) x}{\mu'_1 l_1^3} - \frac{x}{l_1} + 1$$

woraus, wenn g_x die Wurzel der Gleichung:

$$g_x = l \sqrt{1 + \mu'_1 - \mu'_1 \frac{l}{x}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 115\text{b}).$$

g_x hat seinen grössten Werth $= l$ für $x = l$ und seinen kleinsten $g_x = 0$ für

$$x = \frac{\mu'_1 \, l}{1 + \mu'_1} = a'_1$$

(für kleinere Werthe von x wird g_x unmöglich). Es können somit negative Werthe von $\mathfrak{m}_x$ nur eintreten in dem Stücke J_1 bis zur ersten Zwischenstütze 1 (vergl. Fig. 105), und diess nur dann, wenn $g < g_x$.

Für die Endöffnungen bestehen desshalb bezüglich der Maxima und Minima von $\mathfrak{M}$ dieselben Regeln, wie für die Mittelöffnungen, nur ist die Sache einfacher, da die Oeffnung nur in zwei Theile zerfällt, insofern der 1te Inflectionspunkt J mit dem Widerlager 0 zusammenfällt und das Mittelstück JJ_1 vom Auflager 0 bis zum 2ten Inflectionspunkt reicht (s. Fig. 105).

Die Figuren N°. 104 bis N°. 104b können desshalb mit obengenannter Modification auch für Endfelder dienen, und die Maxima und Minima von $\mathfrak{M}$ hienach bestimmt werden.

In der Praxis werden indess Belastungen, wie diese Figuren darstellen, nicht in vollständig zutreffender Weise eintreten: eine Brücke, wie gross sie sei, kann gleichzeitig nur von einem (zusammenhängenden) Eisenbahnzuge besetzt sein; der durch Fig. 104 dargestellte Belastungsfall könnte annähernd etwa dann eintreten, wenn in einem Bahnzug auf der Strecke von der linkseitigen Stütze bis g_x unbelastete Wagen zwischen vollbelasteten Güterwagen oder Locomotiven stehen. Man wird desshalb in der Praxis die Belastungsfälle dadurch vereinfachen können, dass man die Belastung der von s entfernten Oeffnungen weglässt, deren Einfluss nach Fig. 99 ohnehin gering ist.

78. Haben wir es bei Brückenträgern nur mit gleichförmig vertheilten Lasten zu thun, so geben die Fig. 104 bis 104b vollständig Aufschluss über die Art der Zugstellung, welche Max $\mathfrak{M}$ hervorruft; ist aber die Belastung durch concentrirte Lasten vorgestellt, so ist noch zu bestimmen, wie diese Einzelgewichte auf dem Träger vertheilt sein müssen.

Nehmen wir den einfachen Fall einer Einzellast G in der Oeffnung s, so sind die Momente auf den Stützen s—1 und s durch die Gleichungen III. und IV. der N°. **74** gegeben. Man kann sich die Aufgabe stellen, diejenigen Werthe von g zu suchen, für welche $\mathfrak{m}_{s-1}$ resp. $\mathfrak{m}_s$ Maximum werden.

Wir haben, um diese Werthe zu finden, die Ausdrücke $\frac{d\,\mathfrak{m}_{s-1}}{dg}$ resp. $\frac{d\,\mathfrak{m}_s}{dg} = 0$ zu setzen und finden nach gehöriger Reduction die Gleichungen:

1) für Max $\mathfrak{m}_{s-1}$

$$g_s = \frac{1}{1+\mu'}\left[\mu' \pm \sqrt{\mu'^2 + \tfrac{1}{3}(1-2\mu')(1+\mu')}\right]$$

2) für Max $\mathfrak{m}_s$ . . . I.

$$g'_s = \frac{1}{1+\mu}\left[1 \pm \sqrt{1 + \tfrac{1}{3}(\mu-2)(\mu+1)}\right]$$

wo oben vor der Wurzel das Zeichen —, unten das Zeichen + gilt, weil sonst die Wurzeln unbrauchbar werden.

Man hat diese Punkte, deren Abscissen, wie man leicht sieht, für eine bestimmte Trägerform constant sind, Influenzpunkte genannt *); damit $\mathfrak{M}_{s-1}$ resp. $\mathfrak{M}_s$ Maxima werden, müssen die grössten Einzellasten um diese Punkte gruppirt sein.

Aehnliche Punkte lassen sich auch für Querschnitte zwischen den Stützpunkten bestimmen; ein vollständiges Bild der Einwirkung einer Einzelkraft auf einen continuirlichen Träger überhaupt erhält man aber auf folgende Weise: Denkt man sich irgend einen Querschnitt x in der Oeffnung s, und lässt man nun eine Kraft G gleich der Gewichtseinheit von einem Endauflager des continuirlichen Trägers bis zum andern fortschreiten, so kann man mit Hülfe der allgemeinen Formeln der N°. **73** für jede Laststellung den Beitrag zum Moment $\mathfrak{M}_x$ in dem gegebenen Querschnitt x berechnen. (Die Formeln werden sehr einfach, da nach N°. **74** sämmtliche R mit Ausnahme derjenigen in der belasteten Oeffnung = 0 sind.) Trägt man sodann den erhaltenen Werth als Ordinate von g auf, so entsteht eine Kurve, deren Ordinaten sofort nach Grösse und Vorzeichen einen Massstab geben für den Beitrag, den die Krafteinheit an beliebiger Stelle zum Moment $\mathfrak{M}_x$ liefert. Sind mehrere Einzellasten vorhanden, so braucht man blos die Producte aus Last und Ordinate dieser Kurve und die Summen dieser Producte zu bilden, und findet dann leicht nach einigen Proben die Stellung des Zuges, für welche $\mathfrak{M}_x$ Maximum wird.

Diese Curve, welche wir Influenzkurve nennen, ist für jeden Querschnitt verschieden, und zwar kommt es namentlich darauf an, ob x innerhalb der Inflectionspunkte (siehe N°. **74**, Fig. 101) liegt, oder zwischen diesen und den Stützen. Im ersteren Falle sind in der belasteten Oeffnung selbst sämmtliche Ordinaten positiv, was schon daraus hervorgeht, dass in diesem Trägertheil jede Kraft innerhalb s positive Momente erzeugt; im zweiten Fall schneidet die Kurve die Abscissenaxe, und zwar in dem Punkte, dessen Abscisse wir oben mit g_x bezeichnet haben (vergl. N°. **77**). Die Fig. d auf Tafel IV^b. gibt für diese beiden Fälle die Form der Kurven für einen Träger über 2 Oeffnungen.

Bei der Herleitung der Gesetze für die Maxima und Minima der Momente und Vertikalkräfte haben wir einen ganz beliebigen continuirlichen Träger zu Grunde gelegt, die erhaltenen Regeln haben desshalb die allgemeinste Gültigkeit nicht bloss für continuirliche Träger mit frei aufliegenden, sondern auch mit eingespannten Enden, ebenso für Träger mit ungleich hohen Stützen. Sie gelten ganz ebenso für Träger mit einer Oeffnung,

---

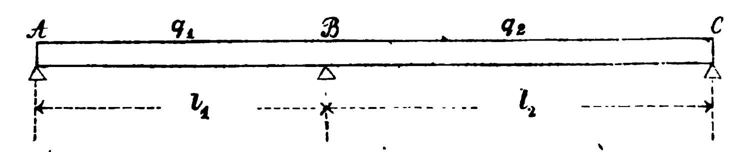
*) Vergl. Weyrauch, Continuirliche Träger.

und können die in N°. **19** und **20** aufgestellten Sätze auch aus obigen allgemeinen Gleichungen abgeleitet werden.

79. Wir betrachten als Beispiel der obigen allgemeinen Theorie zunächst den Fall eines continuirlichen Trägers von zwei Oeffnungen, deren Längen l_1 und l_2, wir nehmen die drei Stützen in gleicher Höhe an, und liege der Träger an den Enden frei auf.

Als Belastung nehmen wir vorläufig eine gleichförmig vertheilte Last an, und zwar sei die 1te Oeffnung mit q_1, die 2te mit q_2 per laufenden Meter belastet (s. Fig. 106).

Fig. 106.



Die allgemeinen Gleichungen der N°. **73** lehren uns zunächst die Stützenmomente kennen.

Es ist, da der Träger an den Endpfeilern frei aufliegt, $\mathfrak{M} = 0$ $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_2 = 0$ und reduciren sich die Gleichungen 107ᵃ) auf folgende Gleichung für das Stützenmoment am Mittelpfeiler:

$$2\,\mathfrak{M}_1\,(l_1 + l_2) = R_1$$

woraus folgt

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{R_1}{2\,(l_1 + l_2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 116)$$

und ist hierin zu setzen nach Gleichung 107)

$$R_1 = -\frac{1}{l_1}\,\Sigma_1\,G\,g\,(l-g)(l+g) - \frac{1}{l_2}\,\Sigma_2\,G\,g\,(l-g)(2l-g) \qquad 107)$$

Die Gleichungen für die Endstützen

$$\mathfrak{M}_1\,l_1 = R$$
$$2\,\mathfrak{M}_2\,l_2 = R_2$$

können wegbleiben, da sie nur zur Bestimmung der Winkel α und α_n dienen können, die für die weitere Entwicklung kein Interesse haben.

Da wir es mit gleichförmiger Belastung zu thun haben, so ist in Gleichung 107) zu setzen:

$$G_1 = q_1\,dg \text{ und } G_2 = q_2\,dg,$$

so dass wir erhalten

$$\Sigma_1\,G\,g\,(l-g)\,(l+g) = \int_0^{l_1} q_1\,dg\,.\,g\,(l-g)\,(l+g) = {}^1/_4\,q_1 l_1^4$$

$$\Sigma_2\,G\,g(l-g)(2l-g) = \int_0^{l_2} q_2\,dg\,.\,g\,(l-g)\,(2l-g) = {}^1/_4\,q_2 l_2^4$$

woraus

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{8\,(l_1+l_2)}\left[q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3\right] \quad \ldots\ldots \quad 116^a).$$

Nachdem $\mathfrak{M}_1$ bestimmt, ergiebt sich die Vertikalkraft am Endauflager A nach Gleichung 108), und erhält man, da $\mathfrak{M}_0 = 0$,

$$\mathfrak{B}_1 = -A = \frac{1}{l_1}\left[-\mathfrak{M}_1 - \Sigma_0^l G(l-g)\right].$$

Es ist aber, da $G = q_1 \, dg$,

$$\Sigma_0^l G(l-g) = \int_0^l q_1 \, dg \, (l-g) = \tfrac{1}{2} q_1 l_1^2,$$

diess, und den Werth von $\mathfrak{M}_1$ in obige Gleichung eingesetzt, ergiebt

$$\mathfrak{B}_1 = -\frac{1}{8 l_1 (l_1 + l_2)}\left[q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3\right] + \tfrac{1}{2} q_1 l_1 \quad . \; . \; 117).$$

Für die meisten in der Praxis vorkommenden Fälle vereinfachen sich diese Gleichungen, indem die Spannweiten in der Regel gleich gross sind, und man erhält für $l_1 = l_2 = l$

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{l^2}{16}(q_1 + q_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 116^b)$$

und die Vertikalkraft in A

$$\mathfrak{B}_1 = -A = -\frac{l}{16}(7 q_1 - q_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 117^a)$$

Unter Benützung von Gleichung 108ª) ergiebt sich dann leicht die Vertikalkraft zunächst des Auflagers B (links desselben).

$$\mathfrak{B}_1' = \frac{1}{l}\left[-\mathfrak{M}_1 + \Sigma_0^l G g\right] = \frac{l}{16}(9 q_1 + q_2) \quad . \; 117^b)$$

und sodann aus Gleichung 109) und 110) die $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ im Querschnitt x

$$\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_1 + \Sigma_0^x G$$

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} - \Sigma_0^x G(x-g) - \mathfrak{B}_1 x$$

und da $\mathfrak{M} = 0$, $\Sigma_0^x G(x-g) = \frac{q_1 x^2}{2}$ und $\Sigma_0^x G = q_1 x$,

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= q_1 x - \frac{l}{16}(7 q_1 - q_2) \; . \; . \; . \; . \; . \\ \mathfrak{M}_x &= \frac{q_1 x^2}{2} - \mathfrak{B}_1 \, . \, x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{aligned}\right\} \quad 118)$$

womit Alles auf die Oeffnung AB bezügliche bekannt ist.

Für die 2te Oeffnung können die Formeln 107)—110) in gleicher Weise dienen, es sind nur die Indexe zu verändern, indem $\mathfrak{M}_{m-1}$ das Moment in B, $\mathfrak{M}_m$ in C bedeutet, daher letzteres $= 0$ zu setzen.

Man erhält dann, wie oben, der Reihe nach:

für das Stück BC, Coordinatenursprung in B

$$\mathfrak{V}_2 = -\frac{1}{16}(q_1 + 9\,q_2) \quad \ldots \quad 119)$$

$$\mathfrak{V}'_2 = C = -\frac{1}{16}(q_1 - 7\,q_2) \quad \ldots \quad 119^a)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}_x &= \mathfrak{V}_2 + q_2 x \\ \mathfrak{M}_x &= \mathfrak{M}_1 - \frac{q_2 x^2}{2} - \mathfrak{V}_2\, x\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 118^a)$$

Schliesslich ergiebt dann noch die Gleichung V. der N°. **73** den Auflagerdruck in B (wenn positiv nach oben gerichtet)

$$B = -\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}'_1 = \frac{10}{16}\,l\,(q_1 + q_2) \quad \ldots \quad 120).$$

80. Wenn man in den Gleichungen 118) und 118^a) die verschiedenen Werthe von q_1 und q_2, und die nach Gleichung 116), 117) und 119) sich ergebenden $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ an den Stützen einführt, so erhält man für jeden beliebigen Querschnitt x die ihm zugehörigen Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$. — Um das Resultat dieser Berechnungen zur Anschauung zu bringen, sind in den graphischen Darstellungen der Tafel IV^a. für die verschiedenen Belastungen die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ als Ordinaten aufgetragen, wie schon mehrfach erwähnt ist. — Es war aber nicht nöthig, nach den Gleichungen 118) und 118^a) eine grössere Reihe von einzelnen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zu berechnen, da eine nähere Untersuchung der fraglichen Kurven dieselben aus wenigen Punkten construiren lehrt.

Wir bemerken zuerst, dass die Gleichungen für $\mathfrak{V}_x$ gerade Linien darstellen und ist diess eine nothwendige Folge der gewählten gleichförmigen Belastungsart. — Die Neigung dieser Geraden gegen die Abscissenaxe ist nur von der Belastung abhängig und zwar sind die trigonometrischen Tangenten den Belastungen q_1 und q_2 direct proportional.

Die Kurven $\mathfrak{M}$ sind wie bei einer Oeffnung, so auch bei continuirlichen Trägern Parabeln mit senkrechter Axenrichtung, deren Parameter den Quotienten $\frac{1}{q_1}$ oder $\frac{1}{q_2}$ direct proportional ist.

Anm. Die Gleichung einer Parabel vom Parameter P ist

$$x^2 = 2\,Py \;\left(\text{oder } \frac{x^2}{2P} = y\right)$$

welche durch parallele Verrückung des Coordinatenursprungs übergeht in

$$\frac{x^2}{2P} + \alpha x + \beta = y$$

woraus durch Vergleichung mit den Gleichungen 118) und 118^a) der Parameter P sich unmittelbar gleich $\frac{1}{q_1}$, beziehungsweise $\frac{1}{q_2}$ ergiebt.

Wir bemerken ferner, dass nach Gleichung 17)

$$\mathfrak{V} = -\frac{d\,\mathfrak{M}}{dx}.$$

Es hat somit $\mathfrak{M}$ seinen grössten Werth für $\mathfrak{V} = 0$, d. h. der Scheitel der Parabel $\mathfrak{M}$ ist durch diejenige Abscisse gegeben, für welche $\mathfrak{V} = 0$ ist.

Diese Eigenschaften der Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ erleichtern das Auftragen derselben, wie schon mehrfach erwähnt ist; hier sei nur noch darauf hingewiesen, dass wir im vorliegenden Falle nur mit zweierlei Parabeln zu thun haben, deren Parameter den Werthen $\frac{1}{q_1}$ und $\frac{1}{q_2}$ proportional sind.

Gehen wir auf einzelne besondere Punkte über, so ergiebt sich zunächst für die Vertikalkraft aus Gleichung 118) und 118ª) Folgendes:

Die Vertikalkraft links des Mittelpfeilers ist nach Gleichung 117ᵇ) jedenfalls positiv, rechts desselben negativ (die Summe der absoluten Werthe dieser beiden Vertikalkräfte entspricht dem Auflagerdruck B). An dem Auflager A ist meist die Vertikalkraft negativ, da in den Fällen der Praxis selten $q_2 > 7\,q_1$ sein wird, ebenso ist die Vertikalkraft am Auflager C meist positiv, die Auflagerreactionen A und C beide meist nach oben gerichtet; es sind desshalb in beiden Oeffnungen Punkte vorhanden, für welche $\mathfrak{V}_x = 0$ und ergeben sich deren Abscissen

für die Spannweite AB nach Gleichung 118) und 117ª)

$$x_0 = -\frac{\mathfrak{V}_1}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 121)$$

für die Spannweite BC nach Gleichung 118ª)

$$x_0 = -\frac{\mathfrak{V}_2}{q_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 121^a).$$

Da nach Gleichung 17ª) diese Punkte den Maximas von $\mathfrak{M}$ entsprechen, so erhalten wir diese Maximalwerthe von $\mathfrak{M}$ in den Oeffnungnn AB und BC, indem wir die Werthe aus Gleichung 121) und 121ª) in Gleichung 118) und 118ª) einsetzen.

Es folgt für die Oeffnung AB das Maximalmoment, das wir mit $\mathfrak{M}_a$ bezeichnen:

$$\mathfrak{M}_a = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{V}_1{}^2}{q_1} = \frac{l^2}{512\,.\,q_1}\,(7\,q_1 - q_2)^2 \quad \ldots \quad 122)$$

und für die Oeffnung BC aus Gleichung 118ª)

$$\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_1 + \frac{\mathfrak{V}_2{}^2}{2q_2} = \frac{l^2}{512\,.\,q_2}\left[7\,q_2 - q_1\right]^2 \quad \ldots \quad 122^a).$$

Es können nunmehr die Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für jede Belastung q leicht aufgezeichnet werden; die Kurven $\mathfrak{V}$ sind als gerade Linien

durch die Werthe an den Auflagern gegeben (Gleichung 117[a]), 117[b]), 119), 119[a]), die Kurven $\mathfrak{M}$ (Parabeln) sind bestimmt durch die Scheitelpunkte (Gleichung 121)—122), ausserdem sind deren Schnittpunkte in A, B und C dadurch bekannt, dass $\mathfrak{M}$ für A und C je = 0, für B = dem Stützenmoment, das wir gleich Anfangs berechnet haben (Gl. 116[b]).

Für q_1 und q_2 sind nunmehr folgende Werthe anzunehmen:

1) die ganze Brücke leer $q_1 = q_2 = p$,
2) die ganze Brücke belastet $q_1 = q_2 = q$,
3) die Oeffnung AB belastet, die Oeffnung BC leer $q_1 = q$ $q_2 = p$,
4) die Oeffnung BC belastet, die Oeffnung AB leer $q_1 = p$ $q_2 = q$.

Die Resultate der Rechnung für die unter 1—4 genannten Belastungsarten sind nun in Tafel IV[a]. eingetragen, derart, dass negative Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ umgeklappt wurden, so dass oberhalb der Abscissenaxe die absoluten Werthe von $\mathfrak{M}$ unterhalb der absoluten Werthe von $\mathfrak{V}$ erscheinen.

Zur näheren Erläuterung sind die Resultate der Rechnung in nebenstehender Tabelle XX. eingetragen, wobei verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$ oder $\frac{p}{k}$ zu Grunde gelegt sind.

Die erste Horizontalcolonne entspricht der Maximalbelastung der ganzen Brücke (und wenn q = p gesetzt wird, auch der Belastung durch das Eigengewicht); für jedes Verhältniss $\frac{p}{q}$ und $\frac{p}{k}$ dient sodann die betreffende Horizontalcolonne zur Aufzeichnung der Kurven der einseitigen Belastung.

81. Aus den Resultaten der Tafel XX. resp. graphischen Darstellung Tafel IV[a]. bestätigen sich die Regeln, die wir oben in N°. **76** und **77** bezüglich der Maximas von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ an den Stützen aufgestellt haben: Am Endauflager A wird $\mathfrak{V}$ am grössten, wenn die Oeffnung AB allein belastet ist, am Mittelpfeiler B, wenn beide Oeffnungen mit q belastet sind.

Bezüglich der Momente ist, wie vorauszusehen, $\mathfrak{M}_1$ am grössten bei der Totalbelastung, ferner $\mathfrak{M}_a$, wenn nur die Oeffnung AB belastet ist. — Durch die vorstehend angenommene Belastung ganzer Oeffnungen erhalten wir indess nicht die absoluten Maximas der $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für jeden Querschnitt, (für die $\mathfrak{V}$ nur bezüglich der Stützen, für die $\mathfrak{M}$ nur die grössten Werthe des positiven $\mathfrak{M}$ und das grösste Stützenmoment,) und muss zu Bestimmung der Maximalwerthe an allen andern Stellen eine t h e i l w e i s e Belastung der Oeffnungen in Rechnung genommen werden, was im Folgenden geschehen soll:

Tabelle XX. (für 2 Oeffnungen).

$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	Belastung von AB (mit q).								Belastung von BC (mit q).					
		Auflagedrücke am Auflager			Vertikalkraft am Mittelpfeiler.		Abscisse $\mathfrak{B} = 0$.	max $\mathfrak{M}_x$	$\mathfrak{M}_1$ am Mittelpfeiler.	Auflagedrücke am Auflager			Abscisse $\mathfrak{B} = 0$.	max $\mathfrak{M}_b$	$\mathfrak{M}_1$
		A			gegen AB.	gegen BC.				A	B	C			
∞	1	ql 0,375	ql 1,25	ql 0,375	ql 0,625	ql 0,625	ql 0,375	ql² 0,070	ql² 0,125	ql 0,375	ql 1,25	ql 0,375	l 0,375	ql² 0,0703	ql² 0,125
3	3/4	0,390	1,094	0,266	0,610	0,484	0,390	0,076	0,110	0,266	1,094	0,390	0,354	0,047	0,110
2	2/3	0,395	1,020	0,231	0,605	0,426	0,395	0,078	0,105	0,231	1,020	0,395	0,346	0,040	0,105
1	1/2	0,406	0,937	0,156	0,594	0,343	0,406	0,082	0,094	0,156	0,937	0,406	0,312	0,024	0,094
2/3	2/5	0,412	0,875	0,112	0,588	0,287	0,412	0,085	0,087	0,112	0,875	0,412	0,280	0,016	0,087
1/2	1/3	0,416	0,833	0,083	0,584	0,249	0,416	0,086	0,083	0,083	0,833	0,416	0,250	0,010	0,083
1/4	1/5	0,425	0,750	0,025	0,575	0,175	0,425	0,090	0,075	0,025	0,750	0,425	0,125	0.0015	0,075

Nach Anleitung der No. **74** erhalten wir folgende Werthe für die Inflectionspunkte in der 1ten Oeffnung aus den Gleichungen 114), indem wir Index m=1 setzen:

$$a_1 = l_1 \frac{1}{1+\mu_1} \quad a'_1 = l_1 \frac{\mu'_1}{1+\mu'_1}.$$

Es ist aber nach Gleichung 113b) und 113c), da Index n = 2, zu setzen:

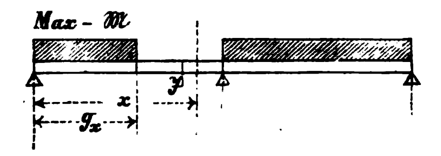
$$\mu_1 = \infty \quad \mu'_1 = \mu'_{n-1} = 2\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) = 4$$

somit

$$a_1 = 0 \quad a'_1 = \frac{4}{5}\, l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Für das zwischen dem Auflager A und dem Inflectionspunkt $a'_1 = 0{,}8\,l$ liegende Trägerstück geben nun unsere oben angenommenen Belastungen ganzer Oeffnungen schon die grössten und kleinsten Werthe von $\mathfrak{M}$ und zwar dann, wenn die ganze Oeffnung AB ganz oder gar nicht belastet ist (vergl. No. **77**); für den übrigen Theil des Trägers zwischen Inflectionspunkt und Mittelstütze tritt aber das negative Max. von $\mathfrak{M}_x$ dann ein, wenn der Theil des Trägers g_x und die 2te Oeffnung mit q, der Rest mit p belastet ist (s. Fig. 107).

Fig. 107.



Man erhält zunächst aus Gleichung 115b)

$$g_x = l\sqrt{1 + \mu'_1 - \mu'_1 \frac{l}{x}} = l\sqrt{5 - 4\frac{l}{x}} \quad \ldots\ldots \quad \text{II}$$

woraus für

$x =$	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0 . l.
$g_x =$	0	0,542	0,745	0,888	1,0 . l.

Man sieht hieraus, dass bezüglich der $\mathfrak{M}$ nicht dieselbe Regel gilt, wie bezüglich der $\mathfrak{V}$: das max $\mathfrak{M}_x$ tritt nicht ein, wenn die Last bis zum Querschnitt x vorgerückt ist.

Für die durch Fig. 107 dargestellte Belastung, welche dem negativen Maximum von $\mathfrak{M}$ entspricht, ergeben nun die allgemeinen Formeln No. **73** alles Weitere.

Man erhält zunächst für das Stützenmoment $\mathfrak{M}_1$ nach Gleichung 116) und 107), da $l_1 = l_2$ angenommen:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{4l^2}\left[-\Sigma_1\, Gg\,(l-g)\,(l+g) - \Sigma_2\, Gg\,(l-g)\,(2l-g)\right] \quad \ldots \quad \text{III.}$$

Das 2te Summenzeichen ist, da die ganze 2te Oeffnung mit q belastet, $= \frac{1}{4}\,ql^4$.

Das 1te Summenzeichen setzt sich zusammen aus der Belastung der ganzen Oeffnung mit p und der des Stückes g_x mit $k = q - p$. Es ist

$$\Sigma_1\, Gg\,(l-g)\,(l+g) = \tfrac{1}{4}pl^4 + \int_0^{g_x} kdg\,(l-g)\,(l+g)\,.\,g$$
$$= \tfrac{1}{4}pl^4 + \tfrac{1}{4}g_x^2\,(2l^2 - g_x^2)\,k$$

diess substituirt, giebt

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{16 l^2}\left[q l^4 + p l^4 + g_x^2 \left(2l - g_x^2\right) k\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Nachdem $\mathfrak{M}_1$ gefunden, giebt N°. **73** der Reihe nach: Vertikalkraft am Auflager A

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{l}\left[-\mathfrak{M}_1 - \int_0^l p\,dg\,(l-g) - \int_0^g k\,dg\,(l-g)\right.$$

$$= \frac{1}{l}\left[-\mathfrak{M}_1 - \tfrac{1}{2} p l^2 - k\left(l g_x - \frac{g_x^2}{2}\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$

und hieraus nach Gleichung 110)

$$\mathfrak{M}_x = -\mathfrak{V}_1\, x - \frac{p x^2}{2} - k g_x\left(x - \frac{g_x}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

Substituirt man in Gleichung VI. für $\mathfrak{V}_1$ den Werth aus V. für g aus II., $\mathfrak{M}_1$ aus IV., so ergiebt sich nach einiger Reduction:

$$\max - \mathfrak{M}_x = \tfrac{3}{8} p l x - \frac{p x^2}{2} + \frac{k l}{8}\left(20 l - 8\frac{l^2}{x} - 13 x\right) \quad \ldots \quad \text{VII. *)}$$

Das positive Maximum von $\mathfrak{M}$ tritt ein, wenn das Stück von g_x bis zur Stütze belastet, die 2te Oeffnung aber unbelastet ist (Fig. 107a), und erhält man hiefür auf ähnlichem Wege, wobei wir der Einfachheit halber statt g_x g setzen:

Fig. 107a.

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{4 l^2}\left[\tfrac{1}{2} p l^4 + \tfrac{1}{4} k\,(l^4 - 2 l^2 g^2 + g^4)\right]$$

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{l}\left[-\mathfrak{M}_1 - \tfrac{1}{2} p l^2 - \tfrac{1}{2} k\,(l^2 - 2 l g + g^2)\right]$$

$$\mathfrak{M}_x = -\mathfrak{V}_1 x - \frac{p x^2}{2} - \frac{k}{2}(x-g)^2$$

oder durch Einsetzung der Werthe von g_x aus Gleichung II.

$$\max + \mathfrak{M}_x = \tfrac{3}{8} p l x - \frac{p x^2}{2} + \frac{k l}{8}\left(16 x - 20 l + \frac{8 l^2}{x} - \frac{4 x^2}{l}\right) \quad . \quad \text{VIII.}$$

Das negative Maximum der Vertikalkräfte im Querschnitt x tritt nach N°. **76** bei Belastungen ein, wie sie aus nachstehender Fig. 107b) ersichtlich sind, und erhält man unter Benützung der Gleichungen der N°. **73**

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{4 l^2}\left[\tfrac{1}{2} p l^4 + \tfrac{1}{4} k\,(l^2 - x^2)^2\right]$$

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{l}\left[-\mathfrak{M}_1 - \tfrac{1}{2} p l^2 - \frac{k}{2}(l-x)^2\right]$$

und sodann

$$\mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_1 + p x$$

---

*) Vergl. Ott, Baumechanik, wo diese und die folgenden Gleichungen in anderer Weise hergeleitet sind.

Fig. 107^b.

oder nach Einsetzung obiger Werthe von $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{M}_1$

$$\max - \mathfrak{V}_x = - {}^3/_8\, pl + px + \frac{k}{16\, l^3} (l - x)^3 \left[- 7 l^2 + 2 l x + x^2 \right] \quad . \quad \text{IX.}$$

Für $x = 0$ findet man

$$\mathfrak{V}_1 = - {}^3/_8\, pl - \frac{7}{16}\, kl,$$

oder da $k = q - p$:

$$\mathfrak{V}_1 = - A = - \frac{1}{16} (7q - p)$$

wie sich aus Gleichung 117^a) ergiebt, wenn man $q_1 = q$ $q_2 = p$ setzt. Für $x = l$ wird $\mathfrak{V}_x = {}^5/_8\, pl$, also gleich der Vertikalkraft am Pfeiler, wenn die Brücke nicht belastet ist.

In gleicher Weise erhält man den positiven Maximalwerth von $\mathfrak{V}_x$ unter Zugrundlage der Belastung der Fig. 107^c, und ist für diesen Fall:

$$\mathfrak{M}_1 = - \frac{1}{4 l^2} \left[{}^1/_2\, pl^4 + {}^1/_4\, kl^4 + k \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right]$$

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{l} \left[- \mathfrak{M}_1 - {}^1/_2\, pl^2 - k \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right]$$

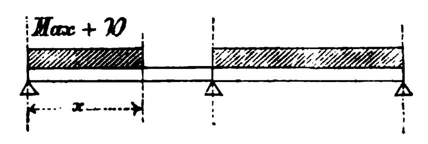
$$\mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_1 + (p + k)\, x,$$

woraus durch Elimination:

$$\max + \mathfrak{V}_x = - {}^3/_8\, pl + px + \frac{k}{16 l^3} (l^4 + 10 x^2 l^2 - x^4) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{X.}$$

für $x = 0$ ist $\mathfrak{V}_x = - \frac{1}{16} (7p - q)$, für $x = l$, $\mathfrak{V}_x = {}^5/_8\, ql$, wie auch aus der Gleichung 117^a) sich sofort ergiebt.

Fig. 107^c.



Will man von der Trennung eines Bahnzugs absehen, bei welcher Annahme allein die für $+ \mathfrak{V}$ berechneten Maxima möglich sind, so hat man die Belastung der 2ten Oeffnung wegzulassen und nur das Theilstück x der 1ten Oeffnung belastet anzunehmen. Es ist für diesen Fall im Ausdruck von $\mathfrak{M}_1$ das Glied ${}^1/_4\, kl^4$ zu streichen und erhält man

$$\max + \mathfrak{V} = - {}^3/_8\, pl + px + \frac{k}{16 l^3} (10 x^2 l^2 - x^4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{X}^a.$$

Es ist diess dieselbe Kurve, wie durch Gleichung X. dargestellt, nur um den Werth $\frac{kl}{16}$ nach oben verschoben, und ist diese Kurve in Tafel IV. gleichfalls eingetragen.

Obige Gleichungen reichen nun vollständig aus, für die $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ die Maximalwerthe zu berechnen und aufzutragen; selbstverständlich sind diese Maximas keine gleichzeitigen Werthe und müssen solche in den Fällen besonders berechnet werden, wo die Spannung eines Constructionsglieds von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig abhängt. Die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{V}_x$ können mit Hülfe der Werthe von $\mathfrak{M}_t$ und $\mathfrak{V}_t$, welche zur Herleitung der Formeln VII.—X. gedient, leicht abgeleitet werden.

Die Resultate, die diese Gleichungen ergeben, bringen wir am besten in einem Zahlenbeispiel zur Anschauung.

Ein continuirlicher Träger von zwei Oeffnungen à 30^m habe ein Eigengewicht $p = 2400$ Kilo pro laufenden Meter. Die zufällige Last werde gemäss Tabelle XVI. zu $k = 6000$ Kilo angenommen, so dass wir erhalten:

$$q = 8400 \text{ Kilo und } \frac{p}{q} = \frac{2}{7}, \ \frac{k}{q} = \frac{5}{7}.$$

Indem wir die in N°. **80** angenommenen Belastungen N°. 1—4 zu Grunde legen, erhalten wir die zum Auftragen der $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ erforderlichen Werthe aus den Gleichungen 116—122, wie sie in nachstehender Tabelle verzeichnet sind:

Art der Belastung.	$\mathfrak{M}_1$	$A = -\mathfrak{V}_1$	$\mathfrak{V}'_1$	$\mathfrak{V}_2$	$\mathfrak{V}'_2 = C$	Abscisse $\mathfrak{V}_x = 0$	$\mathfrak{M}_x$ max $= \mathfrak{M}_a$
	ql^2	ql	ql	ql	ql	l	ql^2
Ganze Brücke mit p belastet.	$-0{,}0714$	$0{,}10714$	$-0{,}1786$	$+0{,}1786$	$+0{,}10714$	$0{,}375$	$+0{,}02009$
Ganze Brücke mit q belastet.	$-0{,}125$	$0{,}375$	$-0{,}625$	$+0{,}625$	$+0{,}375$	$0{,}375$	$+0{,}07031$
AB belastet mit q, BC „ „ p.	$-0{,}08035$	$0{,}4196$	$-0{,}5808$	$+0{,}2232$	$+0{,}0625$	$0{,}4196$	$+0{,}08805$
AB belastet mit p, BC „ „ q.	$-0{,}08035$	$0{,}0625$	$-0{,}2232$	$+0{,}5803$	$+0{,}4286$	$0{,}2187$	$+0{,}00685$

Ausserdem sind noch zu berechnen die Maxima von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ nach den Gleichungen VII.—X. dieser N°. Wir bemerken, dass die Maximalwerthe sich aus zwei Theilen zusammensetzen: dem Beitrag des Eigengewichts p, das für alle Belastungsfälle bei gleichem Gewicht constant, und aus dem Beitrag der Ueberlast k. Wir berechnen wieder wie oben in der Tabelle die einzelnen Werthe nicht nach Kilogramm und Meter, sondern in Vielfachen von q und l, und erhalten

1) für das Maximum — $\mathfrak{M}_x$ aus Gleichung VII.:

$x =$	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0 l.	
Beitrag von $k =$	— 0,0357	— 0,0413	— 0,0526	— 0,0689	— 0,0898	ql^2
» » $p =$	— 0,0057	— 0,0121	— 0,0193	— 0,0271	— 0,0357	ql^2
max — $\mathfrak{M}_x =$	— 0,0414	— 0,0534	— 0,0719	— 0,0960	— 0,1250	ql^2

2) für das Maximum + $\mathfrak{M}_x$ nach Gleichung VIII.:

$x =$	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0 . l	
Beitrag von $k =$	+ 0,0214	+ 0,0109	+ 0,0044	+ 0,0009	0	ql^2
» » $p =$	— 0,0057	— 0,0121	— 0,0193	— 0,0271	— 0,0357	ql^2
max + $\mathfrak{M}_x =$	+ 0,0157	— 0,0012	— 0,0149	— 0,0263	— 0,0357	ql^2

3) für das Maximum — $\mathfrak{B}_x$ nach Gleichung IX.:

$x =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0 . l	
Beitrag von $k =$	—0,3125	—0,1897	—0,1022	—0,0437	—0,0108	0	ql^2
» » $p =$	—0,1071	—0,05	+0,0071	+0,0643	+0,121	+0,1785	ql^2
max — $\mathfrak{B} =$	—0,4196	—0,2397	—0,0951	+0,0206	+0,1102	+0,1785	ql^2

4) für das Maximum + $\mathfrak{B}_x$ nach Gleichung X.:

$x =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
Beitrag von $k =$	+0,0446	+0,0624	+0,1149	+0,1986	+0,3120	+0,4465	ql^2
» » $p =$	—0,1071	—0,05	+0,0071	+0,0643	+0,1210	+0,1785	ql^2
max + $\mathfrak{B} =$	—0,0625	+0,0124	+0,1220	+0,2629	+0,4330	+0,625	ql^2

Obige Resultate sind nun in der graphischen Darstellung Tafel IV aufgezeichnet, hiebei aber vermehrter Deutlichkeit halber die positiven und negativen Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ auf verschiedenen Seiten der Axe aufgetragen.

Wir ersehen aus dieser graphischen Darstellung Folgendes:

1) Bezüglich der Kurven $\mathfrak{M}$:

Die Maximalwerthe $\mathfrak{M}$ in dem Balkenstücke zwischen dem Inflectionspunkt ($a = 0{,}8\,l$) und der Mittelstütze B, welche für einseitige Belastungen nach Fig. 107 und Fig. 107ª eintreten, weichen nur w e n i g ab von den Momentenkurven, welche man durch Belastung ganzer Oeffnungen erhält.

Es genügt zur Aufzeichnung dieser Kurvèn die Berechnung weniger Werthe, auch können die Kurven max + $\mathfrak{M}$ ganz ausgelassen werden, da sie in der Nähe der Mittelpfeiler stets geringere absolute Werthe geben, als die Kurve — $\mathfrak{M}$. Wir haben diese letzteren Werthe in der graphischen Darstellung der Tafel IVª für verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$ eingetragen, und geben diese Figuren nunmehr auch die Grenzwerthe für alle denkbaren Belastungen an.

Diese zwischen Inflectionspunkt und dem Stützpunkt B eingetragenen Grenzwerthe werden aber in Wirklichkeit nie vollständig erreicht, weil, wie oben (N°. **77** am Schluss) erläutert, die betreffenden Belastungsarten, welche die Trennung der Züge voraussetzen, in Wirklichkeit nur durch Einschaltung leerer (nicht schwerloser) Wagen annähernd dargestellt werden.

2) Bezüglich der Kurven $\mathfrak{V}$:

Die Maximalwerthe $\mathfrak{V}$ zeigen erhebliche Abweichungen von den Kurven $\mathfrak{V}$ für Belastung ganzer Oeffnungen, in ähnlicher Weise wie wir diess bei freiaufliegenden Trägern gefunden haben (vergl. Kurven max $\mathfrak{V}$ auf Tafel II). Es fallen wie beim freiaufliegenden Träger die Kurven max $\mathfrak{V}$ für die Auflagerpunkte mit der Geraden $\mathfrak{V}$ für Belastung ganzer Oeffnungen zusammen, so dass beispielsweise die Kurve max $-\mathfrak{V}$ beim Auflager A die Gerade berührt, welche dem Werthe von $\mathfrak{V}$ für den Belastungsfall N°. III entspricht: am Auflager B geht die Kurve max $-\mathfrak{V}$ tangentiell in die Gerade $\mathfrak{V}$ für Belastung der ganzen Brücke mit dem Eigengewicht p über (Fall I). Die grösste Abweichung von den Kurven der Belastungsfälle I—IV tritt, wie man sich leicht überzeugt, ein für die Abscisse $x = \frac{7}{16}\, l$, und zwar sowohl für max $-\mathfrak{V}$, als max $+\mathfrak{V}$, und findet man diese grösste Abweichung durch einfache Betrachtung mit Hülfe der Gleichungen IX, X und 118)

$$ab = a'b' = 0{,}1173\ kl,$$

somit wenig verschieden von dem Werthe 0,125 kl, den wir in N°. **59** für den freiaufliegenden Träger gefunden haben — da die Kurven max $\mathfrak{V}$ flach verlaufen, so genügt in der Praxis meist zum Auftragen derselben dieser eine Werth, indem man nach bekannten Regeln eine gewöhnliche Parabel substituirt, man wird auch nur einen kleinen Fehler begehen, wenn man von diesem Punkte aus nach den Auflagern zu einfach gerade Linien zieht.

Es sind nun ähnlich wie bei den $\mathfrak{M}$ in den graphischen Darstellungen der Tafel IV^a. die absolut grössten Werthe $+\mathfrak{V}$ resp. $-\mathfrak{V}$ eingetragen, wodurch wiederum — übrigens hier auf die ganze Trägerlänge — Grenzwerthe erzielt werden, von welchen die auf der Seite der Mittelstütze befindlichen wiederum nur annähernd erreicht werden, da auch hier die Einschaltung leerer Wagen voausgesetzt werden muss.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die früher übliche Methode, wonach nur die Belastung ganzer Oeffnungen in Rechnung genommen wurde, nur wenig abweichende Resultate ergiebt, auch wenn bei der genauen Berechnung nicht nur eine beliebige Länge der Ueberlast, sondern selbst eine Trennung des Zugs (Einschaltung leerer Wagen) berücksichtigt wird. Die max

𝔐 bleiben auf die grössere Länge des Trägers (von A bis zum Inflectionspunkt) ganz unverändert, die zwischen letzterem und der Mittelstütze B eintretende Abweichungen sind an sich gering, und finden zudem an Punkten statt, woselbst aus praktischen Gründen, insbesondere aus Rücksicht des Wechsels zwischen Druck und Zug ohnedem eine Verstärkung der Dimensionen erforderlich ist. — Bei den 𝔙 finden etwas grössere Abweichungen statt, welche aber da, wo sie erheblich werden, auf Stellen treffen, an denen, wie erwähnt, die Dimensionen ohnedem stärker genommen werden müssen.

Für die praktische Anwendung genügt es bezüglich der Bestimmung der 𝔐 die Grenzwerthe, soweit dieselben von den Kurven der Belastung ganzer Oeffnungen abweichen, nach dem Augenmass nach Anleitung der Tafel IV^a. zu ergänzen, bezüglich der 𝔙 entsprechen die Werthe der Maxima an den Auflagern wiederum den Belastungen ganzer Oeffnungen, die zwischenliegenden Grenzwerthe werden, wie aus den graphischen Darstellungen der Tafel IV^a. ersichtlich, nach Anleitung der Tafel IV. unter Bestimmung des Punktes der grössten Abweichung ohne Anwendung der complicirten Formeln mit vollständig ausreichender Genauigkeit auf einfache Weise bestimmt.

82. Wir wollen nunmehr den Einfluss concentrirter Lasten auf continuirliche Träger untersuchen und demnächst feststellen, wie weit wir der Wirklichkeit nahe kommen, wenn wir in ähnlicher Weise wie beim freiaufliegenden Träger statt der Einzellasten eine gleichförmig vertheilte Last substituiren.

Die Formeln, die wir hiebei anzuwenden haben, sind unmittelbar diejenigen der N°. **73**, und erhalten wir für den Fall eines continuirlichen Trägers über zwei Oeffnungen, deren Spannweiten l_1 und l_2, wenn die Stützen in gleicher Höhe liegen, aus Gleichung 116)

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2(l_1 + l_2)} R_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

wo nach Gleichung 107) zu setzen:

$$R_1 = -\frac{1}{l_1} \Sigma_1 Gg(l-g)(l+g) - \frac{1}{l_2} \Sigma_2 Gg(l-g)(2l-g) \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

wobei die Grössen unter den Summenzeichen mit denselben Indexen zu versehen sind, wie das Summenzeichen selbst, der Coordinatenursprung der g je am linkseitigen Auflager der betreffenden Oeffnung anzunehmen ist, die der Index angiebt.

Gewöhnlich tritt ausser Einzelkräften noch das Eigengewicht auf und wird, wenn p_1 p_2 die Eigengewichte der Oeffnungen l_1 und l_2 bezeichnen, der Ausdruck für R_1 die Form annehmen:

$$R_1 = -\frac{1}{l_1} \Sigma_1 Gg(l-g)(l+g) - {}^1\!/\!_4 p_1 l_1{}^3 - \frac{1}{l_2} \Sigma_2 Gg(l-g)(2l-g) - {}^1\!/\!_4 p_2 l_2{}^3 \quad \text{III.}$$

Nachdem $\mathfrak{M}_1$ gefunden, ergeben sich dann alle übrigen Werthe von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ direct aus den Gleichungen 108)—110) der N°. **73**.

Wir bringen die Resultate dieser Gleichungen zur Anschauung, indem wir in dem Zahlenbeispiel der N°. **81** statt gleichförmig vertheilter Last einen Bahnzug von 3 bayerischen Tender-Locomotiven mit angehängten belasteten Wagen substituiren, wie derselbe in Tafel IV^b. aufgezeichnet ist.

Da es uns vorzugsweise auf Vergleichung der Resultate beider Beispiele ankommt, so lassen wir das Eigengewicht, das in beiden dasselbe ist, ausser Berechnung; indem wir in Gleichung I.—III. noch einführen $l_1 = l_2$ ($= 30^m$), erhalten wir folgenden Ausdruck für das Stützenmoment $\mathfrak{M}_1$:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{4 l_2}\left[\Sigma_1 \, Gg\,(l-g)\,(l+g) + \Sigma_2 \, Gg\,(l-g)\,(2l-g)\right] \quad . \; . \; \text{IV.}$$

Es sei die Brücke mit dem ganzen auf Tafel IV^b aufgezeichneten Zuge belastet, alsdann ergiebt sich die Berechnung der Summen in der Parenthese aus folgender Tabelle:

1te Oeffnung mit Locomotiven belastet.				2te Oeffnung mit Wagen belastet.			
G	g	G (l—g)	Gg (l—g) (l+g)	G	g	G (l—g)	Gg (l—g) (2l—g)
T.	m			T.	m		
10,7	2,3	296,4	22022	9,0	2	252	29232
12,8	3,6	337,9	40886	9,0	5	225	61875
12,8	5,0	320,0	56000	9,0	8	198	82368
12,8	6,4	302,1	70389	9,0	11	171	92169
12,8	10,6	248,3	106868	9,0	14	144	92736
12,8	12,0	230,4	116122	9,0	17	117	85527
12,8	13,4	212,5	123590	9,0	20	90	72000
10,7	14,7	163,7	107567	9,0	23	63	53613
9,7	17,7	119,3	100725	9,0	26	36	31824
12,8	21,6	107,5	119819	9,0	29	9	8091
12,8	23,0	89,6	109222				
12,8	24,4	71,7	95175				
10,7	25,7	46,0	65849				
9,7	28,7	12,6	21227				
166,7 $=\Sigma_1 G$		2558,0 $=\Sigma_1 G(l-g)$	1155461	90,0 $=\Sigma_2 G$		1305 $=\Sigma_2 G(l-g)$	609435

Diess in Gleichung IV. eingesetzt, ergiebt:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{4 \cdot 30^2} (1'155461 + 609435) = -490{,}02^{mT}$$

und die Vertikalkräfte zunächst den Auflagern:

Vertikalkraft beim Auflager A nach Gl. 108) m=1 gesetzt:

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{l}\left[-\mathfrak{M}_1 - \Sigma_1 G(l-g)\right] = \frac{1}{30}\left[490{,}02 - 2558\right] = -68{,}93^T$$

Vertikalkraft links von B nach Gl. 108ᵃ):

$$\mathfrak{V}'_1 = \mathfrak{V}_1 + \Sigma_1 G = -68{,}93 + 166{,}7 = \qquad +97{,}77^T$$

Vertikalkraft rechts von B nach Gl. 108), indem man m=2 setzt:

$$\mathfrak{V}_2 = \frac{1}{l}\left[\mathfrak{M}_1 - \Sigma_2 G(l-g)\right] = \frac{1}{30}\left[-490{,}02 - 1305\right] = -59{,}83^T$$

Vertikalkraft bei C nach Gl. 108ᵃ):

$$\mathfrak{V}'_2 = \mathfrak{V}_2 + \Sigma_2 G = -59{,}83 + 90 = \qquad +30{,}17^T$$

Die Momente und Vertikalkräfte im Querschnitt x ergeben sich nun ebenso wie beim einfachen Träger aus den Gleichungen 109) und 110) und kann eine specielle Vorführung der Rechnung unterbleiben.

Ueber die Stellung des Lastzuges, welche in den verschiedenen Querschnitten x die Maxima der Momente $\mathfrak{M}_x$ hervorbringt, geben am besten die Influenzkurven Aufschluss, welche nach Anleitung der N°. **78** in Tafel IVᵇ eingetragen sind. Für den Trägertheil zwischen A und dem Inflectionspunkt (a = 0,8 l) wird $\mathfrak{M}$ ein Maximum, wenn neben dem fraglichen Querschnitt selbst die grössten Lasten concentrirt sind, auserdem die ganze Oeffnung AB belastet, die Oeffnung BC aber unbelastet ist. (Die Influenzkurve hat für AB überall positive, für BC aber negative Ordinaten.)

Es ist desshalb noch ein zweiter Belastungsfall berechnet, für welchen die Belastung der 1ᵗᵉⁿ Oeffnung mit Locomotive bleibt, die Wagenbelastung der 2ᵗᵉⁿ Oeffnung aber wegfällt. Man erhält für diesen Fall:

$$\mathfrak{M}_1 = -320{,}96^{mT} \quad \mathfrak{V}_1 = -74{,}57 \quad \mathfrak{V}'_1 = +92{,}13$$

Maximalmoment in AB bei x = 12,0 $\mathfrak{M}_x = 504{,}3^{mT}$.

Es sind nun in Tafel IVᵇ die Kurven $\mathfrak{M}$ für diese beiden Belastungen aufgetragen, ausserdem auch die Umhüllungskurven $\mathfrak{M}$ für gleichförmig vertheilte Last nach dem Beispiel der N°. **81** (unter Weglassung des Beitrags von p) und ersieht man aus der Vergleichung der Kurven für concentrirte und gleichförmig vertheilte Last, dass erstere nur ausnahmsweise (im 1ᵗᵉⁿ Drittel der Spannweite) die letzteren überragen. Auffallend erscheint, dass die Kurven $-\mathfrak{M}$ weit unter denen für gleichförmige Belastung bleiben, es rührt diess daher, dass nur die eine Oeffnung mit Locomotiven belastet ist: wäre

diess auch bei der 2ten Oeffnung geschehen, so würden die Kurven näher kommen ($\mathfrak{M}_1$ würde, wenn Oeffnung 2 ebenfalls belastet, wie $1 = 642,0$, während bei gleichförmiger Belastung $k = 6000$ $\mathfrak{M}_1 = 675^{mT}$). In der Praxis ist aber ein solcher Fall unwahrscheinlich, ebensowenig denkbar ist es, dass Belastungen vorkommen, welche in dem Trägerstück J_1 bis B die negativen Maximas von $\mathfrak{M}$ hervorbringen, weil in diesem Falle auf beiden Oeffnungen Locomotiven stehen müssten, die durch nicht belastete Strecken von einander getrennt sind (vergl. die Influenzkurven für den Querschnitt $x = 0,9$). Wir können uns desshalb mit den beiden berechneten Belastungsarten begnügen und ziehen daraus den weitern Schluss, dass es jedenfalls genügt, auch bei continuirlichen Trägern als stellvertretende Belastung die Werthe der Tabelle XVI. anzunehmen, und sind dann selbst für den ausserordentlichen Fall hinreichend gesichert, dass die ganze Brücke mit Locomotiven belastet ist.

Um den Einfluss concentrirter Lasten auf die Kurven $\mathfrak{V}$ zu untersuchen, sind 4 Zugstellungen berücksichtigt worden (vergl. Tafel IV[b]), welche dem Max — $\mathfrak{V}$ entsprechen. Die für $\mathfrak{V}_x$ erhaltenen Werthe kann man sodann vergleichen mit den Max — $\mathfrak{V}$, welche aus Gleichung IX. und X. der N°. 81 sich ergeben (indem man dort $p = 0$ setzt) und sind ausserdem mit Hülfe dieser Gleichungen diejenigen k_1 berechnet, welche dieselben Maximalwerthe — $\mathfrak{V}$ hervorbringen würden. Die Resultate der Rechnung zeigt folgende kleine Tabelle.

	Max von — $\mathfrak{V}$		Werthe von k_1
	für concentrirte Lasten.	für gleichförmige Belastung $k = 6000$.	(stellvertretende gleichförmige Belastung).
$x = 0,0$	84,77	78,75	6488 Kil.
0,2	53,6	47,81	6726
0,4	29,52	25,76	6875
0,6	12,87	11,02	7031

Auf Berechnung der max + $\mathfrak{V}$ können wir verzichten, weil dieselben (nach Fig. 107[c]) eine Trennung des Zuges voraussetzen, die in Wirklichkeit nicht vollständig möglich ist; eine für den Querschnitt $x = 0,4 . 1$ berechnete Zugstellung IV[a], wenn nämlich der Bahnzug von A aus gegen B vorrückend gedacht ist, zeigt, dass max + $\mathfrak{V}$ bedeutend unter dem max für gleichförmige

Belastung bleibt, was daher rührt, dass bei Berechnung der letzten vorausgesetzt ist, dass gleichzeitig die ganze 2te Oeffnung belastet werde.

Vergleichen wir die obigen Werthe für k_1 mit den in N°. **67** für die Spannweite von 30^m erhaltenen, so sehen wir, dass sie hinter diesen eher zurückbleiben, wir werden also auch bezüglich der $\mathfrak{B}$ sicher gehen, wenn wir die für freiaufliegende Träger gewonnenen Werthe von k_1 einfach auch bei continuirlichen Trägern in Anwendung bringen.

83. Gehen wir nunmehr zu dem Fall über, dass die 3 Stützpunkte nicht in einer Ebene liegen, beide Spannweiten seien gleich gross $= l$, die Endstützen liegen in gleicher Höhe, die Mittelstütze B aber sei um s gegen die Endstützen gesenkt.

Dieses Beispiel lässt sich benützen, um die Vortheile zu beleuchten, welche durch Senkung der Mittelstütze erreicht werden können, andererseits lässt sich daraus der Einfluss bestimmen, den eine nicht beabsichtigte Senkung oder Hebung einer Stütze hervorbringt.

Wir erhalten für diesen Fall direct aus der allgemeinen Gleichung 107), indem wir $c_{m-1} = c_{m+1} = 0 \; c_m = s$ setzen:

$$R_1 = 6E\Theta \frac{2s}{l} - \frac{1}{l}\left[\Sigma_1 Gg(l-g)(l+g) + \Sigma_2 Gg(l-g)(2l-g)\right] \quad \text{I.}$$

und für die gleichförmigen Belastungen q_1 und q_2

$$R_1 = 12E\Theta \frac{s}{l} - \frac{l^3}{4}(q_1 + q_2)$$

$$= \frac{l^3}{4}\left[48E\Theta \frac{s}{l^4} - q_1 - q_2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

folglich nach Gleichung 116) (Seite 182):

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{R_1}{4l} = -\frac{l^2}{16}\left[q_1 + q_2 - 48E\Theta \frac{s}{l^4}\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Setzen wir zur Vereinfachung wie in Gleichung VIII. der N°. **21**

$$\varkappa_1 = \frac{24E\Theta s}{l^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

so folgt:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{l^2}{16}(q_1 + q_2 - \varkappa_1) \quad \ldots\ldots \quad 123).$$

Nachdem $\mathfrak{M}_1$ bekannt, kann alles Uebrige bestimmt werden, wie für den Fall gleichhoher Auflager, und man erhält:

Vertikalkraft am Endpfeiler A

$$\mathfrak{B}_1 = -A = -\frac{l}{16}(7q_1 - q_2 + 2\varkappa_1) \quad \ldots \quad 124)$$

dessgleichen am Mittelpfeiler

$$\mathfrak{B}'_1 = \frac{l}{16}(9q_1 + q_2 - 2\varkappa_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 124^a)$$

Vertikalkraft rechts vom Mittelpfeiler

$$\mathfrak{B}_2 = -\frac{1}{16}(9q_2 + q_1 - 2\varkappa_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 124^b)$$

dessgleichen am Endpfeiler C

$$\mathfrak{B}_2' = C = \frac{1}{16}(7q_2 - q_1 + 2\varkappa_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 124^c)$$

und die Auflagerreaction in B

$$B = \mathfrak{B}_1' - \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{16}(10q_1 + 10q_2 - 4\varkappa_1) \quad 125)$$

Es ergeben sich nun die Momente und Vertikalkräfte im Querschnitt x nach früheren Vorgängen (vergl. N°. **79**) und kann in gleicher Weise, wie für gleichhohe Stützen eine graphische Darstellung der Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ angefertigt werden.

Die über Maxima der Vertikalkräfte und Momente aufgestellten Sätze sind für Träger mit gesenkten Stützen genau in gleicher Weise gültig, wie für gleichhohe Stützenlage; indem wir in den Formeln 116)—122) die Werthe von $\mathfrak{M}$ aus Gleichung 123) statt aus N°. 116^b einführen, erhalten wir die Maxima $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{B}_x$ auch bei partieller Belastung der Oeffnungen.

Die Lage der Inflectionspunkte der durch Gleichung II. der N°. **81** ausgedrückten Beitragstrecke g_x erleiden hiebei keine Veränderung, es können somit die graphischen Darstellungen leicht in gleicher Weise vervollständigt werden, wie diess oben in N°. **81** geschehen ist.

Wenn man in den Gleichungen 123)—125) die Grössen s und somit $\varkappa_1 = 0$ setzt, so müssen die genannten Gleichungen in die Gleichungen 116)—120) übergehen, da dann sämmtliche Stützpunkte gleich hoch angenommen sind, d. h. die Senkung des Mittelstützpunktes aufgehoben ist; es kann diess als Probe für die Richtigkeit der Gleichungen 123)—125) betrachtet werden.

84. Den wichtigsten Einfluss übt die Senkung der Mittelstützen auf die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$, welche aus den nunmehr bekannten Auflagerdrücken gefunden werden.

Durch Combination der Gleichungen 124) und 122) findet man (indem jetzt immer die Weite l beider Oeffnungen gleich gross angenommen wird) unter Beibehaltung der seitherigen Bezeichnungen:

grösstes Angriffsmoment, innerhalb der Oeffnungen

$$\max \mathfrak{M}_a = \frac{l^2}{512 q_1}(7q_1 - q_2 + 2\varkappa_1)^2 \quad . \; . \; . \quad 126)$$

In dieser Gleichung bezeichnet q_1 die Belastung der Oeffnung AB, q_2 die Belastung der Oeffnung BC; der Werth $\varkappa_1$ ist durch Gleichung IV der N°. **83** gegeben.

Das Angriffsmoment auf dem Mittelpfeiler B ist wie oben gefunden:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{l^2}{16}(q_1 + q_2 - 2\varkappa_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 123)$$

Die Anschauung der Gleichungen 126) und 123) zeigt, dass $\mathfrak{M}_a$ seinen grössten Werth hat

$$\text{für } q_1 = q \qquad q_2 = p$$

während $\mathfrak{M}_1$ sein Maximum erreicht

$$\text{für } q_1 = q_2 = q$$

und folgt hieraus:

$$M \max \mathfrak{M}_a = \frac{l^2}{512\,q}(7q - p + 2\varkappa_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 126^a)$$

$$\operatorname{Max} \mathfrak{M}_1 = -\frac{l^2}{8}(q - \varkappa_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 123^a)$$

Man sieht, dass M max $\mathfrak{M}_a$ zunimmt, je grösser $\varkappa$, d. h. je grösser die Senkung der Zwischenstützen ist, während Max $\mathfrak{M}_1$, absolut genommen, gleichzeitig abnimmt.

Der Vortheil der Senkung der Zwischenstützen wird nun darin gesucht, dass man solche Werthe der Senkung s, beziehungsweise der Grösse $\varkappa$, aussucht, wonach die aus Gleichung 126^a) und 123^a) gefundenen Maximalwerthe einander gleich werden; es wird dadurch der kleinste Werth für das absolute Maximum von $\mathfrak{M}$ erhalten. — Indem man nun die Werthe

M max $\mathfrak{M}_a$ (nach Gleichung 126$_a$) und
Max $\mathfrak{M}_1$ (nach Gleichung 123^a)

einander gleichsetzt, erhält man

$$\varkappa_1 = \frac{q}{2}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32\,\frac{p}{q}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

und indem man für $\varkappa_1$ seinen Werth aus N°. 83 Gl. IV. einsetzt: günstigste Senkung der Mittelstütze B

$$s = \frac{q l^4}{48\,E\Theta}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32\,\frac{p}{q}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad II.$$

E ist der Elasticitätsmodul des fraglichen Materials, Θ das Trägheitsmoment des betrachteten Querschnittes.

Ist für einen bestimmten Träger $\varkappa_1$ nach Gleichung I. berechnet, so finden sich die Auflagerdrücke und die wichtigsten Angriffsmomente nach den Gleichungen 123)—126). Insbesondere erhält man Max $\mathfrak{M}_1$ unmittelbar aus Gleichung 123^a).

Wir haben auf diese Weise die nachstehende Tabelle XXI. für eine Reihe schmiedeiserner Brücken verschiedener Spannweite gebildet; die Verhältnisse $\frac{p}{q}$ sind der Tabelle XVII. entnommen (vergl. N°. 68); hienach sind für die vortheilhafteste Senkung des Mittelstützpunktes der Werth Max $\mathfrak{M}_1$ und die Grösse der Senkung selbst bestimmt.

Letztere ist wesentlich vom Trägheitsmoment des Trägers abhängig. Wir stellen die Bedingung, dass die grösste Spannung $\mathfrak{A}$ der Gurtungen 600 Kilo per □cm betragen solle.

Nun ist nach Gleichung 31) bei gleicher Stärke beider Gurtungen

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}} \cdot \frac{H}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III.}$$

Indem wir nun ausserdem die Trägerhöhe H gleich $^1/_{10}$ der Spannweite l annehmen, erhält man durch Wertheinsetzung in Gleichung II.

$$s = \frac{q l^3}{7200 \text{ Max } \mathfrak{M}_1}\left(\frac{p}{q} - 23 \pm \sqrt{544 - 32 \frac{p}{q}}\right) \quad . \; . \; \text{IV.}$$

und sind die Werthe von s gleichfalls in Tabelle XXI eingetragen.

Aus Tabelle XXI. ist insbesondere ersichtlich, wie kleine Senkungen hinreichen, um grosse Differenzen in den Angriffsmomenten hervorzurufen.

Tabelle XXI (für 2 Oeffnungen).

	Spannweite.	10	15	20	30	40.	60	100
	Verhältniss $\frac{p}{q}$	$\frac{1}{6,03}$	$\frac{1}{4,65}$	$\frac{1}{4,3}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,5}$	$\frac{1}{1,9}$
Bei gleicher Höhenlage der Stützpunkte.	max $\mathfrak{M}^a$ inner den Oeffnungen.	ql^2 0,0912	0,0901	0,0894	0,0876	0,0868	0,0851	0,0819
	max $\mathfrak{M}_1$ auf dem Mittelpfeiler.	ql^2 0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
Vortheilhafteste Senkung des Mittelstützpunktes.	$\varkappa_1$	q 0,1878	0,1940	0,1981	0,2068	0,2187	0,2239	0,2430
	Gleichzeitiges Max $\mathfrak{M}$ auf dem Mittelpfeiler und innerhalb der Oeffnungen.	ql^2 0,1015	0,1007	0,1002	0,0992	0,0983	0,0970	0,0946
	Senkung des Mittelstützpunktes = s.	cm. 0,514	0,803	1,098	1,733	2,483	3,848	7,523

Die Senkung kann nicht allein dadurch hervorgerufen werden, dass man das mittlere Auflager tiefer herstellt, sondern insbesondere auch dadurch, dass man den Träger ebendaselbst überhöht; anderseits ist eine ungleiche Höhe der Auflager ohne Einfluss, sobald der Träger dem Längenprofil der Auflager sich anschliesst.

Selbstverständlich soll der Träger die verlangte Form haben, ehe er durch sein Eigengewicht eingebogen ist; man kann übrigens die durch das Eigengewicht hervorgerufene Biegung berechnen und mit der wirklichen Krümmung vergleichen.

Die Berechnung der in den continuirlichen Trägern thätigen Kräfte wird daher durch verhältnissmässig kleine Fehler in der Höhenlage der Stützpunkte wesentlich alterirt und giebt Tabelle XXI. ein Bild von den Aenderungen, die durch kleine Senkungsdifferenzen entstehen können.

Bei kleineren Spannweiten kann daher die Continuität der Träger nur mit grosser Vorsicht und mit Berücksichtigung vorstehend bezeichneter Eventualitäten angewendet werden; da zudem die Vortheile der Continuität hier weit geringer sind (vergl. auch Tabelle XX.), so wird man bei kleineren Weiten meist auf die Continuität ganz verzichten. — Bei grössern Spannweiten, wo die vortheilhafteste Senkung der Zwischenstützen immer mehrere Centimeter beträgt, wird man bei sorgfältiger Ausführung die beabsichtigte Gestalt der Gurtungen mit hinreichender Sicherheit herstellen können; eine Senkung der Zwischenstützen hätte dann insbesondere den Vortheil, dass man die Trägerstärke gleichmässiger herstellen kann und damit den Voraussetzungen, welche bei Berechnung der elastischen Linie gemacht werden, nachkommt.

Jede Senkung der Zwischenstützen, sei sie nun absichtlich oder durch einen Fehler entstanden, kann, insofern sie genau erhoben ist, durch vorstehende Formeln berücksichtigt werden; man berechnet zunächst x_1 nach Gleichung IV. der N°. **83** und findet dann die Auflagerdrücke und eine Reihe von Angriffsmomenten unmittelbar nach den Gleichungen 123)—126).

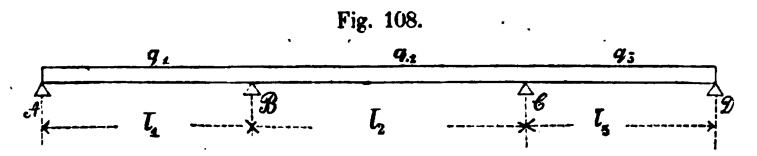
Unabsichtliche Differenzen in der Höhenlage können insbesondere auch in der Weise eintreten, dass die Zwischenstützen höher zu liegen kommen, als die Endstützen; das ohnedem grosse Angriffsmoment auf den Zwischenstützen wird dann weiterhin vermehrt. — Es ist diess, wie oben bemerkt, ein wesentlicher Grund gegen die Continuität der kleineren Brücken, indem bei letzteren der Einfluss eines kleinen Fehlers in der Höhenlage sehr bedeutend wird.

85. Auch für drei Oeffnungen betrachten wir zunächst den Fall, dass einzelne Oeffnungen durch die zufällige Last gleichmässig belastet sind, und haben wir folgende Belastungsarten in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen:

1) Belastung sämmtlicher 3 Oeffnungen mit p.
2) Belastung sämmtlicher Oeffnungen mit q (Gesammtlast).
3) Belastung je einer Aussenöffnung und der Mittelöffnung mit q (Fall I und II der Tafel IV[a]. Fig. c).
4) Belastung beider Aussenöffnungen mit q (Fall III).
5) Belastung der Mittelöffnung mit q (Fall IV).
6) Belastung je einer der Aussenöffnungen mit q (Fall V und VI Fig. c).

Wir nehmen vorerst sämmtliche 4 Auflagerpunkte in gleicher Höhe an, es seien aber der Allgemeinheit halber die Spannweiten verschieden, der Reihe nach $= l_1, l_2, l_3$ und mit q_1, q_2, q_3 pro Längeneinheit belastet (vergl. Fig. 108).

Fig. 108.



Die Gleichungen 107[a]) schreiben sich für diesen Fall, da $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_3 = 0$, folgendermassen an:

$$\left.\begin{aligned} 2\mathfrak{M}_1 (l_1 + l_2) + \mathfrak{M}_2 l_2 \qquad &= R_1 \\ \mathfrak{M}_1 l_2 \qquad + 2\mathfrak{M}_2 (l_2 + l_3) &= R_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

woraus man durch Elimination erhält:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \frac{2R_1 (l_2 + l_3) - l_2 R_2}{4 (l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2} \\ \mathfrak{M}_2 &= \frac{2R_2 (l_1 + l_2) - l_2 R_1}{4 (l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

worin nach Gl. 107) analog der Entwicklung in N°. **79** zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= -\tfrac{1}{4} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3) \\ R_2 &= -\tfrac{1}{4} (q_2 l_2^3 + q_3 l_3^3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Nachdem $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gefunden, ist alles Uebrige nach den Gleichungen der N°. **73** gegeben.

In der Praxis werden meist die Endöffnungen gleich gross gewählt, so dass $l_1 = l_3$; die Formeln vereinfachen sich hiedurch in etwas; eine weitere Vereinfachung ergiebt sich aber dadurch, dass man nur für die e i n e B r ü c k e n h ä l f t e die Werthe zu berechnen und die Kurven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ aufzuzeichnen braucht.

Für diesen speciellen Fall erhalten wir der Reihe nach:

Momente am Auflager B nach Gleichung I. und Gleichung III. nach entsprechender Reduction:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{q_1 (2 l_1^3 l_2 + 2 l_1^4) + q_2 (l_2^4 + 2 l_1 l_2^3) - q^5 l_2 l_1^3}{16 (l_1 + l_2)^2 - 4 l_2^2} \quad . \quad 126).$$

Das Moment $\mathfrak{M}_1$ am Auflager C erhält man einfach durch Vertauschung von q_1 mit q_3.

Die Vertikalkraft bei A ergiebt sich aus Gleichung 108)

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{l_1}\left[-\mathfrak{M}_1 - \frac{q_1 l_1^2}{2}\right]$$

$$= \frac{-q_1(14 l_1^3 l_2 + 6 l_1^2 l_2^2 + 6 l_1^4) + q_2(l_2^4 + 2 l_1 l_2^3) - q_3 l_1^3 l_2}{l_1\left[16(l_1 + l_2)^2 - 4 l_2^2\right]} \quad 127).$$

Die Vertikalkraft links vom Auflager B könnte aus Gleichung 108ᵃ) bestimmt werden, einfacher ist aber sie aus $\mathfrak{V}_1$ abzuleiten, und erhält man:

$$\mathfrak{V}'_1 = \mathfrak{V}_1 + q_1 l_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 127^a)$$

Gleichung 108) giebt sodann die Vertikalkraft rechts von B, und erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\mathfrak{V}_2 = \frac{-q_1(3 l_1^3 l_2 + 2 l_1^4) - q_2(16 l_1 l_2^3 + 6 l_2^4 + 8 l_1^2 l_2^2) + q_3(3 l_1^3 l_2 + 2 l_1^4)}{l_2\left[16(l_1 + l_2)^2 - 4 l_2^2\right]} \quad 128).$$

Nachdem $\mathfrak{M}_1$ und die Vertikalkräfte an den Pfeilern bekannt sind, dienen die allgemeinen Gleichungen der N°. **73** zur Bestimmung von $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{V}_x$ in beliebigem Querschnitt, da jedoch, wie wir gesehen haben, die Kurven $\mathfrak{V}$ gerade Linien, die Kurven $\mathfrak{M}$ Parabeln vorstellen, so reichen zum Auftragen der $\mathfrak{V}$ die oben berechneten Werthe vollständig aus, zum Aufzeichnen der Kurven $\mathfrak{M}$ genügen aber die Scheitelpunkte der Parabeln in den Oeffnungen.

Wie im Falle von 2 Oeffnungen erhält man die Abscisse des Scheitelpunkts ($\mathfrak{M}_a$) in der 1ten Oeffnung

$$x_0 = -\frac{\mathfrak{V}_1}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 129)$$

und ist für diese Abscisse

$$\mathfrak{M}_a = \frac{\mathfrak{V}_1^2}{2 q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 130)$$

ebenso für die 2te Oeffnung:

$$x_0 = -\frac{\mathfrak{V}_2}{q_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 129^a)$$

und das Moment $\mathfrak{M}_b$ für diese Abscisse nach Gl. 110) der N°. **73**

$$\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_1 - \frac{q_2 x_0^2}{2} - \mathfrak{V}_2 x_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 130^a)$$

wo für x_0 der Werth aus Gleichung 129ᵃ) einzusetzen ist.

Der grösste (negative) Werth von $\mathfrak{M}_1$ auf dem Pfeiler B findet nach Gleichung 126) statt, wenn $q_1 = q_2 = q$ und $q_3 = p$, wenn somit die beiden ersten Oeffnungen belastet, die letzte leer ist. Es stimmt diess mit der allgemein in N°. **77** gefundenen Regel überein (vergl. Fig. 100, Seite 177), und erhält man für diesen Maximalwerth:

$$\max \mathfrak{M}_1 = -\frac{q(2 l_1^3 l_2 + 2 l_1^4 + 2 l_1 l_2^3 + l_2^4) - p l_1^3 l_2}{16(l_1 + l_2)^2 - 4 l_2^2} \quad . \quad 126^a).$$

In der Aussenöffnung findet das (positive) Maximum des Moments statt, wenn beide Aussenöffnungen belastet sind, die Mittelöffnung aber leer ist, was aus unsern allgemeinen Betrachtungen (N°. 77), aber auch aus Gleichung 127) hervorgeht, indem dann $\mathfrak{B}_1$ seinen grössten Werth hat. Man erhält hiefür:

$$\max \mathfrak{M}_a = \frac{\mathfrak{B}_1^{\,2}}{2q} = \frac{1}{2q}\left[\frac{ql_1^{\,2}(3l_1 + 6l_2) - pl_2^{\,3}}{8l_1^{\,2} + 12l_1l_2}\right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad 131).$$

Für die Mittelöffnung finden die grösten (positiven) Momente statt, wenn diese belastet, die Aussenöffnungen aber nicht belastet sind. Der grösste Werth fällt in die Brückenmitte, und erhält man hierfür aus Gleichung 130ª)

$$\max \mathfrak{M} = \frac{ql_2^{\,2}(2l_1 + l_2) - 2pl_1^{\,2}}{16l_1 + 24l_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 131^a).$$

Da man gewöhnlich nur mit den grössten (positiven und negativen) Momenten zu thun hat, so hat man meist nur die Belastungsfälle I, III und IV der Fig. c, Tafel V, zu berücksichtigen, und genügen dann die Gleichungen 126)—131) zur Bestimmung der Kurven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$.

86. Wir haben für ein Beispiel in Beziehung auf das Verhältniss $\frac{l_1}{l_2}$ eine Wahl zu treffen. Man kann hier von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen, man könnte die Bedingung stellen, dass das Moment $\mathfrak{M}_1$ auf der Mittelstütze, das stets das absolute Maximum sämmtlicher Momente darstellt, ein Minimum werde. Diess führt aber zu unpraktischen Verhältnissen, indem die Mittelöffnung kleiner werden müsste, als die Seitenöffnungen. Besser ist es, das Verhältniss $\frac{l_1}{l_2}$ so zu wählen, dass die Maximalmomente in den Oeffnungen, wie sie durch Gleichung 131) und 131ª) gegeben sind, nahezu gleich werden. Es ergiebt diese Bedingung je nach dem Verhältniss von $\frac{p}{q}$ verschiedene Werthe, durch Gleichsetzung der Ausdrücke für $\mathfrak{M}_a$ und $\mathfrak{M}_b$ (Gleichung 131) und 131ª) erhält man eine Gleichung 6ten Grades, deren Lösung annähernd

$$\frac{l_2}{l_1} = 1{,}206 + 0{,}052\,\frac{p}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 132)$$

somit schwankt das Verhältniss $\frac{l_2}{l_1}$ zwischen $^5/_4$ und $^6/_5$, und nehmen wir für das nachfolgende Beispiel

$$l_1 = {}^4/_5\, l_2.$$

Wir berechnen nach den Gleichungen der N°. **85** die zum Auftragen der Kurven $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ nöthigen Werthe und erhalten hiefür folgende Tabelle unter Zugrundlage des Verhältnisses von $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$.

Tabelle XXII $\frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{5}$ $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$.

Belastungsfall (siehe Fig. c der Tafel V.)	$\mathfrak{B}_1 = -A$	Vertikalkräfte am Auflager B		Auflagerdruck B	Momente			Abscissen $\mathfrak{B} = o$	
		links $= \mathfrak{B}'_1$	rechts $= \mathfrak{B}_3$		auf den Pfeiler B $\mathfrak{M}_1$	1te Oeffnung $\mathfrak{M}a$	2te Oeffnung $\mathfrak{M}b$	in AB	in BC
3 Oeffnungen leer (p)	ql_2 − 0,0991	ql_2 + 0,1676	ql_2 − 0,1667	ql_2 0,3348	ql_2^2 − 0,02739	ql_2^2 + 0,01478	ql_2^2 + 0,0143	ql_2^2 0,297	l_2 0,5
3 Oeffnungen belastet mit q	0,2978	0,5027	0,5	1,0027	− 0,08217	0,04419	0,0428	0,297	0,5
1 und 2 mit q belastet (I.)	0,2884	0,5116	0,5828	1,0444	0,08931	0,04158	0,0526	0,288	0,583
2 und 3 mit q belastet (II.)	0,0627	0,2040	0,4671	0,6711	0,05649	0,0059	0,0526	0,188	0,467
1 und 3 mit q belastet (III.)	0,3426	0,4574	0,1667	0,6241	0,04594	0,0587	− 0,0043	0,343	0,5
2 mit q belastet (IV.)	0,0537	0,2130	0,5	0,713	0,06362	0,00433	+ 0,0614	0,161	0,5
3 mit q belastet (V.)	0,1077	0,1590	0,1339	0,2929	0,02025	0,0174	0,0066	0,323	0,402
1 mit q belastet (VI.)	0,3336	0,4663	0,1995	0,6658	0,05810	0,0557	0,0066	0,334	0,598

Die Werthe dieser Tabelle haben dazu gedient, die Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für die verschiedenen Belastungsfälle auf Tafel V. aufzutragen; wie man sieht, giebt die Belastung der ganzen Brücke mit p und desgleichen mit q an keiner Stelle weder ein Maximum, noch ein Minimum, wir haben diese Curven aber gleichfalls eingezeichnet, weil später von denselben anderweitiger Gebrauch gemacht werden soll.

Um die Unterschiede der Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$ anschaulich zu machen, ist noch nachstehende Tabelle gerechnet, welche diejenigen Belastungsfälle enthält, welche den absolut grössten Werthen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ (unter Annahme der Belastung ganzer Oeffnungen) entsprechen, und sind hienach die Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für 6 verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$ in Tafel V^a^. aufgetragen, in ähnlicher Weise wie diess bei Trägern über 2 Oeffnungen in Tafel IV^a^. geschehen ist.

Tabelle XXII^a^ $\frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{5}$.

$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	max $\mathfrak{M}$ für AB	$\mathfrak{M}$ für B	max $\mathfrak{M}$ für BC	Abscisse $\mathfrak{V} = 0$ für AB	für BC
I. Belastung der Mittelöffnung.								
∞	1	0,297 $l_2 q$	1,008 $l_2 q$	0,044 $q l_2^2$	0,0824 $q l_2^2$	0,0430 $q l_2^2$	0,297 l_2	0,5 l_2
2	$^2/_3$	0,175	0,858	0,0229	0,0728	0,0520	0,262	0,5
1	$^1/_2$	0,114	0,785	0,013	0,0688	0,0566	0,220	0,5
$^2/_3$	$^2/_5$	0,078	0,742	0,0076	0,0656	0,0594	0,195	0,5
$^1/_2$	$^1/_3$	0,054	0,713	0,00433	0,0635	0,0614	0,161	0,5
$^1/_4$	$^1/_5$	0,005	0,655	0,00006	0,06	0,0650	0,025	0,5
$^1/_8$	$^1/_9$	−0,027	0,617	0,0033	0,0578	0,0675	−0,243	0,5

Fortsetzung von Tabelle XXII^a $\frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{5}$.

$\frac{p}{k}$	$\frac{p}{q}$	A	B	max 𝔐 für AB	𝔐 für B.	max 𝔐 für BC	Abscisse 𝔙 = o für AB	Abscisse 𝔙 = o für BC
II. Belastung beider Aussenöffnungen.								
∞	1	0,297 l_2q	1,003 l_2q	0,0440 ql_2^2	0,0824 ql_2^2	0,0430 ql_2^2	0,297 l_2	0,5 l_2
2	2/3	0,32	0,814	0,0512	0,0680	0,0191	0,32	0,5
1	1/2	0,331	0,719	0,0547	0,0550	0,0073	0,331	0,5
2/3	2/5	0,338	0,662	0,0571	0,0496	0,0000	0,338	0,5
1/2	1/3	0,342	0,624	0,0587	0,0459	−0,0043	0,343	0,5
1/4	1/5	0,351	0,549	0,0612	0,0400	−0,0139	0,351	0,5
1/8	1/9	0,357	0,498	0,0637	0,0340	−0,0200	0,357	0,5
III. Belastung der Mittelöffnung und einer Aussenöffnung (AB).								
∞	1	0,297 l_2q	1,003 l_2q	0,044 ql_2^2	0,0824 ql_2^2	0,0430 ql_2^2	0,297 l_2	0,5 l_2
2	2/3	0,2928	1,0238	0,0429	0,0858	0,0482	0,293	0,517
1	1/2	0,2906	1,0342	0,0423	0,0875	0,0507	0,291	0,525
2/3	2/5	0,2893	1,0405	0,0418	0,0886	0,0520	0,289	0,53
1/2	1/3	0,2884	1,0444	0,0415	0,0894	0,0526	0,288	0,533
1/4	1/5	0,2866	1,0530	0,0412	0,0907	0,0554	0,287	0,54
1/8	1/9	0,2854	1,0586	0,0411	0,0917	0,0562	0,285	0,544

87. Aus den graphischen Darstellungen der Tafel V^a. ist ersichtlich, wie die in Gleichung 126^a), 131) und 131^a) berechneten Momente für die Oeffnungen, beziehungsweise Mittelpfeiler die grössten Werthe darstellen. Um die Verhältnisse $\frac{l^1}{l_2}$ zu vergleichen, berechnen wir diese 3 Maximalwerthe für verschiedene Anordnungen, indem wir das Verhältniss $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ zu Grunde legen. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle XXIII. zusammengestellt.

Tabelle XXIII.

Maximalwerthe für 3 Oeffnungen. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$

Verhältniss $\frac{l_1}{l_2}$ =	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
Mmax $\mathfrak{M}$ in BC	ql^2 0,0595	ql^2 0,0613	ql^2 0,0612	ql^2 0,0610	ql^2 0,0606	ql^2 0,0593	ql^2 0,0584
Mmax $\mathfrak{M}$ in B	0,0729	0,0852	0,0893	0,0922	0,0963	0,0991	0,1111
Mmax $\mathfrak{M}$ in AB	0,0146	0,0509	0,0641	0,0584	0,0711	0,0745	0,0937

Um aber diese Werthe richtig mit einander vergleichen zu können, muss man sie auf eine gleiche Gesammtweite L sämmtlicher Oeffnungen reduciren. Wir haben $L = 2\,l_1 + l_2$, woraus

$$l_2 = \frac{L}{2\frac{l_1}{l_2} + 1}$$

Nimmt man als Massstab eine gleiche Weite sämmtlicher Oeffnungen, so dass $l = \frac{L}{3}$, so ist

$$l_2 = \frac{3l}{2\frac{l_1}{l_2} + 1}$$

und um unsere in Function von l_2 ausgedrückten Werthe nunmehr in Funktion von l auszudrücken, müssen wir sämmtliche Werthe der Tafel mit $\left(\frac{3}{2\frac{l_1}{l_2} + 1}\right)^2$ multipliciren.

Hiedurch erhält man folgende Zusammenstellung:

Tabelle XXIV. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$.

$\frac{l_1}{l_2}$	$^1/_2$	$^3/_4$	$^4/_5$	$^5/_6$	$^7/_8$	$^9/_{10}$	1
Mmax 𝔐 in BC	ql^2 0,1338	ql^2 0,088	ql^2 0,0814	ql^2 0,0769	ql^2 0,0721	ql^2 0,0679	ql^2 0,0584
Mmax 𝔐 in B	0,1640	0,1231	0,1188	0,1172	0,1146	0,1184	0,1111
Mmax 𝔐 in AB	0,0328	0,0733	0,0777	0,0808	0,0845	0,0858	0,0937

Aus der letzern Tabelle ersehen wir, dass das Verhältniss $\frac{l_1}{l_2} = 1$ die niedrigsten Máximalmomente giebt; dass dagegen die Verhältnisse $^4/_5$—$^5/_6$ wie zu erwarten, die geringsten Differenzen in den Momentenwerthen zeigen. — Im Allgemeinen stehen sich nach dieser Anschauung die einzelnen Verhältnisse bezüglich des Materialverbrauchs ziemlich nahe und werden andere Rücksichten die Wahl der Spannweiten entscheiden; wir haben schon in N°. **86** entwickelt, warum wir, insolange nicht andere Bedingungen die Eintheilung vorschreiben, das Verhältniss $\frac{l_1}{l_2} = {^4/_5}$—$^5/_6$ vorziehen.

Zur Beurtheilung der grössten Angriffsmomente bestehender Brücken von beliebiger Spannweite und verschiedenen Verhältnissen der Oeffnungen dient nebenstehende Tabelle XXV., auf welche wir auch bei Beurtheilung des Einflusses der Continuität zurückkommen werden.

88. Bei den oben angenommenen Belastungen ganzer Oeffnungen erhalten wir die grössten Maximas der 𝔐 und 𝔙 wieder nur für einzelne Trägertheile oder Punkte, und haben wir noch zu untersuchen, welche Ergänzungen in unseren graphischen Darstellungen Tafel V. und V^a. in dieser Beziehung noch vorzunehmen sind.

Bezüglich der Vertikalkräfte geben nach früheren Regeln die Figuren d und e der Tafel V. diejenigen Belastungen, bei welchen im Querschnitt x der 1ten, beziehungsweise 2ten Oeffnung Minima oder Maxima 𝔙 eintreten.

Wir könnten wieder wie diess bei 2 Oeffnungen geschehen, Formeln für max $𝔙_x$ aufstellen, es ist aber ebenso einfach, nach Massgabe des Entwicklungsganges der N°. **73** die Werthe R_1 $𝔐_1$ $𝔙_1$ $𝔙_x$ der Reihe nach zu berechnen, wobei wir die weitere Vereinfachung eintreten lassen, dass wir vom Eigengewicht absehen, und dieses dadurch berücksichtigen, dass wir die für $𝔙_x$ max gefundenen Werthe nicht von der Abscissenaxe aus, sondern von der Kurve der 𝔙 für das Eigengewicht an abtragen, wesshalb letztere Kurve in die graphische Darstellung aufgenommen ist.

Tabelle XXV.

Werthe von Max $\mathfrak{M}_B$ für 3 Oeffnungen.

$\frac{l_1}{l_2}$ =	$^1/_2$	$^3/_4$	$^4/_5$	$^5/_6$	$^7/_8$	$^9/_{10}$	1
$\frac{P}{q}$ = 1	ql_2^2 0,0703	ql_2^2 0,0789	ql_2^2 0,0824	ql_2^2 0,0845	ql_2^2 0,0879	ql_2^2 0,0900	ql_2^2 0,1000
$^3/_4$	0,0713	0,0813	0,0848	0,0874	0,0911	0,0934	0,1042
$^2/_3$	0,0716	0,0821	0,0858	0,0882	0,0921	0,0946	0,1055
$^1/_2$	0,0723	0,0836	0,0875	0,0903	0,0943	0,0968	0,1083
$^2/_5$	0,0725	0,0846	0,0886	0,0915	0,0956	0,0981	0,1100
$^1/_3$	0,0729	0,0855	0,0893	0,0922	0,0964	0,0991	0,1111
$^1/_4$	0,0732	0,0860	0,0902	0,0932	0,0974	0,1002	0,1125
$^1/_5$	0,0734	0,0865	0,0907	0,0938	0,0981	0,1009	0,1133
$^1/_7$	0,0737	0,0870	0,0914	0,0945	0,0988	0,1017	0,1143
$^1/_9$	0,0738	0,0873	0,0917	0,0948	0,0993	0,1021	0,1148

a) Berechnung der Max — $\mathfrak{M}$ der 1ten Oeffnung:

Wir erhalten zunächst aus Gleichung II. der No. **85** welche für jede Belastung eines continuirlichen Trägers über 3 Oeffnungen gültig ist, indem wir $l_1 = {}^4/_5\, l_2$ einsetzen:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{3,6\,R_1 - R_2}{11,96} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I}$$

und ist zu setzen, da die 1te Oeffnung von x bis l mit k, die 2te Oeffnung nicht, die 3te ganz mit k belastet ist, nach Gleichung 107) (vergl. Fig. d Tafel V.):

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= -\int_x^l k dg \,.\, g\,(1+g)\,(1-g) = -\frac{k}{4\,l_1}\left[l_1^4 - x^2\,(2l_1^2 - x^2)\right] \\ R_2 &= -\frac{k l_1^3}{4} \end{aligned}\right\} \;.\; \text{II.}$$

sodann ist nach Gleichung 108

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{l_1}\left[-\mathfrak{M}_1 - \frac{k}{2}(l-x)^2\right] = \mathfrak{B}_x \quad \ldots\ldots \quad \text{III.}$$

womit Alles gefunden ist.

Die Resultate der Rechnung zeigt folgende kleine Tabelle:

Max — $\mathfrak{B}$ 1te Oeffnung.

x	R_1	R_2	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_x$
0,0 l_2	— 0,0853	— 0,0853	— 0,01855	— 0,2435
0,2 »	0,0750	»	— 0,0154	— 0,1307
0,4 »	0,0480	»	— 0,0073	— 0,0575
0,6 »	0,0163	»	+ 0,0022	— 0,0195
0,8 »	0,0	»	+ 0,00713	— 0,0089

Die durch die $\mathfrak{B}_x$ dargestellte Kurve schliesst sich für die Abscisse $x = o$ an die Kurve $\mathfrak{B}$ des Belastungsfalls III tangentiell an, für $x = l$ an die Kurve $\mathfrak{B}$ des Falls V (s. Fig. b, Tafel V.).

Ganz in ähnlicher Weise könnte man die Kurve max + $\mathfrak{B}$ ableiten, man erhält dieselbe aber direct durch die Betrachtung, dass die Belastungen für max — $\mathfrak{B}$ und max + $\mathfrak{B}$ sich nach Fig. d zur Gesammtbelastung aller 3 Oeffnungen mit q ergänzen. Man braucht also nur die Werthe $\mathfrak{B}_x$ der eben berechneten Tabelle als Ordinaten von der Kurve $\mathfrak{B}$ für die Gesammtbelastung nach abwärts zu tragen, um sofort die gesuchte Kurve max + $\mathfrak{B}$ zu erhalten. Die Kurve max + $\mathfrak{B}$ schliesst sich an den Auflagern tangentiell an die Kurve $\mathfrak{B}$ für Belastungsfall IV und I an.

b) Berechnung max — $\mathfrak{B}$ der 2ten Oeffnung.

Wir erhalten unter Zugrundlage von Fig. e der Tafel V. der Reihe nach aus den Formeln N°. II der N°. 85 und 107) folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_1 &= \frac{3{,}6\,R_1 - R_2}{11{,}96} \\ \mathfrak{M}_2 &= \frac{3{,}6\,R_2 - R_1}{11{,}96}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

$$\left.\begin{aligned}R_1 &= -\tfrac{1}{4}k l_1^3 - \frac{k}{4 l_2}\left[l_2^4 - x^2(2l_2 - x)^2\right] \\ R_2 &= -\frac{k}{4 l_2}\left[l_2^4 - x^2(2l_2^2 - x^2)\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{V.}$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{1}{l_2}\left[\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - \frac{k}{2}(l_2 - x)^2\right] = \mathfrak{B}_x \quad \ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

Es ergeben sich folgende Zahlenwerthe:

Max = $\mathfrak{B}$ 2te Oeffnung:

$x =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0 . l_2
max $\mathfrak{B}_x =$	$-0,3661$	$-0,2429$	$-0,1454$	$-0,0788$	$-0,0429$	$-0,0328$

und können diese Werthe wieder zum Auftragen der Kurve $-\mathfrak{B}$ max und $+\mathfrak{B}$ max benützt werden, je nachdem man dieselben zur Kurve $\mathfrak{B}$ vom Eigengewicht herrührend addirt, resp. von der aus der Gesammtbelastung herrührenden abzieht.

Die Kurven Max $+\mathfrak{B}$ und $-\mathfrak{B}$ liegen in Folge symmetrischen Anordnung des Trägers symmetrisch zur Trägermitte.

Die **Maximalmomente** für theilweise Belastung einzelner Oeffnungen treten nur ein in den Trägerstücken zwischen den Inflectionspunkten und der Mittelstütze, also für die 1te Oeffnung im Theile J'_1B, für die 2te im Abschnitt BJ_2 (Fig. a der Tafel V.) und ist zunächst die Lage der Inflectionspunkte J zu bestimmen.

Man erhält aus Gleichung 113b) und 113c) (Seite 168), indem wir $l_1 = l_3 = 0{,}8\,l_2$ setzen:

$$\mu'_3 = \infty \qquad \mu_2 = 2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) = 3{,}6 \qquad \mu_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{\mu_2}\right) = 4{,}152,$$

ebenso

$$\mu'_3 = \infty \qquad \mu'_2 = 3{,}6 \qquad \mu'_1 = 4{,}152,$$

und hieraus die Abscissen der Inflectionspunkte nach den Gleichungen 114) und 114a) (Seite 171)

$$a_1 = l_1 \frac{1}{1+\mu_1} = 0, \qquad a_2 = l_2 \frac{1}{1+\mu_2} = 0{,}21736\,l_2, \quad a_3 = 0{,}1941\,l_3,$$

ebenso

$$a'_1 = l_1 \frac{\mu'_1}{1+\mu'_1} = 0{,}8059\,l_1, \qquad a'_2 = 0{,}78264\,l_2, \qquad a'_3 = l_3.$$

Wie zu erwarten liegen die Inflectionspunkte symmetrisch zur Trägermitte.

Das Max $-\mathfrak{M}$ im Trägerstück J'_1B der ersten Oeffnung tritt ein (Fig. f Tafel V.), wenn das Stück g_x der 1ten Oeffnung und die 2te Oeffnung belastet sind. Für die Beitragstrecke g_x erhalten wir aus Gleichung 115b (Seite 179)

$$g_x = l_1 \sqrt{1 + \mu'_1 - \mu'_1 \frac{l_1}{x}} = l_1 \sqrt{5{,}152 - 4{,}152 \frac{l_1}{x}} \quad . \; . \; \text{VII.}$$

Indem wir wieder bloss wie bei Berechnung der Vertikalkräfte den Einfluss der Ueberlast k in Betracht ziehen, erhalten wir nach bekannter Weise die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{3{,}6\,R_1 - R_2}{11{,}96} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{VIII.}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = -\dfrac{k}{l_1}\dfrac{g^2}{4}(2l_1^2 - g^2) - \tfrac{1}{4}kl_2^3 \\ \text{wo der Einfachheit halber g statt } g_x \text{ gesetzt ist.} \\ R_2 = -\tfrac{1}{4}kl_2^3 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{IX.}$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{l_1}\left[-\mathfrak{M}_1 - k\frac{g}{2}(2l_1 - g)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{X.}$$

$$\mathfrak{M}_x = -\mathfrak{B}_1 x - kg\left(x - \frac{g}{2}\right)$$

und den Werth von $\mathfrak{B}_1$ substituirt:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_1 \frac{x}{l_1} - \frac{kg^2}{2}\left(\frac{x}{l_1} + 1\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{XI.}$$

woraus folgende Tabelle:

max — $\mathfrak{M}_x$ 1te Oeffnung:

x	g_x	R_1	R_2	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_x$
$0,64471\,l_2$ (=$0,80591\,l_1$)	$0,01_2$	— 0,1667	— 0,1667	— 0,086	— 0,029
0,7	0,514	0,2225	»	— 0,053	— 0,0354
0,75	0,68	0,2453	»	— 0,0599	— 0,0465
$0,8\,l_2$ (=l_1)	0,8	0,2519	»	— 0,0619	— 0,0619

Die Werthe der letzten Kolonne ergeben die gesuchten Kurven max — $\mathfrak{M}_x$, indem man dieselben von den Kurvenpunkten für Belastung des ganzen Trägers mit p nach unten aufträgt. — In gleicher Weise erhält man aber noch mit Hülfe derselben die Kurve max + $\mathfrak{M}_x$ indem man von der Kurve für Belastung des ganzen Trägers mit q ausgehend, die Werthe nach oben zuschlägt. Es trifft nämlich, auch bezüglich der $\mathfrak{M}_x$ zu, dass die Belastungen, welche dem max — $\mathfrak{M}$ und max + $\mathfrak{M}$ entsprechen, sich zur Gesammtbelastung ergänzen. (vergl. Fig. f.)

In ähnlicher Weise ergeben sich auch die Maxima — $\mathfrak{M}$ für die 2te Oeffnung; dasselbe tritt im Querschnitt x des Trägerstücks BJ_2 (vergl. Fig. g) dann ein, wenn die 1te Oeffnung ganz, in der 2ten Oeffnung das Stück von g_x bis zur Stütze C, die 3te Oeffnung nicht belastet ist, und erhält man zunächst aus Gleichung 115) (Seite 176) indem man $\mu = \mu' = 3,6$ setzt, für g_x die Gleichung:

$$g_x^2 (9,2x - 4,6 l_2) + g_x l_2 (6,2 l_2 - 4,6x) - 11,96\, x l_2^2 = 0 \quad \ldots \text{XII.}$$

sodann wie oben der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= - \tfrac{1}{4} k l_1^3 - \frac{k}{4 l_2} \left[l_2^4 - g^2 (2 l_2 - g)^2 \right] \\ R_2 &= - \frac{k}{4 l_2} \left[l_2^4 - g^2 (2 l_2^2 - g^2) \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{XIII.}$$

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{3,6\, R_1 - R_2}{11,96} \qquad \mathfrak{M}_2 = \frac{3,6\, R_2 - R_1}{11,96} \quad \ldots \text{XIV.}$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{1}{l_2} \left[\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - \frac{k}{2} (l_2 - g)^2 \right] \quad \ldots \text{XV.}$$

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{B}_2 x$$

oder nach einigen Reductionen:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_1 - \frac{x}{l_2} \left[\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - \frac{k}{2} (l_2 - g)^2 \right]$$

$$= \mathfrak{M}_1 - \frac{x}{l_2} \left[0,3846\, (R_1 - R_2) - \frac{k}{2} (l_2 - g)^2 \right] \quad \ldots \text{XVI.}$$

woraus folgende Tabelle:

max — $\mathfrak{M}_x$ 2[te] Oeffnung:

x	g_x	R_1	R_2	$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_x$
0,0 l_2	0	—0,252	— 0,1667	0,0619	0,0619
0,05	0,103	0,245	0,1628	0,0601	0.0453
0,1	0,248	0,2205	0,1468	0,0541	0,0324
0,15	0,438	0,1740	0,1089	0,0416	0,02204
0,21736	1,0	0,0853	0	0,02567	0,0185

Die Werthe $\mathfrak{M}_x$ dienen in gleicher Weise zur Bestimmung von max — $\mathfrak{M}$, wie + $\mathfrak{M}$, indem man wie bei der ersten Oeffnung von den Kurven für Minimal- und Maximalbelastung der 3 Oeffnungen ausgeht.

Die Resultate obiger Berechnungen sind nun in Tafel V eingetragen, ebenso sind in Tafel V[a] die absolut grössten Werthe der Maxima $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ für verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$ zur Anschauung gebracht und ersieht man hieraus, dass ganz in ähnlicher Weise, wie bei 2 Oeffnungen die Kurven max $\mathfrak{M}$ nur sehr wenig von der Kurve $\mathfrak{M}$ für Belastung ganzer Oeffnungen abweichen, dass aber für die Kurve $\mathfrak{B}$ die Abweichung bedeutender ist.

Aus den in N°. 81 näher entwickelten Gründen genügt es desshalb für die praktische Anwendung auch im Falle von 3 Oeffnungen, wenn die Grenzwerthe für $\mathfrak{M}$, soweit dieselben von den Kurven für Belastung ganzer Oeffnungen abweichen, (nämlich auf den Trägerstücken zunächst der Mittelstütze zwischen den Inflectionspunkten), nach dem Augenmass nach Anleitung der Tafel V[a]. ergänzt werden. Bezüglich der $\mathfrak{B}$ genügt wieder die Bestimmung des Punktes der grössten Abweichung, welcher für das Verhältniss $\frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{5}$ folgende Werthe erhält:

1[te] Oeffnung, Abcisse $= 0{,}352\, l_2 = 0{,}44\, l_1$
grösste Abweichung vom Belastungsfall III, V, respective IV, I $= 0{,}118\, kl_1$.

2[te] Oeffnung, Abcisse $= 0{,}5\, l_2$
grösste Abweichung vom Belastungsfall I, VI, respective V, II $= 0{,}113\, kl_2$.

Für andere Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2}$ sind diese Werthe aus den Gleichungen III und VI, 127) und 128), zu berechnen.

89. Liegen bei einem Träger über 3 Oeffnungen die Stützpunkte nicht in gleicher Höhe, so ergeben unsere allgemeinen Formeln der N°. **73** ebenso einfach die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$, indem wir nur für die R die modificirten Werthe einführen:

Nehmen wir an, der Träger sei symmetrisch unterstützt, somit $l_1 = l_3$, und ist ferner die Senkung der beiden Mittelstützen gleich gross, so dass $c_1 = c_2 = s$, $c = c_3 = o$, so erhalten wir aus der Gleichung 107), indem man die Belastungen der Fig. 108 zu Grund legt:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 6E\Theta \frac{s}{l_1} - {}^1/_4 q_1 l_1^3 - {}^1/_4 q_2 l_2^3 \\ R_2 &= 6E\Theta \frac{s}{l_1} - {}^1/_4 q_2 l_2^3 - {}^1/_4 q_3 l_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und wenn man zur Vereinfachung setzt:

$$s = \varkappa_1 \frac{l_1^4}{24E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

so reduciren sich diese Ausdrücke auf folgende:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= {}^1/_4 (\varkappa_1 l_1^3 - q_1 l_1^3 - q_3 l_1^3) \\ R_1 &= {}^1/_4 (\varkappa_1 l_1^3 - q_2 l_2^3 - q_3 l_1^3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

und diess in die für 3 Oeffnungen allgemein gültige Gleichung II. der N°. **85** eingesetzt giebt

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{q_1 (2 l_1^4 + 2 l_1^3 l_2) + q_2 (2 l_2^3 l_1 + l_2^4) - q_3 l_1^3 l_2 - \varkappa_1 (2 l_1^4 + l_1^3 l_2)}{16 (l_1 + l_2)^2 - 4 l_2^2} \quad 133).$$

$\mathfrak{M}_2$ erhält man durch Vertauschung von q_1 mit q_3. Sodann erhält man die Vertikalkraft am Auflager A nach Gleichung 108):

$$\mathfrak{B}_1 = -A = -\frac{q_1 (14 l_1^3 l_2 + 6 l_1^2 l_2^2 + 6 l_1^4) - q_2 (l_2^4 + 2 l_1 l_2^3) + q_3 l_1^3 l_2 + \varkappa_1 (l_1^3 l_2 + 2 l_1^4)}{l_1 \left[16 (l_1 + l_2)^2 - 4 l_2^2\right]} \quad 134$$

ferner die Vertikalkraft am Pfeiler B links desselben

$$\mathfrak{B}'_1 = \mathfrak{B}_1 + q_1 l_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 134^a)$$

und die Vertikalkraft rechts am Pfeiler B

$$\mathfrak{B}_2 = -\frac{q_1 (3 l_1^3 l_2 + 2 l_1^4) - q_3 (3 l_1^3 l_2 + 2 l_1^4) + q_2 (16 l_1 l_2^3 + 6 l_2^4 + 8 l_1^2 l_2^2)}{l_2 \left[16 (l_1 + l_2)^2 - 4 l_2^2\right]} \quad 135)$$

somit unabhängig von der Senkung der Stützpunkte und gleich dem Werth der Gleichung 128, was mit der symmetrischen Anordnung des Trägers zusammenhängt.

Nachdem obige Werthe bekannt, findet man durch die gleiche Betrachtung wie bei gleichhohen Stützen (N°. **85**) die Abscissen und Ordinaten der Maxima $\mathfrak{M}$ in den Oeffnungen, und ist hienach im Stande eine graphische Darstellung analog der in Tafel V resp. V^a gegebenen aufzutragen, und sollte bei Berechnung eines bestimmten Beispiels eine solche nicht versäumt werden, da sie bei den etwas complicirten Rechnungen als K o n t r o l e dient und ein klareres Bild giebt, als blosse Formeln, oder die Werthe einzelner Momente.

90. Aus Gleichung 133) überzeugt man sich, dass gerade wie bei horizontaler Stützlage das Moment $\mathfrak{M}_1$ dann am grössten ist, wenn q_1 und q_2 den grössten Werth q, und q_3 seinen kleinsten Werth p hat und ist für diesen Fall

$$\text{Max}\,\mathfrak{M}_1 = \frac{q(2l_1^3 l_2 + 2l_1^4 + l_2^4 + 2l_1 l_2^3) - pl_1^3 l_2 - \varkappa_1 (l_1^3 l_2 + 2l_1^4)}{16(l_1 + l_2)^2 - 4l_2^2} \qquad 136)$$

durch die Senkung der Stütze B wird das Moment verringert und geht in den Werth der Gleichung 126) über, wenn $\varkappa_1 = o$ gesetzt wird.

Ganz ebenso wie im Falle der horizontalen Lage sämmtlicher Stützen lässt sich nachweissen, dass das grösste Moment in AB dann am grössten ist, wenn beide Aussenöffnungen belastet sind, das Moment in BC dann, wenn nur die Mittelöffnung belastet ist.

Man erhält für diese beiderlei Fälle

Grösstes Angriffsmoment in AB

$$\text{Mmax}\,\mathfrak{M}_a = \frac{A^2}{2q_1} = \frac{1}{2q}\left[\frac{ql_1^2(3l_1 + 6l_2) - pl_2^3 + \varkappa_1 l_1^3}{8l_1^2 + 12l_1 l_2}\right]^2 \quad . \quad 137)$$

Grösstes Moment in BC

$$\text{Mmax}\,\mathfrak{M}^b = \frac{ql_2^2(2l_1 + l_2) - 2pl_1^3 + 2\varkappa_1 l_1^3}{16l_1 + 24l_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 138)$$

Diese beiden Maximalmomente nehmen mit der Senkung der Stützpunkte zu und gehen in den Werth der Gleichung 131) und 131^a) über, wenn man $\varkappa_1 = o$ setzt. Den grössten Vortheil der Senkung der Stützpunkte hat man dann, wenn man das Verhältniss der Spannweiten $l_1 : l_2$ und die Senkung so wählt, dass die durch die Gleichungen 136)—138) bestimmten 3 Maximalwerthe einander gleich werden. — Herr Mohr (Hannov. Bauzeitung 1860) hat hiefür die Näherungs-Formel berechnet

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\frac{p}{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 139)$$

bei Annahme dieses Verhältnisses kann man durch Combination vorstehender Gleichungen 136) und 138) denjenigen Werth der Grösse $\varkappa_1$ finden, für welchen die günstigste Senkung der Mittelstützen eintritt. Diese Senkung selbst findet sich dann nach Gleichung II der N°. **89**.

Wenn ein anderes Verhältniss der Spannweiten besteht, so muss man sich auf diejenige Senkung der Mittelstützen beschränken, durch welche die beiden grössten der 3 Maximalmomente einander gleich werden, ist $\frac{l_1}{l_2} > \left(\frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\frac{p}{q}\right)$, so ist Mmax $\mathfrak{M}_a >$ Mmax $\mathfrak{M}_b$, und es wird dann durch Combination der Gleichungen 136) und 137) die Bedingungsgleichung für $\varkappa_1$ erhalten:

Max $\mathfrak{M}_1 >$ Mmax $\mathfrak{M}_b$ oder

$$(2l_1 + l_2)\left[ql_1^2(3l_1 + 6l_2) - pl_2^3 + \varkappa_1 l_1^3\right]^2 = 8l_1^2 q\,(2l_1 + 3l_2)$$
$$\left[q\,(2l_1^3 l_2 + 2l_1^4 + l_2^4 + 2l_1 l_2^3) - pl_1^3 l_2 - \varkappa_1\,(l_1^3 l_2 + 2l_1^4)\right] \quad . \quad . \quad 140)$$

Ist $\frac{l_1}{l_2} < \left(\frac{1}{1{,}13} + \frac{1}{25}\frac{p}{q}\right)$, so ist Mmax $\mathfrak{M}_b >$ Mmax $\mathfrak{M}_a$ und es wird durch Combination der Gleichungen 133) und 135) die Bedingung erhalten:

Max $\mathfrak{M}_1$ = Mmax $\mathfrak{M}_b$ oder

$$\varkappa_1 = \frac{4ql_1^4 + 4pl_1^4 + 4ql_1^3 l_2 - 4ql_1^2 l_2^2 + ql_2^4}{4\,(2l_1^4 + l_2 l_1^3)} \quad . \quad . \quad . \quad 140^a)$$

In der folgenden Tabelle XXVI. sind für verschiedene Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2}$ und $\frac{p}{q}$ die Hülfsgrösse $\varkappa_1$ und das grösste Angriffsmoment $\mathfrak{M}_1$ aus den Gleichungen 136)–140) berechnet.

Eine Vergleichung der Tabellen XXV. und XXVI. ergiebt, dass bei der vortheilhaften Senkung der Stützpunkte das Moment auf der Mittelstütze um 10–25% sich verringert. Aus Tabelle XXVI. ist auch der Werth der Grösse $\varkappa_1$ zu entnehmen, für welchen je 2 der grössten Momente gleich werden. Die zugehörige Senkung der Mittelstützen erhält man aus der Gleichung II. der N°. **89**.

$$s = \varkappa_1 \frac{l_1^4}{24E\Theta} = \varkappa_1 \frac{l_2^4}{24E\Theta}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 141)$$

Als Beispiel wählen wir, wie in N°. **84** geschehen, einen Träger von der Höhe H, dessen Trägheitsmoment darnach bemessen ist, dass das grösste Angriffsmoment in der äussersten Faser eine Spannung $\mathfrak{A}$ = 600 Kilo hervorbringt. Nun ist nach Gleichung 31)

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}}\frac{H}{2}$$

und indem wir $H = \frac{1}{10}\,\frac{2l_1 + l_2}{3}$, d. h. gleich $\frac{1}{10}$ der mittleren Spannweite der 3 Oeffnungen setzen, erhalten wir nach einigen Reductionen

$$s = \varkappa_1 l_2^3 \frac{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^4}{1200\,\mathfrak{M}\left(2\frac{l_1}{l_2} + 1\right)}$$

Tabelle XXVI.

Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}_1$ bei günstigster Senkung der Auflager einer Brücke von 3 Oeffnungen.

	$\frac{l_1}{l_2}$ =	1/2	3/4	4/5	5/6	7/8	9/10	1
		ql_2^2	ql_2^2	ql_2^2	ql_2^2	ql_2^2	ql_2^2	ql_2^2
$\frac{p}{q} = 1$	Max $\mathfrak{M}_1$ =	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0665	0,0858
		q	q	q	q	q	q	q
	x_1 =	1,009	0,704	0,707	0,712	0,72	0,62	0,284
3/4	Max $\mathfrak{M}_1$ =	0,0639	0,0665	0,0673	0,0676	0,0681	0,0718	0,0907
	x_1	0,95	0,63	0,63	0,64	0,65	0,57	0,27
2/3	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0644	0,0681	0,0691	0,0696	0,0706	0,0737	0,0925
	x_1 =	0,92	0,60	0,60	0,61	0,61	0,55	0,26
1/2	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0654	0,0708	0,0722	0,0730	0,0745	0,0771	0,0958
	x_1 =	0,875	0,55	0,55	0,56	0,56	0,52	0,25
2/5	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0660	0,0724	0,0741	0,0751	0,0768	0,0792	0,0980
	x_1 =	0,85	0,52	0,52	0,53	0,53	0,50	0,24
1/3	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0665	0,0735	0,0754	0,0765	0,0785	0,0805	0,0997
	x_1 =	0,82	0,50	0,50	0,51	0,51	0,49	0,23
1/4	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0670	0,0748	0,0771	0,0781	0,0805	0,0824	0,1010
	x_1 =	0,80	0,47	0,47	0,48	0,48	0,47	0,23
1/6	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0672	0,0757	0,0777	0,0793	0,0815	0,0834	0,1018
	x_1 =	0,80	0,46	0,46	0,47	0,47	0,46	0,23
1/7	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0675	0,0767	0,0791	0,0809	0,0829	0,0846	0,1033
	x_1 =	0,78	0,44	0,44	0,44	0,45	0,45	0,22
1/9	$\mathfrak{M}_1$ =	0,0675	0,0772	0,0797	0,0815	0,0837	0,0854	0,1148
	x_1 =	0,78	0,43	0,43	0,43	0,44	0,44	0,22

Nachstehende Tabelle XXVII. ist nach dieser Formel berechnet und sind zugleich in derselben diejenigen Spannweiten eingetragen, welche aus Gleichung 104) sich ableiten. Es werden zwar

für verschiedene Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2}$ die Gewichte der Brücken bei gleicher Weite der Mittelöffnung verschiedene sein, sonach die Verhältnisse $\frac{p}{q}$ nicht immer denselben Spannweiten l_2 entsprechen,

Tabelle XXVII.

Günstigste Senkung für 3 Oeffnungen.

Weite der Mittelöffnung l_2	$\frac{l_1}{l_2} =$	$^1/_2$	$^3/_4$	$^4/_5$	$^5/_6$	$^7/_8$	$^9/_{10}$	1
—	$\frac{p}{q} = 1$ s = —	0,00042 l_2 —	0,00119 l_2 —	0,00148 l_2 —	0,00171 l_2 —	0,00205 l_2 —	0,00182 l_2 —	0,00092 l_2 —
—	$^3/_4$	0,00039 —	0,00100 —	0,00128 —	0,00142 —	0,00169 —	0,00155 —	0,00083 —
175m	$^2/_3$	0,00037 6,58 C.	0,00093 16,27	0,00114 19,98	0,00132 23,09	0,00153 26,77	0,00146 25,32	0,00078 13,65
100	$^1/_2$	0,00035 3,50 C.	0,00082 8,20	0,00100 10,00	0,00115 11,5	0,00133 13,3	0,00132 13,20	0,00072 7,25
70	$^2/_5$	0,00033 2,31 C	0,00076 5,32	0,00092 6,44	0,00106 7,42	0,00123 8.61	0,00123 8,61	0,00068 4,76
45	$^1/_3$	0,00032 1,44 C.	0,00072 3,24	0,00087 3,91	0,00100 4,50	0,00115 5,17	0,00119 5,45	0,00064 2,88
25	$^1/_4$	0,00031 0,78 C.	0,00066 1,65	0,00080 2,00	0,00092 2,30	0,00106 2,65	0,00111 2,78	0,00063 1,58
18	$^1/_5$	0,00031 0,56 C.	0.00064 1,15	0,00078 1,40	0,00089 1,60	0,00102 1,84	0,00108 1,94	0,00063 1,13
12	$^1/_7$	0,00030 0,36 C.	0,00061 0,73	0,00073 0,87	0,00082 0,98	0,00099 1,19	0,00104 1,25	0,00059 0,71
8	$^1/_9$	0,00030 0,24 C.	0,00059 0,47	0 00071 0,57	0,00079 0,63	0,00093 0,74	0,00101 0,81	0,00053 0,42

doch ist für vorläufige Rechnungen und (durch Interpolation) für die meisten praktischen Fälle die günstigste Senkung genau genug bestimmt.

Die Tabellen XXV.—XXVII. geben zugleich wieder ein Bild von dem Einfluss, den eine absichtliche oder fehlerhafte Differenz in der Auflagerhöhe auf die Grösse der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ ausübt. Es bestimmen sich hiedurch (wie in N°. **84** für 2 Oeffnungen) gewisse Grenzen, innerhalb welcher die Continuität der Träger unbedenklich ist. Indem man nämlich für die Grenzen, zwischen denen s in der Ausführung schwanken kann, die Momente $\mathfrak{M}$ berechnet, erhält man Verhältnisszahlen für die Schwankungen der grössten Längenspannung, und können diese Grenzwerthe annähernd aus den Tabellen XXV.—XXVII. abgeleitet werden. Durch Benützung der Gleichung 139) finden sich in Tabelle XXVI. und XXVII. auch diejenigen Momente, beziehungsweise Senkungen, wofür die 3 Maximalwerthe der Angriffsmomente gleichzeitig (ganz oder nahezu) gleich gross werden und sind die betreffenden Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2}$ im Allgemeinen vorzuziehen, wenn die Senkung der Stützpunkte angewendet werden will.

91. Die Vortheile der Continuität der Brückenträger sind:

1) Material-Ersparniss in den Gurtungen;

2) leichte Aufstellung, insbesondere bei bedeutenden Wasserläufen und hohen Thalübergängen, sowie bei rasch herzustellenden provisorischen Ueberbrückungen;

3) geringere Einbiegung in Folge eintretender Belastung, sowie eine bei kleineren Spannweiten nach Umständen in Betracht kommende grössere Stabilität.

Die Nachtheile sind:

a) Veränderungen der Angriffsmomente der Vertikalkräfte in Folge von Abweichungen in der Höhenlage der Auflagerpunkte;

b) Wechsel von Druck und Zug, sowohl in den Gurtungen, als in den Seitenwandungen;

c) eventueller Mehrbedarf an Material in den Seitenwandungen.

Letzter Nachtheil kommt nur dann in Betracht, wenn ein grösserer Theil der Seitenwandglieder, (Fachwerkglieder) abwechselnd auf Zug und Druck in Anspruch genommen ist, und desshalb eine entsprechend geringere zulässige Spannung gestattet. Auch die sub a) und b) aufgeführten Nachtheile können häufig auf einen ganz unbedenklichen Umfang reducirt werden.

Bei grösseren Spannweiten üben unvermeidliche, kleine Ungenauigkeiten der Höhenlage, der Stützpunkte verhältnissmässig wenig Einfluss, während es immer möglich ist, grössere Abweichungen durch genaue Ermittlung der Gestalt der unbelasteten Träger und entsprechende Regulirung der Stützpunkte zu vermeiden. Ferner ist

bei diesen grossen Spannweiten der Wechsel von Druck oder Zug verhältnissmässig unbedeutend und nur an wenigen Punkten der Einfluss auf die Bestimmungen der Querschnitt-Dimensionen (insofern die Festigkeits-Coefficienten nur dann erheblich modificirt werden, wenn Druck oder Zug an demselben Constructionsglied annähernd dieselbe Intesität erreichen).

Im Gegensatz hiezu treten bei kleinen Spannweiten die Vortheile der Continuität gegen die Nachtheile zurück; doch giebt es auch hier specielle Fälle, in welchen die Continuität sich gleichwohl entschieden empfiehlt. — So ist z. B. da, wo Säulen als Zwischenstützen angewendet werden, die Continuität der Träger aus constructiven Gründen der Anwendung getrennter Auflagerpunkte häufig vorzuziehen, während bei schiefer Stellung der Brücke die oben sub 3) angeführten Vortheile noch hinzutreten. Bei solchen kleinen Spannweiten ist zwar der Einfluss geringer Distanzen in der Höhenlage der Stützpunkte verhältnissmässig gross, dagegen ist es auch immer leicht thunlich, sich von der Gestalt der unbelasteten Träger ganz genaue Kenntniss zu verschaffen und hienach die Höhenlage der Stützpunkte zu reguliren. Ist man in der Lage, eine beabsichtigte oder nicht beabsichtigte Senkung oder Hebung der Zwischenstützen berücksichtigen zu müssen, so bieten hiezu die im Vorstehenden entwickelten Formeln alle Bequemlichkeit, und haben wir nur noch hinzuzufügen, dass die für gleiche Stützenhöhe angefertigten graphischen Darstellungen und insbesondere die Umhüllungskurven der Momente und Vertikalkräfte sich direct übertragen lassen, indem nun eine parallele Vertheilung der einzelnen Kurven stattfindet.

Vortheile bei der Aufstellung bietet der continuirliche Träger hauptsächlich dann, wenn die Hauptträger sammt den Querverbindungen als Ganzes auf festem Boden aufgestellt und demnächst über die Pfeiler geschoben werden.

Unter Anwendung der vorerwähnten Untersuchungen über Senkung der Stützpunkte ist darauf zu achten, dass durch das Schieben der Brücke keine zu grossen Aenderungen in der Gestalt der Gurtungen eintreten, wie überhaupt ausserordentliche Anstrengungen einzelner Constructionsglieder vermieden werden müssen.

Ob die Materialersparniss — der hauptsächlichste Vortheil der Continuität — im betreffenden Falle von Werth ist, soll noch näher untersucht werden.

Wenn man die Gurtungen proportional den Angriffsmomenten an Stärke wechseln lässt, so ist aus den graphischen Darstellungen der Tafeln IV. und V. ersichtlich, dass durch die Continuität eine Verringerung der Momente $\mathfrak{M}$ erzielt werden kann, welche bei 2 Oeffnungen etwa so gross ist wie bei 3 Oeffnungen; es kann hiedurch am Gewicht der Gurtungen 15—20 Prozent erspart werden.

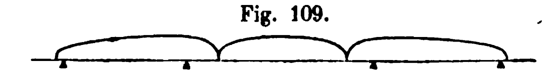
Eine Vergleichung der Tabellen XXV. und XXVI. zeigt ferner, dass bei 3 Oeffnungen bei gegebener Spannweite das Maximalmoment gegenüber dem Werth von $0{,}125ql_2{}^2$, welcher dem grössten Moment des frei aufliegenden Trägers entspricht, bei Anwendung der Senkung der Stützpunkte um 25—45 %, ohne diese Senkung um 10—30 % vermindert wird. Dieselben Prozentansätze gehen aber bis auf 9, beziehungsweise 6 % herab, wenn die mittlere Spannweite wie in Tabelle XXIV. in Rechnung genommen wird. — Bei 2 Oeffnungen kann das grösste Moment ohne Senkung des Zwischenstützpunktes nicht vermindert werden, durch letztere Vorkehrung nach Tabelle XXI. um 24—28 %. — Diese Vergleichung der Maximalwerthe hat aber meist weniger praktischen Werth, da man bei grösseren Brücken die Trägerstärke mit dem Momente abnehmen lässt; bei kleineren Brücken soll aber die Continuität nur in besondern Fällen angewendet werden.

In N°. **23** haben wir schon darauf hingewiesen, dass die für continuirliche Träger entwickelten allgemeinen Regeln nicht mehr in aller Strenge richtig sind, wenn, wie diess in der Praxis meist zutrifft, der Querschnitt auf der ganzen Trägerlänge nicht constant ist. Genauere Untersuchungen, welche in neuerer Zeit in dieser Richtung angestellt worden sind, (vergl. Weyrauch, Kontinuirliche Träger §§ 51 und 52), zeigen, dass die Momente sich wenig, (im Max. c. 6%) die Vertikalkräfte sich fast gar nicht verändern, so dass unbedenklich in den gewöhnlichen Fällen der Praxis so gerechnet werden darf, als ob auf die ganze Länge des Trägers der Querschnitt unveränderlich wäre.

92. Hr. H. Gerber, Director der Brückenbauanstalt von Klett & Cie., hat die (übrigens häufig zu sehr hervorgehobenen) Nachtheile der continuirlichen Brücken dadurch umgangen, dass er Balkenträger mit freiliegenden Stützpunkten anordnete (s. Fig. 109); in der von Hr. Gerber gefällig mitgetheilten Patentbeschreibung ist gesagt:

„Denkt man sich einen zwischen 2 Pfeilern liegenden Balken über diese Peiler hinaus um eine bestimmte Grösse verlängert, so kann der Endpunkt jeder Verlängerung auch als Stützpunkt für einen weiteren (freien) Balken dienen, dessen zweites Ende entweder auf einem Pfeiler oder, wie das erste, auf der Verlängerung (dem Stützbalken) einer dritten Oeffnung gestützt ist.

Fig. 109.



„Der an beiden Enden gestützte freie Balken ist in Berechnung und Construction wie ein einfacher Träger zu behandeln, da er mit dem Stützbalken (oder Pfeiler) nur durch einen Punkt

verbunden sein soll, der über seinen Pfeiler verlängerte Balken hat an seinen Enden die Auflagerkräfte der anliegenden freien Balken, welche aus der Belastung ohne Weiteres gegeben sind, und seine eigene Belastung zu tragen, und wirken diesen Kräften nur die zwei Pfeilerreaktionen entgegen, die somit aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen ohne jede Beachtung der Biegung vollkommen sicher und einfach bestimmt werden können. — Ebenso sind nun die inneren Spannungen dieses Balkens leicht und mit derselben Sicherheit, wie die des einfachen Balkens zu berechnen.

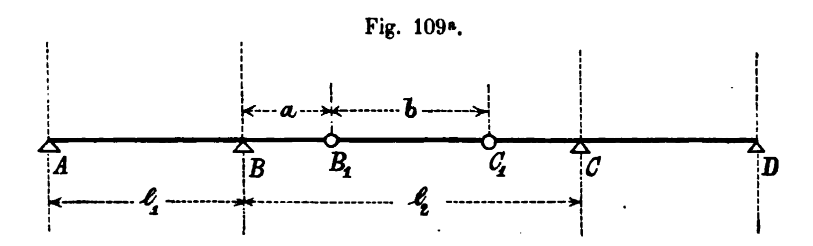
„Da nach dem eben Entwickelten die Pfeilerreaktionen durchaus nicht von der Biegung, sondern nur von der Grösse und Vertheilung der Last abhängig sind, so kann auch die Senkung eines Pfeilers keinen Einfluss auf die inneren Spannungen der Träger ausüben.

„Aus der Anordnung der Träger mit freitragenden Stützpunkten ergibt sich, dass immer auf eine Oeffnung mit freiem Balken eine solche mit durchlaufendem (steifem) Träger folgen muss.“

Die in N°. **66** und **67**, ferner **76** und **77** gegebenen Regeln können auch für Gelenkträger benützt werden, um diejenigen Laststellungen aufzufinden, für welche in einem gegebenen Querschnitt x die grössten Momente und Vertikalkräfte auftreten.

In nachstehender Fig. 109ª bezeichnen A, B, C, D die Auflager des Trägers, B_1 C_1 die Gelenke der mittleren Oeffnung, dann ist das Trägerstück B_1C_1 wie schon oben erwähnt, als freiaufliegender Träger zu behandeln, für welchen im Querschnitt x (von B_1 aus gerechnet) max $\mathfrak{M}$ dann eintritt, wenn B_1 C_1 vollständig belastet, und ausserdem bei concentrirten Lasten Gl. 103) erfüllt ist, ferner max — $\mathfrak{V}$, wenn das Stück x bis C_1 belastet, und bei concentrirten Lasten die erste derselben bis x vorgerückt ist.

Fig. 109ª.



Das Trägerstück A B B_1 dagegen ist insofern als continuirlicher Träger zu behandeln, als am Auflagerpunkt B ein Moment und eine Vertikalkraft auftreten, welche die $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ in der Oeffnung, AB modificiren. Es darf dieses Stück aber nicht etwa als continuirlicher Träger über 2 Oeffnungen mit gleichhohen Stützen berechnet werden, da die Höhenlage von B_1 veränderlich ist.

In der Oeffnung AB treten die Maxima + 𝔐 offenbar dann ein, wenn AB ganz belastet, BB_1 und B_1C_1 dagegen nicht belastet sind, die negativen Maxima von 𝔐 finden bei entgegengesetzter Belastung statt.

Für einen Querschnitt x (von A gerechnet) tritt max — 𝔙 dann ein, wenn das Stück x bis B belastet, BC_1 aber nicht belastet ist, ferner max + 𝔙, wenn Ax und BC_1 belastet sind.

Das Trägerstück BB_1 schliesslich weist nur positive 𝔙 und negative 𝔐 auf, welche beide ihren grössten Werth erhalten, wenn BB_1 und B_1C_1 ganz belastet sind: ohne Einfluss auf diese Grössen ist die Art der Belastung der Oeffnung AB, unter der Voraussetzung, dass der Träger vom Stützpunkte A sich nicht abheben kann, falls der Auflagerdruck nach unten gerichtet sein sollte.

Die Berechnung der 𝔐 und 𝔙 für eine bestimmte Belastung hat keine Schwierigkeit: Für die Trägertheile B_1C_1 und BB_1 erhält man dieselben direct mittelst des Hebelgesetzes nach Anleitung der N°. **59** und **63.** Für die Endöffnung AB bestimmt man zunächst den Auflagerdruck A nach Gleichung 4) und nachdem dieser bekannt, das Uebrige nach den Gleichungen 91)—95) respective 100)—102ᵃ).

Rechnen wir als Beispiel einen Träger, dessen Eigengewicht pro Einheit = p, die zufällige Last = k, so dass q = p + k und setzen wir (Fig. 109ᵃ) die Spannweite AB = l_1, BB_1 = a, B_1C_1 = b, so erhalten wir in den verschiedenen Trägerstücken folgende Maxima der 𝔐 und 𝔙:

1ᵗᵉ Oeffnung:

$$\text{max Auflagerdruck } A = \frac{q l_1}{2} - \frac{p a}{2 l_1}(b + a)$$

$$\text{max } \mathfrak{M} \text{ in der Oeffnung AB} = \frac{A^2}{2q}$$

und findet dasselbe statt für die Abscisse

$$x_0 = \frac{A}{q} = \frac{l_1}{2} - \frac{p}{q}\frac{a}{2 l_1}(b + a)$$

2ᵗᵉ Oeffnung Trägerstück BB_1.

$$\text{max Vertikalkraft in B} = -\frac{q}{2}(b + 2a)$$

$$\text{max } \mathfrak{M} \text{ in B} = -\frac{q a}{2}.(b + a)$$

Trägerstück B_1C_1

$$\text{max } \mathfrak{V} \text{ in } B_1 = \frac{q b}{2}$$

$$\text{max } \mathfrak{M} \text{ in der Mitte} = \frac{q b^2}{8}.$$

§. 9. Anordnung der Auflager und Einfluss der Träger-Anzahl.

93. Es ist bis dahin angenommen worden, dass die Auflagerreactionen (beziehungsweise Auflagerdrücke) je auf einem Punkte concentrirt sind. Es ist auch entschieden am zweckmässigsten, wenn man die Auflagerbreite in dem Masse reduzirt, als diess die Widerstandsfähigkeit der Baumaterialien und der geometrische Zusammenhang der einzelnen Constructionstheile gestattet.

Bei den einfacheren Fällen wendet man sogenannte Gleitlager an, deren untere Fläche sich nach der Festigkeit der Auflager (meist Auflagerquader) bestimmt, während die obere Fläche den Trägergurtungen angepasst wird. Jede eiserne Brückenconstruction erleidet in Folge der Temperaturunterschiede Veränderungen in ihrer Länge, und soll desshalb auf ihren Auflagern, beziehungsweise auf einem derselben, sich verschieben können. Wird die Reibung bei wachsender Spannweite grösser, und ist dieselbe ausserdem durch Rost etc. vermehrt, so übt die Dilatation eine zerstörende Wirkung auf das Mauerwerk aus, und können insbesondere die Auflagerquader losgerüttelt und demnächst weiteren Beschädigungen ausgesetzt werden.

Nur in seltenen Fällen hat man versucht, die Reibung durch Einölen der Lagerflächen zu vermeiden, und wird auch die in Rücksicht auf gleichförmige Belastung übliche Bearbeitung der Trägerenden (Abhobeln der untern Gurtungsplatten) nur geringe Verminderung des Reibungscoeffizienten ergeben. Man wendet daher bei grösseren Spannweiten an dem einen Ende, sowie eventuell an den Zwischenstützen Rolllager an, durch welche die Reibung sich, soweit als irgend wünschenswerth ist, reduziren lässt.

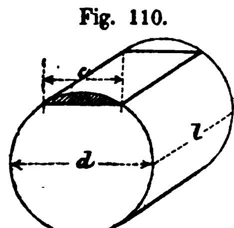
Während der Coeffizient φ der gleitenden Reibung für Schmiedeeisen auf Guss- und Schmiedeisen etwa 0.2 ist, so ist bei Anwendung von Rollen oder Walzen — wenn der Durchmesser d der letzeren in Centimetern ausgedrückt ist, zu setzen

$$\varphi = \frac{0{,}25}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Hieraus folgt, dass bei zunehmendem Trägergewicht auch der Durchmesser der Walzen vermehrt werden muss und wird man hiedurch häufig veranlasst, anstatt der Rollen Cylinderabschnitte, sogenannte Stelzen oder Pendel zu verwenden, wobei selbstredend unter eine bestimmte Dicke (Breite) der Stelzen (Dicke der Cylinderscheibe) nicht herabgegangen werden darf.

Letzteres vorausgesetzt, nimmt man an, dass der Druck, den eine Walze von bestimmtem Material aufnehmen kann, dem Durchmesser derselben direct proportional ist, indem die durch

Fig. 110.



Zusammenpressung entstehende Berührungsfläche c . l desto grösser wird, je grösser der Durchmesser d ist.

Nennt man ferner n die Anzahl der Walzen, P die je auf ein Rolllager treffende Belastung, und endlich K einen durch die Erfahrung zu bestimmenden Coeffizienten, so erhält man

$$P = n . l . d . K \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

Nach Massgabe von Beispielen ausgeführter Brücken darf man K für gusseiserne Rollen zu 20—30 Kilogramm nehmen, wenn l und d in Centimetern ausgedrückt sind*).

Nach Vorstehendem kann man die Zahl und den Durchmesser der anzuwendenden Walzen oder Stelzen bestimmen, welche bei grösseren Spannweiten an jedem der beweglichen Auflager eine erhebliche Breite einnehmen. Die Uebertragung des auf thunlich kleine Flächen reduzirten Trägerdruckes geschieht alsdann mittelst lagerschuhförmigen Zwischenstücken, welche mit den Trägerenden charnierartig verbunden sind. Aehnliche Lagerschuhe sind aber auch an den festen Auflagern grösserer Brücken desshalb nothwendig, weil der am Trägerende auf eine kleine Fläche concentrirte Auflagerdruck auf eine verhältnissmässig grössere Fläche des Auflagerquaders vertheilt werden muss.

Wenn im Vorstehenden angenommen wurde, dass die Auflagerfläche der Trägerenden möglichst eingeschränkt werde, so ist dabei vorausgesetzt, dass die Träger dem entsprechend construirt sind, der Art, dass die Auflagerreaction durch bestimmte Constructionsglieder (in der Regel Endständer) direct aufgenommen werden, und dass diese Glieder stark genug sind, die Auflager-Reaction ohne Nachtheil direct aufzunehmen.

Wenn solche besondere, hinreichend starke Constructionsglieder zunächst den Auflagern fehlen, muss die Seitenwandung selbst auf irgend eine Weise den Auflagerdruck aufnehmen. Besteht diese Seitenwandung z. B. aus einer vollen Blechwand, so kann der Fall eintreten, dass diese Blechwand auf eine bestimmte Länge zur Aufnahme des Auflagerdrucks mitwirken muss.

Durch letztere Anordnung kann bei continuirlichen Trägern mit vollen Wandungen der immerhin etwas zweifelhafte Vortheil entstehen, dass die freie Spannweite in Folge erheblicher Breite der Zwischenauflager reduzirt wird. Da es aber sehr schwierig ist, ein nur annähernd gleichförmiges Auflagern auf solchen breiten Zwischenstützen zu erzielen, so wurde schon vorgeschlagen, auf den Zwischenpfeilern continuirlicher Träger je 2 Auflager anzuordnen,

---

*) Die Aufstellung einer genauen Formel ist versucht hannover. Bauzeitung 1875, S. 291. Für die Praxis dürfte die empirische Formel II. genügen.

und so in directer und scheinbar sicherer Weise die Reduzirung der freien Spannweite zu erzielen. Bei der Rechnung wären solche mit doppelten Auflagerpunkten versehenen Zwischenpfeiler als besondere Spannweiten zu behandeln, so dass z. B. eine Brückc mit zwei Zwischenpfeilern nicht drei, sondern fünf Spannweiten zeigen würde. Die Rechnung bietet nach den oben entwickelten allgemeinen Formeln keine besonderen Schwierigkeiten, wohl aber zeigt sich bald, selbst bei grösseren Spannweiten, dass der continuirliche Träger in Folge Bewegung der Ueberlast von einzelnen Auflagerpunkten sich abhebt, und dadurch theilweise grössere Spannweiten erhält, als wenn auf jeder Pfeilermitte ein einziges Auflager angebracht ist. — Wollte man aber das Abheben der Träger durch Anheften verhindern, so entstünden noch grössere Angriffsmomente als in Folge der durch Abheben vom betreffenden Auflager veranlassten Vergrösserung der Spannweiten. Durch diese doppelten Stützen wird also eine Verminderung der Angriffsmomente und dem entsprechend eine Material-Ersparniss nicht erzielt, und kann nur empfohlen werden, die Zwischenauflager ebenso wie an den Endauflagern auf möglichst kleine Flächen zu vertheilen und dieselben je in der Mitte der Zwischenpfeiler anzubringen.

94. Unsere Berechnung der Angriffsmomente 𝔐, der Vertikalkräfte 𝔙, der Eigengewichte p, der Gesammtlasten q, wie sie seitdem und insbesondere in Tab. XVII. gegeben wurde, bezieht sich immer auf e i n Eisenbahngeleise.

Wenn ein Geleise durch zwei Hauptträger aufgenommen wird, so hat jeder der letzteren die Hälfte der für ein Geleise berechneten Gewichte oder Momente aufzunehmen.

Es kann aber auch der Fall vorkommen, dass 3 oder mehr Träger sich in die Last eines Geleises theilen, und zwar nicht immer in gleichförmiger Weise. — Das Eigengewicht der Brücke wird dadurch nicht wesentlich alterirt; es bedarf aber einer besonderen Betrachtung, wie viel von diesem Eigengewicht und wie viel von der zufälligen Last auf jeden Träger fällt.

Häufiger kommt der Fall vor, dass 2 G e l e i s e v o n d e n s e l b e n H a u p t t r ä g e r n gemeinschaftlich aufgenommen werden.

Wenn nur zwei Hauptträger vorhanden sind, so sind für jeden derselben die für ein Geleise antreffenden Gewichte p, q, 𝔙 und Angriffsmomente 𝔐 zu rechnen. Denn immer ist der Fall der gleichzeitigen Belastung beider Geleise ins Auge zu fassen. — Am Eigengewicht p kann zwar durch Verminderung der Trägeranzahl eine Ersparniss realisirt werden, doch hängt dies wesentlich von der Constructionsweise und der Spannweite ab.

Wenn drei Träger zur Aufnahme von zwei Geleisen dienen, so hat der mittlere etwa die Hälfte der zufälligen Last aufzunehmen und zwar mehr oder weniger, je nach dem Hebelverhältniss,

das durch die Anordnung der Querträger gegeben ist. — Es ist nicht rathsam, den Querträger als continuirlichen Träger über den mittleren Hauptträger hinweggehen zu lassen; denn es wird derselbe bei Belastung der einen Brückenseite doch wenig verschieden von einem einfachen Träger wirken (weil das Gegengewicht der Belastung des andern Geleises fehlt), während bei gleichzeitiger Belastung beider Geleise die Aussenträger verhältnissmässig weniger, der Mittelträger mehr als die Hälfte der Last auszuhalten hat. — Man könnte eine solche Tieferlegung des Mittel-Hauptträgers vorschlagen, dass dieser Misstand vermieden würde; — es ist jedoch zu bedenken, dass hiedurch die Steifigkeit und Unverückbarkeit der ganzen Construction wesentlich leiden und dass der Nachweis von dem steten Vorhandensein der beabsichtigten Tieferlegung schwer fallen würde.

Vorausgesetzt, dass die Querträger je über zwei Hauptträger frei gespannt sind, so kann die Vertheilung der Last keinen Zweifel lassen: dieselbe erfolgt nach dem Hebelgesetz, wobei wieder beide Geleise gleichzeitig belastet angenommen werden.

95. Wenn die zwei Geleise einer Brücke durch 2 oder 3 Hauptträger aufgenommen werden, so wird bei dem am häufigsten vorkommenden Falle der Belastung des einen Geleises eine verschiedene Einbiegung der einzelnen Hauptträger stattfinden.

Es wird diese Senkungsdifferenz bei frei aufliegenden Trägern am grössten sein. — Die Einbiegung f ist für einen mit der Maximallast q behafteten Träger nach Gleichung 42)

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{E\Theta} \qquad 42)$$

wo l die Spannweite des Trägers bezeichnet. — Es ist aber nach Gleichung 31)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a}\,\Theta \qquad I.$$

ferner ist für den mittleren Querschnitt (wo die grösste Senkung stattfindet)

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{8}\,ql^2 \qquad II.$$

und

$$a = \frac{H}{2} \qquad III.$$

d. h. gleich der halben Trägerhöhe zu setzen; aus den Gleichungen I.—III. folgt:

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M}\,.\,H}{2\,.\,\mathfrak{A}} = \frac{q\,.\,l^2}{16} \cdot \frac{H}{\mathfrak{A}} \qquad IV.$$

und durch Wertheinsetzung in Gleichung 42)

$$f = \frac{5}{24} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{E} \cdot \frac{l^2}{H} \qquad 144).$$

Für den Fall der Maximalbelastung darf für schmiedeiserne Brücken $\mathfrak{A} = 600$ K. per □Cent., und $\frac{E}{\mathfrak{A}} = 3000$ angenommen werden; woraus endlich als grösste Einbiegung eines solchen vollständig belasteten freitragenden schmiedeisernen Trägers folgt

$$f = 0{,}00007 \frac{l}{H} \cdot l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 145).$$

Bei einseitiger Belastung hat jeder Träger nur einen Theil dieser Einbiegung zu erleiden; ist er nämlich mit $\mathfrak{q}$ per Längeneinheit belastet, so ist seine grösste Einsenkung

$$f_1 = \frac{\mathfrak{q}}{q}\, 0{,}00007 \frac{l}{H} \cdot l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 146)$$

und indem man f_1 für die einzelnen Träger berechnet, erhällt man die gesuchten Senkungsdifferenzen.

Beispiel. Eine Brücke von 40^m Spannweite habe für 2 Geleise nur 2 Hauptträger; es ist nach Tabelle XVII. das Eigengewicht $p = \frac{1}{3}\,q$, ferner die zufällige Belastung eines Geleises $k = \frac{2}{3}\,q$; es vertheile sich letztere bei einseitiger Belastung nach den Verhältnisszahlen $\frac{2}{7}$ und $\frac{5}{7}$, so dass der eine Träger $\frac{2}{7}\,k = \frac{4}{21}\,q$; der andere $\frac{5}{7}\,k = \frac{10}{21}\,q$ als zufällige Last erhält; die Gesammtbelastung der beiden Träger ist daher

$$\text{für den Träger I.} \quad p + \frac{4}{21}\,q = \frac{11}{21}\,q,$$

$$\text{für den Träger II.} \quad p + \frac{10}{21}\,q = \frac{17}{21}\,q.$$

Es ist somit nach Gleichung 146), indem man für l seinen Werth 40 M. = 4000 Cent. einsetzt, und das Verhältniss $\frac{l}{H} = 10$ annimmt,

für den Träger I.

$$f_1 = \frac{11}{21}\, 0{,}0007 \cdot 4000 \text{ Cent.} = 1{,}6 \text{ Cent.}$$

für den Träger II.

$$f_1 = \frac{17}{21}\, 0{,}0007 \cdot 4000 \text{ Cent.} = 2{,}475 \text{ Cent.}$$

Die Senkungsdifferenz beider Träger beträgt somit bei einseitiger Belastung in der Mitte 0,875 Cent., was eine ganz unbedeutende Verwindung der Brücke, beziehungsweise Drehung des mittleren Querschnitts voraussetzt.

§. 10. Kleine Träger.

96. Im Brückenbau wird man bei kleineren Spannweiten vorzugsweise concentrirte Belastungen in Betracht zu ziehen haben; die Berechnung der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ und Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$ geschieht dann nach Gleichung 100)—102), insolange die Träger an beiden Enden frei aufliegen.

Solche Träger continuirlich herzustellen, ist, wie schon mehrfach angeführt, im Allgemeinen nicht rathsam. — Denn einmal ist der erwartete Vortheil gering, sodann ist in N°. **84** und **90** nachgewiesen, wie kleine Differenzen in der Höhenlage der Zwischenstützen sehr erhebliche Aenderungen in den Angriffsmomenten verursachen können; dass es aber Ausnahmen giebt, dass man insbesondere bei Anwendung von eisernen Säulenstellungen häufig von der Continuität auch bei kleinen Spannweiten zweckmässigen Gebrauch machen kann, haben wir schon oben entwickelt. Kleine Träger kommen im Brückenbau hauptsächlich auch zur Anwendung als Zwischenträger, welche den Zweck haben, das Gewicht oder die Belastung der Fahrbahn, beziehungsweise der Fahrgeleise auf die Hauptträger-Construction zu übertragen, und meist in der Form von Quer- und Längenträgern (Schwellenträgern) auftreten. Bei letzteren ist die Anwendung der Continuität besonders bedenklich, weil die Stützpunkte durch die Einbiegungen der Hauptträger und Querträger ohnedem diverse Senkungen erleiden, welche bei der geringen Spannweite von um so grösserem Einflusse sind.

Träger, welche in derselben Längenrichtung liegen, wie die vorerwähnten Längsträger einer grösseren Eisenbahnbrücke (Fig. 95ᵃ) können desshalb an den Enden doch eine Verbindung erhalten, es dient diess nicht nur zur Solidität, sondern hat auch auf die Tragfähigkeit einen günstigen Einfluss, namentlich wenn man die Vorsicht gebraucht, diese Verbindung erst dann anzubringen, nachdem die Brücke vollständig aufgestellt ist; der schädliche Einfluss unvermeidlicher Differenzen in der Höhenlage der Auflager dieser Zwischenträger wird hiedurch eliminirt. Uebrigens dürfte angezeigt sein, diese Verbindungen nur mässig stark zu halten, so dass eher eine geometrische Continuität hergestellt wird, als eine solche im Sinne des §. 8.

Bei den statischen Berechnungen wird man dann meist von diesen Endverbindungen absehen können, indem dann die Momente, die an der Verbindungsstelle eintreten, nach Massgabe der Stärke der Verbindungsglieder nur klein sein können.

Eine ausgedehnte Anwendung finden kleine Träger im Hochbau, bei Deckenconstructionen als Balken und Unterzüge, bei Dächern als Pfetten etc. und hat man es hier meist mit gleichförmig vertheilten Lasten zu thun. Insofern bei Balkenlagen gewöhnlich die Balken über mehrere Unterzüge in einem Stück weggehen, und öfters die Balken an dem Ende in die Mauern eingreifen,

haben wir es hier vielfach mit continuirlichen Trägern zu thun, deren Berechnung nach Anleitung der N°. **20** oder aber mit noch grösserer Leichtigkeit unter Benützung der allgemeinen Formeln der N°. **73** durchzuführen ist.

Für die praktische Anwendung genügt es meist anzunehmen, dass die Balken da, wo sie in die Mauer eingreifen, oder wo sie auf Unterzügen durchgehen, horizontal eingespannt sind, wo diess wegen ungenügenden Eingreifens in die Umfassungsmauern nicht angenommen werden darf, wird man hinreichend genau rechnen, wenn man zwischen den Resultaten bei freier Auflage und vollständiger Einspannung das Mittel nimmt.

97. Bei kleinen Trägern darf bei der Berechnung der Querschnittsdimensionen das Eigengewicht der Träger selbst in der Regel vernachlässigt werden. Meist erhalten diese Träger auf die ganze Länge denselben Querschnitt, und ist für die verschiedenen Arten der Belastung desshalb nur das Maximalmoment zu bestimmen, das für die Querschnittsdimensionen massgebend ist.

Es sind nun in nachstehender Tabelle XXVIII. diese Maximalmomente für verschiedene in der Praxis vorkommende Fälle bestimmt, und zwar für frei aufliegende Träger nach Gl. 100)—102) resp. 103), für eingespannte Träger unter Anwendung der Formeln der N°. **73**.

Es sind übrigens insbesondere auch in Rücksicht auf eventuelle Aenderung des Querschnitts in die Tabelle alle diejenigen Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ aufgenommen, welche zur Herstellung einer graphischen Darstellung analog der Fig. 29 (der N°. **20**) dienen, so dass für jeden Querschnitt x die $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ ersichtlich sind — die in Tabelle XXVIII. enthaltenen Formeln sind somit zur allgemeinsten Anwendung geeignet.

Ist ein Träger gleichzeitig durch concentrirte und gleichförmig vertheilte Last (Eigengewicht) angegriffen, so sind die Werthe der Tabelle in gleicher Weise anwendbar, indem man nur für einen bestimmten Querschnitt x die Werthe $\mathfrak{V}$ resp. $\mathfrak{M}$, für concentrirte Last und gleichförmig vertheilte Last zu addiren braucht.

Eine Modification erleiden in diesem Falle die Werthe für den Ort des Maximalmoments, indem letzteres nicht nothwendig mit demjenigen für concentrirte Last allein zusammenfällt. Um diesen Ort zu finden, hat man den Werth für $\mathfrak{M}_x$, wie er aus der Belastung durch concentrirte Last und gleichförmig vertheilte Last sich zusammensetzt, nach x zu differenziren und das Differenzial $= 0$ zu setzen, und aus dem hieraus erhaltenen Werthe x_0 das zugehörige $\mathfrak{M}$ zu berechnen. Nur für den Fall, dass die Maxima für concentrirte Last und gleichförmig vertheilte Last auf dieselbe Abscisse treffen (wie in N°. 3 und 4 der Tabelle), kann die Berechnung von x_0 unterbleiben, und erhält man das Maximum $\mathfrak{M}$ durch einfache Summirung der in der Tabelle enthaltenen Maximalmomente.

Ein Zahlenbeispiel möge diess erläutern:

Ein beiderseits frei aufliegender Träger von 5^m Länge sei im Abstand von $1{,}0^m$ von der Stütze A durch eine concentrirte Last $P = 1200$ Kil. angegriffen, ausserdem mit 800 Kil. pro laufenden Meter belastet. Wir erhalten für das Moment am Angriffspunkt von P nach Fall 9 der Tabelle:

$$\mathfrak{M}_\lambda = \frac{P\lambda}{l}(l-\lambda) = 1200 \cdot \frac{1{,}0}{5{,}0} \cdot 4{,}0 \qquad = 960^{km}.$$

Hiezu das Moment an derselben Stelle durch die gleichförmig vertheilte Last q

$$\mathfrak{M}_\lambda = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} = 400\,(5 \cdot 1{,}0 - 1{,}0^2) = 1600^{km.}$$

$$\text{zusammen } 2560^{km.}$$

In ähnlicher Weise findet man das Moment für die Mitte $x = \frac{l}{2}$ (wo $\mathfrak{M}$ ohne Zutritt von P ein Maximum wäre):

$$\text{Beitrag von } P = \frac{P\lambda}{l} \cdot \frac{l}{2} \qquad = 600^{km.}$$

$$\text{Beitrag von } q = \frac{ql^2}{8} \qquad = 2500^{km.}$$

$$\text{zusammen } 3100^{km.}$$

Das Maximum $\mathfrak{M}$ trifft aber offenbar ein in einem Punkte zwischen λ und $\frac{l}{2}$ und ist allgemein für einen Punkt x zwischen Angriffspunkt der Kraft und der Trägermitte nach Fall 9 und 4 der Tabelle

$$\mathfrak{M}_x = \frac{P\lambda}{l}(l-x) + \frac{qx}{2}(l-x)$$

hieraus
$$\frac{d\mathfrak{M}_x}{d_x} = -\frac{P\lambda}{l} + \frac{ql}{2} - qx = 0$$

somit
$$x_0 = \frac{1}{q}\left[\frac{ql}{2} - \frac{P\lambda}{l}\right] = \frac{l}{2} - \frac{P}{q}\frac{\lambda}{l}$$

und für obiges Zahlenbeispiel:

$$x_0 = 2{,}5 - \frac{1200}{800} \cdot \frac{1{,}0}{1{,}5} = 2{,}2^m$$

und ist für diese Abscisse das Moment $\mathfrak{M}_x$ nach Gleichung 102ª)

$$\max \mathfrak{M}_x = \frac{1200 \cdot 1{,}0}{5} \cdot 2{,}8 + \frac{800 \cdot 2{,}2}{2} \cdot 2{,}8 = 3136^{km}$$

somit, wie vorauszusehen, grösser, als in beiden obigen Fällen.

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, dass auch für besondere Belastungsfälle leicht die Maxima der Momente bestimmt werden können und gestattet desshalb die Tabelle XXVIII. die allgemeinste Anwendung.

Für die in der Praxis am meisten vorkommenden Fälle sind in der Tabelle ausserdem noch die grössten Einbiegungen berechnet worden, da deren Kenntniss in manchen Fällen von Werth sein kann.

Tabelle

Nro.	Anordnung des Trägers.	Moment im Querschnitt x = 0 (v. A gerechnet).	Moment im Querschnitt x = l.	Vertikalkraft zunächst der Stütze A.	B.
1	l; A; P=ql	$-Pl$	0	P	—
2	l; A	$-\frac{ql^2}{2}$	0	ql	—
3	l; A; B; P=ql	0	0	$-\frac{P}{2}$	$+\frac{P}{2}$
4	l; A; B	0	0	$-\frac{ql}{2}$	$+\frac{ql}{2}$
5	l; A; B; P=ql	$-\frac{Pl}{8}$	$-\frac{Pl}{8}$	$-\frac{P}{2}$	$+\frac{P}{2}$

XXVIII.

Moment in beliebigem Querschnitt x (von A gerechnet).	Ort des positiven Maximal-momentes.	Positives Maximal-moment.	Ort der grössten Einsenkung (von A gerechnet).	Grösste Einsenkung.
$-P(l-x)$	sämmtliche Momente sind negativ.	—	l	$\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\Theta}$
$-\frac{q}{2}(l-x)^2$	sämmtliche Momente sind negativ.	—	l	$\frac{1}{8}\frac{ql^4}{E\Theta}$
für $x < \frac{l}{2}$ $= \frac{P}{2} \cdot x$ für $x > \frac{l}{2}$ $= \frac{P}{2}(l-x)$	$\frac{l}{2}$	$+\frac{Pl}{4}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{E\Theta}$
$\frac{qx}{2}(l-x)$	$\frac{l}{2}$	$+\frac{ql^2}{8}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{5}{384}\frac{ql^4}{E\Theta}$
für $x < \frac{l}{2}$ $-P\left(\frac{l}{8}-\frac{x}{2}\right)$	$\frac{l}{2}$	$+\frac{Pl}{8}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{192}\frac{Pl^3}{E\Theta}$

Tabelle

Nro.	Anordnung des Trägers.	Moment im Querschnitt x = 0 (von A gerechnet).	Moment im Querschnitt x = l.	Vertikalkraft zunächst der Stütze A.	B.
6		$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql}{2}$	$+\frac{ql}{2}$
7		$-\frac{3}{16}$ Pl.	0	$-\frac{11}{16}P$	$+\frac{5}{16}P$
8		$-\frac{ql^2}{8}$	0	$-\,{}^5/_8\,ql$	$+\,{}^3/_8\,ql$
9		0	0	$-P\frac{l-\lambda}{l}$	$+P\frac{\lambda}{l}$
10		$-\frac{1}{2l^2}P\lambda(l-\lambda)(2l-\lambda)$ *)	0	$-\frac{P}{2l^3}\left[2l^3-\lambda^2(3l-\lambda)\right]$	$+\frac{P}{2l^3}\lambda^2(3l-\lambda)$

*) $\mathfrak{M}_0$ wird Maximum für $\lambda = 0{,}423\,l$ und ist $\mathfrak{M}_0$ max $= 0{,}193$ Pl.

XXVIII. (Fortsetzung.)

Moment in beliebigem Querschnitt x (von A gerechnet).	Ort des positiven Maximalmomentes.	Positives Maximalmoment.	Ort der grössten Einsenkung (v. A gerechnet).	Grösste Einsenkung.
$\frac{q}{2}\left[lx - x^2 - \frac{l^2}{6}\right]$	$\frac{l}{2}$	$+\frac{ql^2}{24}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{384}\frac{ql^4}{E\Theta}$
für $x < \frac{l}{2} = \frac{P}{16}(11x - 3l)$ für $x > \frac{l}{2} = \frac{5P}{16}(l - x)$	$\frac{l}{2}$	$+\frac{5}{32}Pl$	0,553 l	$0{,}00932\frac{Pl^3}{E\Theta}$ *)
$\frac{q}{8}\left[5lx - l^2 - 4x^2\right]$	$^5/_8$ l	$\frac{9}{128}ql^2 = 0{,}0703\,ql^2$	0,578 l	$0{,}0054\frac{ql^4}{E\Theta}$
für $x < \lambda = P\frac{l-\lambda}{l} \cdot x$ für $x > \lambda = P\frac{\lambda}{l}(l - x)$	λ	$P\frac{\lambda}{l}(l-\lambda)$	für $\lambda < \frac{l}{2}$ $\sqrt{\frac{l^2-\lambda^2}{3}}$	$\frac{P}{E\Theta}\frac{\lambda(l^2-\lambda^2)}{9l}\sqrt{\frac{l^2-\lambda^2}{3}}$ **)
für $x < \lambda$ $+\frac{P}{2l^3}\left[\begin{matrix}-2l^3(\lambda-x)\\+\lambda^2(l-x)(3l-\lambda)\end{matrix}\right]$ für $x > \lambda$ $\frac{P}{2l^3}(l-x)\lambda^2(3l-\lambda)$	λ	$\frac{P(l-\lambda)}{2l^3}\lambda^2\,(3l-\lambda)$ ***)	$l - l\sqrt{\frac{l-\lambda}{3l-\lambda}}$	$\frac{P\lambda^2}{6E\Theta}(l-\lambda)\sqrt{\frac{l-\lambda}{3l-\lambda}}$

*) Für $x = \frac{l}{2}$ ist die Einsenkung $= 0{,}0091\,\frac{Pl^3}{E\Theta}$.

**) Für $x = \lambda$ ist die Einsenkung $= \frac{P}{3E\Theta}\,\frac{(l-\lambda)^2\lambda^2}{l}$.

***) $\mathfrak{M}_\lambda$ wird Maximum für $\lambda = 0{,}634\,l$ und ist $\mathfrak{M}_\lambda$ max $= 0{,}174$ Pl.

Tabelle

Nro.	Anordnung des Trägers.	Moment im Querschnitt $x = 0$ (v. A gerechnet).	Moment im Querschnitt $x = l$.	Vertikalkraft zunächst der Stütze A.	B.
11		$-\frac{1}{l^2} P\lambda(l-\lambda)^2$ *)	$-\frac{1}{l^2} P\lambda^2(l-\lambda)$	$-\frac{P}{l^3}(l-\lambda)^2(l+2\lambda)$	$+\frac{P}{l^3}\lambda^2(3l-2\lambda)$
12		0	0	$-P$	$-P$
13		0	0	$-\frac{P}{l}(2l-\lambda-\lambda_1)$	$-\frac{P}{l}(\lambda+\lambda_1)$
14		0	0	$-\left(P-\frac{Pd}{2l}\right)$	$-\left(P+\frac{Pd}{2l}\right)$
15		$-P\lambda\frac{l-\lambda}{l}$	$-P\lambda\frac{l-\lambda}{l}$	$-P$	$-P$

*) $\mathfrak{M}_0$ wird Maximum für $\lambda = {}^1/_3 l$ und ist $\mathfrak{M}_0 \max = 0{,}1481\, Pl = \frac{4}{27} Pl$.

XXVIII. (Fortsetzung.)

Moment in beliebigem Querschnitt x (von A gerechnet).	Ort des positiven Maximalmomentes.	Positives Maximalmoment.	Ort der grössten Einsenkung (v. A gerechnet).	Grösste Einsenkung.
für $x < \lambda$ $P\frac{(l-\lambda)^2}{l^2}\left[\frac{l+2\lambda}{l}x-\lambda\right]$	λ	$\frac{2P\lambda^2}{l^3}(l-\lambda)^2$	für $\lambda < \frac{l}{2}$ $= \frac{2l\lambda}{l+2\lambda}$ für $\lambda > \frac{l}{2}$ $= \frac{l^2}{3l-2\lambda}$	für $\lambda < \frac{l}{2}$ $= \frac{2P\lambda^3(l-\lambda)^2}{3E\Theta(l+2\lambda)^2}$ für $\lambda > \frac{l}{2}$ $= \frac{2P\lambda^2(l-\lambda)^3}{6E\Theta(3l-2\lambda)^2}$
für $x < \lambda$ $= P.x$ für $x > \lambda$ und $< l-\lambda$ $= P\lambda$	λ bis $l-\lambda$	$P.\lambda$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda(3l^2-4\lambda^2)}{24}.\frac{P}{E\Theta}$
nach Gl. 102).	λ λ_1	$P\frac{\lambda}{l}(2l-\lambda-\lambda_1)$ $P\frac{l-\lambda_1}{l}(\lambda+\lambda_1)$	—	—
nach Gl. 102).	$\lambda = \frac{l}{2}-\frac{d}{4}$	*) $\frac{P(2l-d)^2}{8l}$	—	—
für $x < \lambda$ $P\left[x-\frac{\lambda}{l}(l-\lambda)\right]$	λ bis $\lambda + d$	$P\frac{\lambda^2}{l}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda^2(3l-4\lambda)}{24}.\frac{P}{E\Theta}$

*) Fall 14 ist die ungünstigste Laststellung (vgl. No. 65).

Vierter Abschnitt.

Entwicklung der praktischen Regeln für Brückenträger mit vollen Wandungen.

---

§. 11. Homogene Träger.

98. Das Widerstandsmoment eines Trägers mit voller Wandung, also insbesondere eines homogenen Trägers findet sich unter Anwendung der Gleichung 31), durch Berechnung des Trägheitsmoments des fraglichen Trägers.

Bezeichnet für einen beliebigen Querschnitt x:

$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment,

ΣXy das numerisch gleiche Widerstandsmoment,

$\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) die Spannung (Pressung) in den äusersten Fasern,

$\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) die Entfernung der äussersten gespannten (gepressten) Faser von der neutralen Faser,

Θ das Trägheitsmoment des Trägers-Querschnitts,

so ist

$$\mathfrak{M} = \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 31).$$

Im vorhergehenden Abschnitte sind die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für einzelne Fälle berechnet und ist insbesondere für kleinere Träger, Querträger etc. in Tabelle XXVIII. eine besondere Zusammenstellung gegeben. Besondere Fälle sind nach Gleichung 100)—102) (Seite 123) zu berechnen, welche Formeln sich durch Vernachlässigung des Eigengewichts etwas vereinfachen. Besteht die Belastung aus beweglichen Einzellasten (Bahnzügen), so gelten zur Bestimmung der max $\mathfrak{M}$ für einen beliebigen Querschnitt x die Regeln der N°. **65** und **66**.

Die für jedes Material zulässigen Spannungen und Pressungen sind im 2. Abschnitt verzeichnet, die Berechnung der Trägheits-

momente Θ ist schon im 1. Abschnitte entwickelt; es ist daselbst in N°. **14** eine Zusammenstellung der häufiger vorkommenden Trägheitsmomente gegeben, während in N°. **16** eine Näherungsformel aufgestellt ist, welche in vielen Fällen rascher und hinreichend genau zu demselben Ziele führt.

99. Die schmiedeisernen Träger werden im Brückenbau am häufigsten angewendet und zeigen auch die grösste Ausbildung. — Für gutes Walzeisen darf für kleinere Träger im Allgemeinen eine zulässige grösste Spannung von 600^{k} angenommen werden.

Indem wir die Bezeichnungen beibehalten, die in der vorhergehenden Nummer erläutert sind, so haben wir nach Gl. 31)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \Sigma Xy = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\Theta \\ \mathfrak{A} &= \mathfrak{M}\,\frac{\mathfrak{a}}{\Theta} = \mathfrak{B}\,\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{M}\,\frac{\mathfrak{b}}{\Theta} = \mathfrak{A}\,\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 147).$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll, wie bemerkt, $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht grösser als 600 genommen werden, es müssen diese Werthe aber niedriger gegriffen werden, wenn die schiefe Wandspannung grösser sein sollte, als die grösste Längenspannung (vergl. N°. **26** und **27**).

Die Mittelrippe trägt zum Werth des Trägheitsmoments nur wenig bei; sie wird desshalb bei schmiedeisernen homogenen Trägern thunlich dünn gehalten; doch ist für ihre Stärke durch die Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ ein bestimmtes Minimum gegeben.

Bezeichnet nämlich für einen Vertikalschnitt x

$\mathfrak{V}$ die im Querschnitt zu übertragende Vertikalkraft,

ΣY den numerisch gleich grossen Vertikalwiderstand,

S_0 die in der neutralen Faser des Trägers an der betrachteten Stelle per Längeneinheit wirkende Schubkraft,

$\mathfrak{S}_0$ die auf die Quadrateinheit reduzirte Schubspannung ebendaselbst,

$\mathfrak{H}$ die Distanz der Mittelpunkte von Druck und Zug,

δ die Dicke der Mittelrippe,

so ist nach Gleichung 46)

$$S_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und nach Gleichung 47)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{S_0}{z} = \frac{S_0}{\delta} \quad \ldots\ldots \quad \text{II.}$$

und folgt nun aus I. und II. als horizontale Schubspannung in der neutralen Faser

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V}}{\delta\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots \quad 148).$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 350 sein, woraus sich die Regel ergiebt

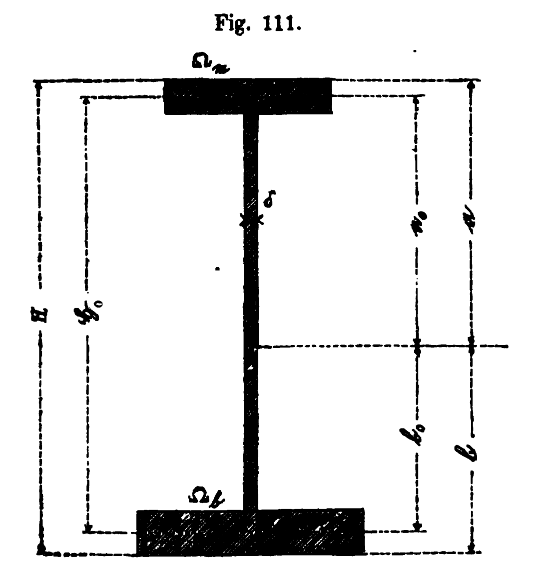
$$\delta \geqq \frac{\mathfrak{B}}{350\,\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 149).$$

Der genaue Werth von $\mathfrak{H}$ ist durch die Gleichung 32) der N°. **14** gegeben

$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\int_0^b z.\,y.\,dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32).$$

Das Integral bildet das Moment des gepressten Querschnitts in Bezug auf die neutrale Axe und lässt sich meist auf elementarem Wege ableiten (ist übrigens numerisch gleich dem Momente des gespannten Querschnitts).

Fig. 111.



In vielen Fällen wird die nachfolgende Annäherung schneller und mit hinreichender Genauigkeit zum Ziele führen; es ist nämlich die Distanz $\mathfrak{H}_0$ der beiden Resultanten der in den Gurtungen herrschenden Kräfte insofern bekannt, als dieselbe mit der Distanz der Schwerpunkte der Gurtungen nahezu identisch ist; bezeichnet man nun (s. Fig 111.) mit $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{b}_0$ die Abstände der genannten Resultanten von der neutralen Faser, mit $\Omega_\mathfrak{a}$ ($\Omega_\mathfrak{b}$) den Querschnitt der gespannten (gepressten) Gurtung, so ist, wenn ferner die Höhe der Mittelrippen oder Mittelwand gleich $\mathfrak{H}_0$ angenommen wird,

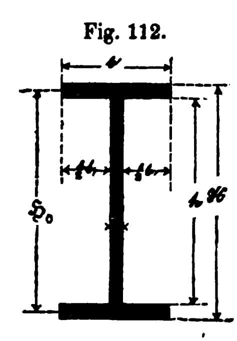
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \left\{ 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta (\mathfrak{a}_0{}^2 + \mathfrak{b}_0{}^2)}{\mathfrak{b}_0 (\Omega_b + {}^1/_2\, \delta \mathfrak{b}_0)} \right\} \quad \ldots\ldots \quad 150)$$

Für symmetrische Querschnitte ist $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0 = {}^1/_2\, \mathfrak{H}_0$, wonach sich diese Formel einfach ausspricht:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \frac{12\Omega + 2\,\delta\mathfrak{H}_0}{12\Omega + 3\,\delta\mathfrak{H}_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 150^a)$$

bei complicirten Querschnitten, z. B. Schienenprofilen wird zweckmässig ein graphisches Verfahren, etwa das in N°. **17** erläuterte, zur Bestimmung der Grösse $\mathfrak{H}$ angewendet.

Fig. 112.



Unter Festhaltung vorstehender Regeln wollen wir die grösste schiefe Spannung (Pressung) eines symmetrischen **I**förmigen Trägers berechnen; die für die Querschnittsdimensionen desselben angewendeten Bezeichnungen sind aus beistehender Fig. 112 ersichtlich. Die grösste Spannung (Pressung) findet in der Mittelrippe zunächst der Gurtungsrippe statt. Es sei y die Ordinate des Anschlusspunktes zwischen Mittelrippe und Gurtung, dann ist die grösste zulässige Längenspannung daselbst anzunehmen:

$$\mathfrak{A}_y = 550 \frac{h}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

wenn Alles in Kilo und Centim. ausgedrückt ist. — Die horizontale Schubkraft findet sich nach Gleichung 45)

$$S_y = \frac{\Sigma Y}{\Theta} \int_y^b zy\, dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

und durch Wertheinsetzung aus Gleichung 47) wo aber für z die Blechdicke δ zu setzen ist.

Horizontale Schubspannung ebendaselbst

$$\mathfrak{S}_y = \frac{\Sigma Y \int_y^b zy\, dy}{\delta\,.\,\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

wo das Integral das Moment der obern Gurtung in Bezug auf die neutrale Axe bezeichnet. —

Indem wir nun voraussetzen, dass die Wanddicke gerade so gross ist, wie Gleichung 149) verlangt (wobei zu bemerken, dass im Falle einer einzigen concentrirten Last, sowie bei continuirlichen oder eingespannten Trägern sehr leicht die volle Anstrengung der Seitenwandungen eintritt), so haben wir für $\frac{\Sigma Y}{\delta} = \frac{\mathfrak{B}}{\delta}$ seinen Werth aus Gleichung 149) einzusetzen, und erhält man:

$$\mathfrak{S}_y = \frac{2}{3} \frac{b\,(H^2 - h^2)}{bH^2 - b_, h^2} \cdot 350\, \mathfrak{H} \quad \ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Tabelle XXIX.

Die Coten der Figuren sind Vielfache der Dicke δ der Mittelrippe.

Nro.	Gewicht per lauf. Meter.	8,80 k	12,7 k	17,25 k	22,5 k	28,5 k	35,2 k	42,6 k	50,7 k	59,5 k	69,0 k	79,2 k	90,1 k	101,7 k	114,0 k
	δ =	0,5 cm	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8 cm
1		H = 12,8 cm	15,4	17,9	20,5	23,0	25,6	28,2	30,7	33,1	35,8	38,4	41,0	43,5	46,1
		ΣXy = 249	431	684	1021	1454	1994	2654	3446	4381	5471	6730	8167	9797	11629
2		H = 12,1 cm	14,5	16,9	19,4	21,8	24,2	26,6	29,0	31,5	33,9	36,3	38,7	41,1	43,6
		ΣXy = 242	417	663	990	1409	1933	2578	3340	4250	5304	6524	7918	9497	11273
3		H = 11,4 cm	13,7	16,0	18,2	20,5	22,8	25,1	27,4	29,6	31,9	34,2	36,5	38,8	41,0
		ΣXy = 233	403	639	954	1359	1864	2481	3221	4095	5115	6291	7635	9158	10871
4		H = 10,7 cm	12,8	15,0	17,1	19,3	21,4	23,5	25,7	27,8	30,0	32,1	34,2	36,4	39,5
		ΣXy = 223	386	613	915	1303	1787	2378	3088	3926	4903	6031	7320	8779	10422

Anmerk. Die Spannung in den äussersten Fasern ist zu 600 Kilogr. per □cm angenommen. Die Höhe H ist in Centimetern, ΣXy in Kilogramm-Metern ausgedrückt.

Fortsetzung von Tabelle XXIX.
Die Coten der Figuren sind Vielfache der Dicke δ der Mittelrippe.

Nro.	Gewicht per lauf. Meter.	8,80 k	12,7 k	17,25 k	22,5 k	28,5 k	35,2 k	42,6 k	50,7 k	59,5 k	69,0 k	79,2 k	90,1 k	101,7 k	114,0 k
	δ =	0,5 cm	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8 cm
5		H = 10,0 cm	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	22,0	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0
		ΣXy = 213	368	584	871	1241	1702	2265	2941	3739	4670	5744	6971	8362	9926
6		H = 9,3 cm	11,2	13,0	14,9	16,7	18,6	20,6	22,3	24,2	26,0	27,9	29,8	31,6	33,5
		ΣXy = 201	347	552	823	1173	1609	2142	2780	3535	4415	5430	6590	7905	9384
7		H = 8,6 cm	10,3	12,0	13,8	15,5	17,2	18,9	20,6	22,4	24,1	25,8	27,5	29,2	31,0
		ΣXy = 189	326	518	773	1100	1509	2008	2608	3315	4141	5093	6181	7414	8800
8		H = 7,9 cm	9,5	11,	12,6	14,2	15,8	17,4	19,0	20,5	22,1	23,7	25,3	26,9	28,4
		ΣXy = 175	303	481	717	1021	1401	1864	2421	3078	3844	4728	5738	6883	8171

Anmerk. Die Spannung in den äussersten Fasern ist zu 600 Kilogr. per □cm angenommen.
Die Höhe H ist in Centimetern, ΣXy in Kilogramm-Metern ausgedrückt.

Setzen wir nunmehr $\frac{h}{H} = \frac{9}{10}$, $\frac{b_1}{b} = \frac{9}{10}$, so folgt daraus nach Gleichung 150ª) $\mathfrak{H} = 0{,}84$ H und durch Wertheinsetzung in Gleichung IV.

$$\mathfrak{S}_y = 245 \text{ Kilo} \quad \ldots \ldots \quad \text{V.}$$

und aus Gleichung I.

$$\mathfrak{A}_y = \frac{h}{H}\, 550 \text{ Kilo} = 495 \text{ Kilo} \quad \ldots \quad \text{VI.}$$

Indem man nun schliesslich die Werthe $\mathfrak{S}_y$ und $\mathfrak{A}_y$ aus Gleichung V. und VI. in die Gleichung 55) einsetzt, erhält man als grösste schiefe Spannung oder Pressung

$$\mathfrak{D}\max = \frac{495}{2} \pm \sqrt{245^2 + \left(\frac{495}{2}\right)^2} = 602{,}5 \text{ Kilo} \quad \ldots \quad \text{VII.}$$

Hätte man $\mathfrak{A} = 600$ K. genommen, so wäre $\mathfrak{A}_y$ an der betrachteten Stelle (Grenze zwischen Gurtungen und Mittelrippe) $= 540$ und $\mathfrak{D}$ max $= 670$ K. geworden, was bei solchen kleinen Trägern, welche den Stössen der Eisenbahn-Fahrzeuge direct ausgesetzt sind, zu hoch geworden wäre.

Die Mittelrippe ist noch weiterhin in Anspruch genommen, wenn die Last oben aufgelegt ist, ohne dass Vertikalrippen angebracht sind; die Mittelrippe ist dann auf eine gewisse Länge einer Vertikalpressung ausgesetzt, welche wie am Schlusse von N°. **25** bemerkt, bei Berechnung der grössten schiefen Pressung nicht mit in Rechnung genommen wurde; letztere Pressung ist also im Falle der aufgelegten Last etwas grösser, als oben nach Gl. 55) berechnet wurde.

100. Am häufigsten kommt bei schmiedeisernen homogenen Trägern die **I**form vor; in N°. **14** sind für symmetrische und unsymmetrische Form die Trägheitsmomente Θ berechnet und findet man die Widerstandsmomente, wie mehrfach bemerkt, nach Gleichung 31). Zu weiterer Erleichterung der Rechnung ist vorstehende Tabelle XXIX. hergestellt; die berechneten Widerstandsmomente, welche in Kilogramm-Metern ausgedrückt sind, entsprechen einer grössten Längenspannung von 600 Kilo per $\square^{cm}$; die Reduktion auf andere Spannungen ist mittelst Gleichung 31) leicht herzustellen, d. h. die Widerstandsmomente sind den angenommenen Spannungen direkt proportional. — Die Dimensionen der Querschnitte 1—8 sind Vielfache der Dicke δ der Mittelrippe; die Gurtungsrippe ist durchweg 1,4mal so dick angenommen als die Mittelrippe; es entspricht diess den durchschnittlichen Verhältnissen der **I**Eisen, wie solche gegenwärtig von den Walzwerken angefertigt werden, und wird man für die meisten vorkommenden **I**Eisen ein annäherndes Profil in der Tabelle auffinden können, wobei Höhe und Gewicht per laufenden Meter vorzugsweise in Betracht zu ziehen sind.

101. Für sämmtliche Träger-Querschnitte, welche beiderseits mit Gurtungsrippen versehen sind, sind die Näherungsformeln 38) und 39) gültig.

Bezeichnen ausser den aus Fig. 111 (s. Seite 242) ersichtlichen Dimensionen:

$\mathfrak{A}$ die grösste Spannung in den äussersten Längenfasern,

$\mathfrak{B}$ die grösste Pressung in den entgegengesetzten äussersten Fasern,

$\mathfrak{H}_0$ die Distanz der Schwerpunkte der Gurtungen (als Mittelpunkte der dortigen Zug- und Druck-Resultanten), sowie

Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts,

$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment für den betrachteten Querschnitt,

so ist nach N°. **16**:

$$\Theta = \mathfrak{H}_0 \mathfrak{a}_0 \left(\Omega_a + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0\right) = \mathfrak{H}_0 \mathfrak{b}_0 \left(\Omega_b + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0\right) \quad . \quad . \quad 151)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{a}_0 \left(\Omega_a + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0\right) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{a}_0 \left(\Omega_b + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0\right) \\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \mathfrak{H} \mathfrak{b}_0 \left(\Omega_a + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0\right) = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{b}_0 \left(\Omega_b + \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0\right) \end{aligned}\right\} \quad 152).$$

Für symmetrische **I**förmige Querschnitte ist diese Gleichung ganz genau (vergleiche Gleichung 37); nennt man nun

b die Breite der Gurtungsrippe,

t die Höhe derselben,

H die ganze Trägerhöhe,

h die lichte Entfernung der Gurtungen,

$\mathfrak{H}_0 = \frac{H + h}{2}$ die Distanz der Gurtungsschwerpunkte;

bedenkt man ferner, dass:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \frac{1}{2} H, \qquad \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 = \frac{1}{2} \mathfrak{H}_0,$$

Fig. 112.

so erhält man aus Gleichung 151) und 152)

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{\mathfrak{H}_0^2}{2} \left(bt + \frac{1}{6} \delta \mathfrak{H}_0\right) \\ \mathfrak{M} &= \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{H}_0^2}{2} \left(bt + \frac{1}{6} \delta \mathfrak{H}_0\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 152^a).$$

Wenn in vorstehenden Formeln 151) bis 152ᵃ) Alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt ist, so soll $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 600 genommen werden.

102. Die schmiedeisernen homogenen Träger werden nicht nur für Zwischenträger (Querträger, Schwellenträger etc.), sondern

insbesondere auch als Hauptträger behufs Ueberbrückung kleiner Spannweiten angewendet. Man fertigt neuererzeit diese Träger aus sogenanntem Walzeisen (**I**Eisen) in solchen Dimensionen an, dass Weiten bis zu 10^m überspannt werden können, wobei man häufig mit Rücksicht auf Verminderung der Constructionshöhe für jeden Schienenstrang zwei Träger verwendet. — Wir werden bei den Hauptträgern der Eisenbahnbrücken in Folgendem die Angriffsmomente 𝔐 je für ein Geleise berechnen; zur Bestimmung der Dimensionen der Träger sind sodann diese Momente durch die Trägeranzahl zu dividiren.

Da der Querschnitt homogener Träger auf die ganze Länge constant ist, so ist in jedem Fall nur je der Maximalwerth von 𝔐 zu bestimmen; es reichen aber die im Früheren von uns gegebenen Regeln insofern nicht vollständig aus, als die Abscisse, für welche dieses Maximalmoment eintritt, im Voraus nicht bekannt ist.

Wir haben oben in N°. **65** diese Abscisse x_0 für den Fall zweier gleich grosser Lasten bestimmt und gefunden, dass dieselbe um $^1/_4$ des Radstandes von der Mitte entfernt ist. Für eine grössere Anzahl von Axlasten, namentlich bei einer ungeraden Anzahl derselben ist einleuchtend, dass x_0 weniger von der halben Trägerlänge abweicht, und könnte man x_0 durch Probiren dadurch bestimmen, dass man für die Mitte und einige wenige in der Nähe derselben liegenden Querschnitte nach Anleitung der N°. **66** (unter Anwendung der Gleichung 103) das Maxima von 𝔐 bestimmt und das grösste dieser Maxima auswählt. Uebrigens hat auch eine theoretische genaue Behandlung der Aufgabe keine Schwierigkeit, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Wie aus der Entwicklung der Gleichung 103) hervorgeht (N°. **66**), fällt max $𝔐_x$ für jeden Querschnitt im Allgemeinen stets unter eine Axe, es wird diess also auch für das absolute Maximum M max $𝔐_x$ der Fall sein müssen. Da ferner der Ort des absoluten Maximums nicht weit von der Trägermitte entfernt ist, so steht zu erwarten, dass dasselbe Rad, welches das Max. 𝔐 in der Trägermitte hervorbringt, auch zur Auffindung des absoluten Maximums führt, d. h. dass dieses Rad sich über dem Punkte befinden muss, in welchem das absolute Maximum stattfindet. Man findet nun leicht für einen bestimmten Lastzug dasjenige Rad heraus, unter welchem für die Trägermitte das Maximum eintritt, es muss nämlich nach Gleichung 103) die Summe der rechts und links dieses Rades liegenden Axlasten gleich gross sein, wobei man das Gewicht der fraglichen Axe selbst, nach Erforderniss nach beiden Seiten hin vertheilt zu denken hat.

Die dem Maximum von 𝔐 für die Trägermitte entsprechende Axe ist aber auch (Ausnahmsfälle abgerechnet) für das Max 𝔐 der nicht weit von der Mitte entfernt liegenden Querschnitte,

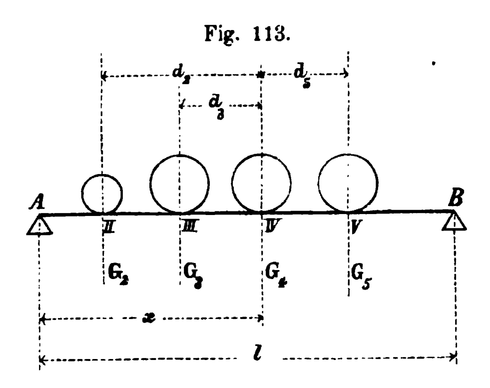
somit für das absolute Max $\mathfrak{M}_x$ massgebend, da man das Gewicht dieses Rads in solche Fragmente theilen kann, dass die Summen der rechts und links vom Querschnitt liegenden Lasten nicht mehr ganz gleich sind, sondern sich zu einander verhalten wie $x : l-x$.

Nachdem die Axlast, unter welcher M max $\mathfrak{M}_x$ voraussichtlich eintritt, bekannt ist, bestimmt man für einen beliebigen Querschnitt x den Werth von $\mathfrak{M}_x$ nach Gleichung 102ᵃ), und erhält man sodann den Werth von x_0, indem man diese Gleichung nach x differenzirt und den Differentialcoeffizienten $\frac{d\,\mathfrak{M}_x}{dx} = 0$ setzt.

Ein Beispiel wird den Gang der Rechnung klar machen. — Es sei für die in Fig. 85 dargestellte Tendermaschine der Ort des absoluten Maximums von $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, wobei wir voraussetzen, es sei die Spannweite l so klein, dass nur die Axen II bis V auf den Träger treffen. Maximum $\mathfrak{M}$ fällt offenbar unter Axe N°. IV: für die Trägermitte hat man vom Axgewicht IV noch $1{,}55^T$ den Axen II und III zuzurechnen, um die Hälfte des Gesammtgewichts von $49{,}1^T$ zu erhalten. Rückt die Abscisse M max $\mathfrak{M}_x$ etwas nach rechts, so ist nur ein verhältnissmässig grösserer Theil der Axlast IV nach links zu rechnen.

Um allgemeine Formeln zu erhalten, führen wir die aus untenstehender Fig. 113 ersichtlichen Bezeichnungen ein und

Fig. 113.



nehmen an, es sei der Träger noch mit dem Eigengewicht p per Längeneinheit belastet, dann ist nach Gleichung 100ᵃ)

$$A = \frac{pl}{2} + \frac{G_2}{l}(l-x+d_2) + \frac{G_3}{l}(l-x+d_3) + G_4\frac{l-x}{l} + \frac{G_5}{l}(l-x-d_5) \quad \text{I.}$$

und nach Gleichung 102ᵃ)

$$\mathfrak{M}_x = Ax - \frac{px^2}{2} - G_2 d_2 - G_3 d_3$$

und wenn man den Werth von A aus I einsetzt nach einigen Reductionen:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{plx}{2} + (G_2+G_3+G_4+G_5)\left(x - \frac{x^2}{l}\right) + \frac{x}{l}(G_2d_2+G_3d_3-G_5d_5)$$
$$-\frac{px^2}{2} G_2d_2 - G_3d_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Differenzirt man diese Gleichung und setzt $\frac{d\mathfrak{M}_x}{dx} = 0$, so folgt nach entsprechender Reduction:

$$x_0 = \frac{l}{2} + \frac{G_2d_2 + G_3d_3 - G_5d_5}{2(G_2 + G_3 + G_4 + G_5) + pl} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

als Werth für die Abscisse des absolut grössten Moments, und kann diese Formel leicht in allgemeiner Form angeschrieben werden, so dass sie für jede beliebige Anzahl von Radaxen brauchbar ist.

Man kann aus Gleichung III. nachstehende Schlüsse ziehen:

1) Der Ort des Maximalmoments ist abhängig vom Eigengewicht des Trägers; durch den Einfluss von p verringert sich die Abweichung der Abscisse x_0 von der Trägermitte, der Einfluss von p ist aber unbedeutend, namentlich bei kleinen Trägern von geringem Eigengewicht, wie wir solche für homogene Träger im Auge haben.

2) Liegen die Radlasten symmetrisch zu demjenigen Rade, unter welchem max $\mathfrak{M}$ eintritt, so ist x_0 in aller Strenge $= \frac{l}{2}$.

Sind nur zwei Axen vorhanden, so trifft M max $\mathfrak{M}_x$ unter die schwerere Axe, ist P_1 deren Gewicht, P_2 das der andern Axe, so ist in Formel III. zu setzen

$$G_2 = G_3 = 0 \quad G_4 = P_1 \quad G_5 = P_2$$

und erhält man

$$x_0 = \frac{l}{2} + \frac{P_2d}{2(P_1 + P_2) + pl} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

welche in die Gleichung X. der N°. **65** übergeht, wenn man $P_1 = P_2 = P$ und $p = 0$ setzt.

Für die beiden Axen III und IV der Fig. 85 erhält man, wenn $l = 3{,}0^m$ $p = 350^k$ angenommen wird, aus Gl. IV. $x_0 = 1{,}843^m$ und hieraus M max $\mathfrak{M} = 11{,}658^{mT}$, während für die Trägermitte, wenn eine Axe über derselben steht, max $\mathfrak{M} = 10{,}624^{mT}$ sich ergiebt. Das absolute Maximum des Moments ist desshalb um ca. 10% grösser, als das für die Trägermitte. Unter Vernachlässigung von p erhält man $x_0 = 1{,}85^m$, M max $\mathfrak{M} = 11{,}25^{mT}$, max $\mathfrak{M}$ für die Mitte $= 10{,}23$, somit fast genau dieselbe Abweichung der Momente, wie oben.

Besteht der Lastzug aus 3 oder 5 Axen und sind dieselben bezüglich Lage und Gewicht symmetrisch zur Brückenmitte, so fällt x_0 in leztere, in andern Fällen kann x_0 nur sehr wenig von $\frac{l}{2}$ verschieden sein, weil Axlasten und Radstände in der Praxis nicht stark von einander abweichen.

Ein Lastzug mit 4 Axen lässt eine etwas grössere Abweichung als bei ungerader Axzahl erwarten: Setzen wir in Gleichung III. die Zahlenwerthe der Fig. 85 ein und nehmen im Weitern $l = 7{,}0^m$ $p = 1000^k = 1^T$, so folgt:

$$x_0 = 3{,}5 + \frac{10{,}7 \,.\, 2{,}7 + 12{,}8 \,.\, 1{,}4 - 12{,}8 \,.\, 1{,}4}{2 \,.\, 49{,}1 + 7{,}0 \,.\, 1{,}0}$$
$$= 3{,}5 + 0{,}274 = 3{,}774^m.$$

Es weicht somit für diesen Fall x_0 um ca. 4% der Länge l von der Trägermitte ab.

Nachdem x_0 gefunden, bestimmt sich das absolute Maximum des Moments aus Gleichung 102^a) oder Gleichung II. und erhält man:

$$\text{M max } \mathfrak{M}_x = 60{,}28^{mT}.$$

Für die Trägermitte hätte man für denselben Lastzug, wenn Axe IV auf der Trägermitte steht, erhalten:

$$\max \mathfrak{M}_{\frac{l}{2}} = 59{,}68^{mT},$$

etwa 1% weniger als oben, somit eine wesentlich geringere Abweichung als bei zwei Axen.

Für die praktische Anwendung können wir, gestützt auf vorstehende Beispiele über die Berechnung der Maxima $\mathfrak{M}$ für homogene Träger, folgende Regeln aufstellen:

Ist die Spannweite eines homogenen Trägers, der direct (ohne Vermittlung von Querschwellen) der Einwirkung eines Lastzugs ausgesetzt ist, so gross, dass drei oder mehr Radaxen gleichzeitig auf demselben Platz finden, so ist mit ausreichender Annäherung als Ort des Maximalmoments die Trägermitte anzunehmen: man bestimmt die Stellung des Lastzugs, welche dem Maximalmoment entspricht nach Gleichung 103), d. h. so, dass die Summen der nach links und rechts treffenden Radlasten gleich sind, das Moment selbst sodann nach Gleichung 102^a).

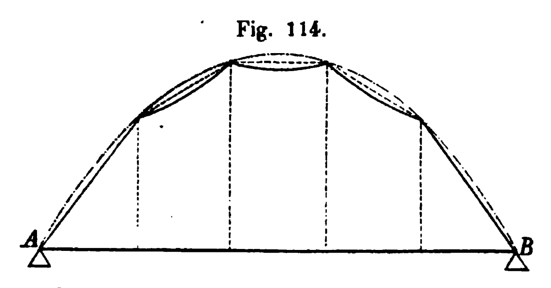
Ist die Spannweite gering, so dass nur zwei Räder auf dem Träger Platz finden, so weicht der Ort des Maximums von der Mitte erheblich ab, man bestimmt die Abscisse x_0 desselben mit Hülfe von Gleichung IV, wobei p meist vernachlässigt werden kann, da das Eigengewicht solcher kleiner Träger gegenüber dem Axgewicht nicht in Betracht kommt. Ist dann x_0 gefunden, so erhält man aus Gleichung 102^a) wieder das Maximalmoment, wobei das Eigengewicht mit in Rechnung gezogen werden kann.

Eine Modification erleidet das Verfahren, wenn die Schienen nicht direct, sondern mit Hülfe von Querschwellen auf den Hauptträgern aufliegen. Die in N°. **66** und **67** gegebenen Regeln, welche das Maximalmoment für einen bestimmten Querschnitt auffinden lehren, gelten nur für die mit den Querschwellen zusammenfallenden Querschnitte des Trägers, an den zwischen den Querschwellen liegenden Abscissen wird das Moment dadurch be-

einflusst, dass ein Theil desselben in die Schienen übergeht. — Sofern die Schienen wegen Nachgiebigkeit der Schwellen als nicht continuirlich auf den Schwellen aufliegend angenommen werden können, sind die in die Schienen übergehenden $\triangle \mathfrak{M}$ stets positiv, das Maximalmoment somit jedenfalls kleiner, als im Falle der directen Auflage der Räder auf den Trägern.

Es steht desshalb zu erwarten, dass die Maximalmomente, welche bei beweglichem Lastzug in den Abscissen zwischen den Querschwellen eintreten, für die Berechnung der Dimensionen ausser Betracht bleiben können, es ist diess auch in einer Abhandlung von Weyrauch, hannover. Bauzeitung 1875, nachgewiesen, indem die Kurven Max $\mathfrak{M}$ zwischen den Knotenpunkten die aus nebestehender Fig. 114 ersichtliche, nach aussen concave Form zeigen, somit zwischen den Knotenpunkten nie Momente stattfinden, welche die ohne Rücksicht auf die Lage der Querschwellen ermittelten Umhüllungskurven überschreiten.

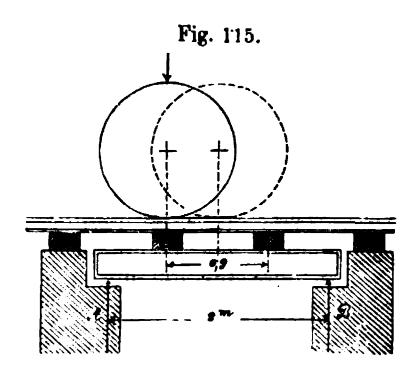
Fig. 114.



Das Zwischentreten der Querschwellen vereinfacht somit das Verfahren, insofern immer nur die der Mitte des Trägers nächstgelegenen Schwellen in Betracht zu ziehen sind.

103. Gestützt auf obige Regeln wollen wir im Folgenden die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ für eine Reihe von Trägern verschiedener Spannweite berechnen, indem wir zunächst pro Radaxe 12^T Gewicht, und die Distanz zweier Axen $= 2{,}0^m$ annehmen.

Fig. 115.



Bei 2^m Spannweite ist für unmittelbares Auflager

$$\max \mathfrak{M} = \frac{12 \cdot 2}{4} = 6^{Tm}$$

bei Anwendung von Querschwellen findet das grösste Angriffsmoment dann statt, wenn die Axe gerade auf einer Querschwelle sich befindet; es ist

$$\text{Auflagerdruck } A = \frac{12 \cdot 1{,}45}{2{,}00} = 8{,}7^{T}$$

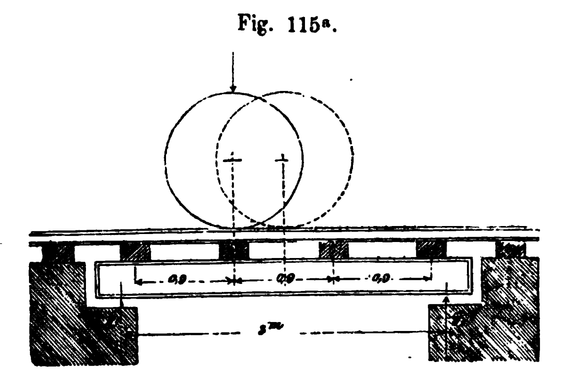
$$\max \mathfrak{M} = 8{,}7 \times 0{,}55 = 4{,}785^{Tm}.$$

Bei 3^m Spannweite ist für unmittelbares Auflager

$$\max \mathfrak{M} = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9^{Tm}$$

bei Anwendung von Querschwellen findet das grösste Angriffsmoment wiederum dann statt, wenn die Radaxe unmittelbar über

Fig. 115ª.



einer Querschwelle steht, hiefür ist (indem die letzte, zunächst B befindliche Querschwelle durch das 2. Locomotivrad gleichfalls eine Belastung erhält)

$$\text{Auflagerdruck } A = \frac{12 \cdot 1{,}95 + 9{,}333 \cdot 0{,}15}{3{,}0} = 8{,}266^{T}$$

$$\max \mathfrak{M} = 8{,}27 \times 1{,}05 = 8{,}68^{Tm}.$$

Bei 4^m Spannweite sind zwei Räderachsen auf die Brücke zu rechnen, die ungünstigste Stellung derselben tritt, wenn die Fahrbahn direct auf den Trägern liegt, dann ein, wenn das eine Rad um $1/4$ der Raddistanz d von der Brückenmitte entfernt ist (Fig. 115ᵇ), hiefür ist das Angriffsmoment nach Gleichung XI. der N°. **65**:

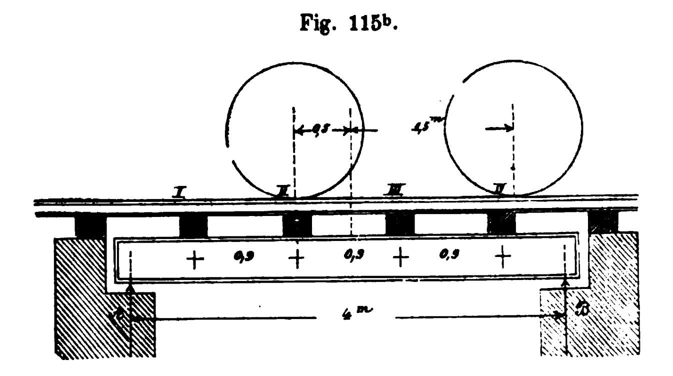
$$\max \mathfrak{M} = \frac{P\,(2l-d)^2}{8l} = \frac{12 \cdot 36}{32} = 13{,}5^{Tm}.$$

Bei Anwendung von Querschwellen dagegen erreicht $\mathfrak{M}$ sein Maximum auf der der Mitte zunächst liegenden Querschwelle II, und zwar dann, wenn das erste Rad auf derselben steht, und ist für diesen Fall:

$$A = \frac{12\ (2{,}45 + 0{,}45)}{4} = 8{,}7^{T}$$

$$\text{und Max } \mathfrak{M} = 8{,}7 \ .\ 1{,}55 = 13{,}485^{Tm}.$$

Fig. 115b.



Hätte man für die in Fig. 115b dargestellte Laststellung, bei welcher das erste Rad über die Querschwelle II um $0{,}05^{m}$ hinaustritt, das Moment im Lastpunkt berechnet, so wäre Schwelle I mit $0{,}67^{T}$, Schwelle II mit $11{,}33^{T}$, Schwelle IV mit 10^{T} belastet anzunehmen, und folgt daraus:

Auflagerdruck

$$A = \frac{2{,}45\ .\ 11{,}33}{4} + \frac{0{,}67\ .\ 3{,}35}{4} + \frac{0{,}65\ .\ 10}{4} = 9{,}125^{T}$$

$$\text{Max } \mathfrak{M} = 9{,}125\ .\ 1{,}5 - 0{,}67\ .\ 0{,}85 \qquad = 13{,}12^{Tm}$$

somit, wie zu erwarten, geringer, als im vorhergehenden Belastungsfall.

Unter den Eingangs angegebenen Voraussetzungen ist nachstehende Tabelle XXX. gerechnet, welche für jede Spannweite das per Geleise antreffende max $\mathfrak{M}$ in Kilogramm-Metern ergibt. — Die entsprechenden Widerstandsmomente I förmiger Träger sind in Tabelle XXIX. enthalten.

Die Momente werden wesentlich grösser, wenn bei gleicher Axbelastung die Axendistanz kleiner angenommen wird; in der nachfolgenden Tabelle XXXa. sind 3 Radaxen von je 12 Tons Belastung und je $1{,}5^{m}$ Distanz berechnet (was etwa der für Tabelle XVII. angenommenen Güterzug-Maschine entsprechend ist).

Die Momente der Tabellen XXX. und XXXa. beziehen sich durchweg auf ein Geleise; wenn also wie gewöhnlich zwei Träger

Tabelle XXX.

Axbelastung 12 T. Axdistanz 2^m.

Spannweite:		$1,2^m$	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	3,0
max 𝔐	mit Querschwellen.	1575	2464	3281	4050	4785	5495	6187	7200	8680
	direkt aufliegend.	3600	4200	4800	5400	6000	6600	7500	8100	9000
Spannweite:		$3,3^m$	3,6	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
max 𝔐	mit Querschwellen.	10180	11310	13475	16319	20034	23419	28236	33000	38000
	direkt aufliegend.	9900	11267	13500	16333	21000	25500	30000	34500	39000

per Geleise vorhanden sind, so sind diese Werthe zu halbiren; für die auf einen Träger reduzirten Angriffsmomente der Tabellen XXX. ist dann aus Tabelle XXIX. ein passendes Widerstandsmoment auszusuchen, das dem ersteren numerisch gleich sein soll. Hat ein Träger andere Dimensionen, als sein Angriffsmoment verlangt, so lässt sich mit Hülfe der Tabelle XXIX. die grösste Längenspannung schnell auffinden, indem in der genannten Tabelle eine Längenspannung von 600 Kilo angenommen ist und die

Tabelte XXX^a^.

Axbelastung 12 T. Axdistanz $1,5^m$.

Spannweite:		$1,2^m$	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	3,0
max 𝔐	mit Querschwellen.	1650	2643	3587	4500	5390	6164	7552	8400	10080
	direkt aufliegend.	3600	4200	4800	5400	6000	6600	7500	8666	10125
Spannweite:		$3,3^m$	3,6	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7
max 𝔐	mit Querschwellen.	11788	13500	16190	20880	25500	30172	34785	39377	43958
	direkt aufliegend.	11823	14400	18000	22500	27000	31500	36000	40500	45000

Widerstandsmomente der jeweils herrschenden grössten Längenspannung direkt proportional sind.

Die grösste Vertikalkraft findet nicht gleichzeitig Statt, sondern stets dann, wenn das Vorderrad der Lokomotive am Brückenende angelangt ist, während von den übrigen Lokomotivrädern so viele auf der Brücke sich befinden, als die Länge der letzteren gestattet. — Hiernach ist die folgende Tabelle XXXI. für die grössten Werthe der Vertikalkraft 𝔙 berechnet. — Die Axenbelastung der Lokomotive ist wieder 12000^k und die Axendistanz 2^m; die Werthe 𝔙 beziehen sich auf ein Geleise, so dass in der Regel auf einen Träger die Hälfte dieser Last zu rechnen ist.

Tabelle XXXI.

Axbelastung 12^T. Axdistanz 2^m.

Spannweite:	$2,0^m$	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6
Max 𝔙	12000^k	13091	14000	15111	16000	16727	17333
Spannweite:	$4,0^m$	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
Max 𝔙	18000^k	20000	21600	22909	24000	24923	25714

Für alle Weiten unter 2^m ist Max 𝔙 gleich 12000^k per Geleise zu rechnen. Für den Fall einer Axendistanz von nur $1,5^m$, während die Axbelastung 12000^k beträgt, erhält man folgende gleichfalls auf ein Geleise bezogenen Werthe:

Tabelle XXXI a.

Axbelastung 12^T. Axdistanz $1,5^m$.

Spannweite:	$1,6^m$	1,8	2,0	2,2	2,1	2,7	3,0	3,3
max 𝔙	12750^k	14000	15000	15810	16500	17333	18000	19636
Spannweite:	$3,6^m$	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
max 𝔙	21000^k	22500	24000	25200	26182	27000	27692	28285

Für $1,5^m$ und alle geringeren Weiten ist max 𝔙 = 12000^k per Geleise zu rechnen.

In den Tabellen XXXI. und XXXI[a]. ist vorausgesetzt, dass die Träger unmittelbar belastet sind; werden besondere Schwellenträger angewendet, so geht ein Theil der Vertikalkraft durch dieselben direkt auf die Widerlager über; letztere Last muss von den Werthen der Tabelle XXXI. in Abzug gebracht werden.

104. Gusseiserne Träger werden seltener angewendet, da ein Bruch durch Erschütterungen leicht hervorgerufen werden kann und schmiedeiserne Träger sehr billig und in mannigfaltigen Formen hergestellt werden.

Das Gusseisen zeigt die Eigenthümlichkeit, dass der Elastizitätsmodul bei stärkeren Belastungen sich sehr ändert und für Druck und Zug nicht mehr derselbe ist (vergl. Tab. IV. u. V.). Innerhalb den bei Brückenbauten zulässigen Belastungen sind jedoch beide Elastizitätsmodule nahezu gleich und haben wir als Mittelwerth 900000^k per $\square^{cm}$ gesetzt.

Da die absolute Festigkeit des Gusseisens 5—6mal kleiner ist als seine absolut rückwirkende Festigkeit, so kommt bei homogenen Trägern nur erstere in Betracht und lautet hienach Gleichung 31)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a} \Theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 31).$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ gewöhnlich nicht grösser als 200 genommen werden; es gibt jedoch Gusseisen besonders guter Qualität, wo grössere Längen-Spannungen bis zu 250^k per $\square^{cm}$ erlaubt sind.

Da die rückwirkende Festigkeit des Gusseisens die absolute Festigkeit so sehr übersteigt, so gibt man häufig den beiden Flantschen verschiedene Querschnitte, indem man die gedrückte Gurtungsrippe viel kleiner herstellt. — Für solche unsymmetrische Querschnitte mit dünnen Mittelrippen hat E. Hodgkinson folgende empirische Formel gegeben:

$$P = C \frac{ah}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 153);$$

hiebei bezeichnet:

l die Länge eines an beiden Enden frei aufliegenden Stabes,
h die Höhe desselben,
a den Querschnitt der gezogenen Flantsche,
P das Gewicht, das in der Mitte des Stabs wirkend den Bruch hervorbringt,

und ist, wenn alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt ist,

$$C = 4100 \text{ Kilo},$$

woraus Bruchmoment:

$$\mathfrak{M}_0 = 1025 \,.\, a \,.\, h \quad \ldots \ldots \ldots \quad 154)$$

Wenn man von diesem Bruchgewicht wie in Tabelle XII. ein Fünftel als zulässige Last rechnet, so stimmt Gleichung 154) ziemlich gut mit den Resultaten der Gleichung 31), wie auch bei Vernachlässigung der Mittelrippe die Grösse $\frac{\Theta}{a}$ nahezu in den Werth a . h übergeht.

Die Dicke der Mittelrippe bestimmt sich wie beim schmiedeisernen homogenen Träger nach Gleichung 46) und 47) indem für die horizontale Schubspannung in der neutralen Faser ein bestimmtes Mass gesetzt wird.

Bezeichnet

$\mathfrak{S}_0$ die Schubspannung in der neutralen Faser,
δ die Dicke der Mittelrippe,
$\mathfrak{V}$ die zu übertragende Vertikalkraft,
$\mathfrak{H}$ die Distanz der Mittelpunkte von Druck und Zug,

so ist nach Gleichung 46) und 47)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 155).$$

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll bei gewöhnlichem gutem Guss $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 150 genommen werden, woraus folgt

$$\delta \geqq \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \cdot \frac{1}{150} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 156).$$

Es kann bei gleichem Gewicht einem gusseisernen Träger an Last etwa $^1/_3$—$^3/_7$ gegenüber einem schmiedeisernen Träger von gleicher Höhe auferlegt werden.

105. Träger von Gussstahl. Bei dem geringen Preise des Gussstahles (und insbesondere des Bessemer Stahles) hat man bereits angefangen, dieses Material auch bei Brücken-Constructionen anzuwenden. — Da beim Stahl die rückwirkende Festigkeit jedenfalls grösser ist, als die absolute, so hat man zunächst nur letztere ins Auge zu fassen und lautet Gleichung 31) wie beim Gusseisen:

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{a} \cdot \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31).$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll für Bessemerstahl $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 1000 genommen werden, wobei weicher Stahl in Rechnung genommen ist.

Dieser Coefficient entspricht einer Bruchspannung von 5500 Kilo pro □^cm, so dass $\frac{1}{5,5}$ der Bruchbelastung als zulässig angenommen ist. Da für Stahl die Bruchcoefficienten grössere Verschiedenheit zeigen, als für Schmiedeisen, so ist es bei bedeutenden Bauten angezeigt, die Festigkeit des verwendeten Materials durch Versuche zu ermitteln.

Inwieweit die im Vorstehenden angenommene Anstrengung von Trägern aus Bessemerstahl durch die Praxis sich rechtfertigt, wollen wir an einem bestimmten Beispiel zeigen:

Wir haben in Tafel VIII. die Schienen der London-Metropolitan Bahn gezeichnet, deren Trägheitsmoment Θ, und zugehöriges $\frac{\Theta}{a}$ nach dem in N°. **17** angegebenen Verfahren bestimmt wurde, wie das Nähere aus Tafel VIII. ersichtlich ist.

Für eine Belastung, durch welche der Kopf der Schiene auf Zug in Anspruch genommen ist, haben wir gefunden:

$$\mathfrak{M} = 8{,}715\ \mathfrak{A}_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

wo $\mathfrak{A}_0$ die grösste Längenspannung per Quadratzoll bezeichnet und $\mathfrak{M}$ in englischen Zollen ausgedrückt ist; und in ähnlicher Weise, wenn der Fuss auf Zug in Anspruch genommen ist.

$$\mathfrak{M} = 11{,}4\ \mathfrak{A}_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Versuche, welche über die erste Belastungsart angestellt wurden, ergaben bei einer Stützweite von 5 Fuss oder 60 Zoll englisch eine Bruchlast von 22 tons, woraus $\mathfrak{M} = \frac{22 \,.\, 60}{4} = 360$ Zoll tons und $\mathfrak{A}_0 = 38$ tons.

In ähnlicher Weise ergab sich, als der Fuss der Schiene auf Zug in Anspruch genommen wurde, eine Bruchlast von 29,17 tons und hieraus $\mathfrak{A}_0 = 38{,}4$ tons per Quadratzoll, was 6048 Kilo per Quadratcentimeter entspricht.

Der Bruchcoefficient für absolute Festigkeit des fraglichen Materials war übrigens zu 35 tons oder 5512^k per □Centimeter bestimmt worden, wobei zu bemerken, dass weicher Stahl verwendet wurde. (Ueber die Zunahme der Festigkeit gegen Zug bei relativer Festigkeit vergleiche S. 79.)

Bei Belastung der Schienen durch Locomotivaxen von 12 tons Gewicht und unter der Annahme, dass das Material nicht stärker als mit c. 1000^k per Quadratcentimeter oder 7 tons per Quadratzoll englisch in Anspruch genommen sein soll, ergibt sich als freie Auflagerweite l für obige Schienen:

$$l = \frac{7 \,.\, 11{,}4 \,.\, 4}{6} = 53{,}2 \text{ Zoll oder } 4{,}4 \text{ Fuss englisch.}$$

Es ist zu bemerken, dass dieses Resultat sich dadurch modifizirt, dass die Schienenfüsse zu Aufnahme der Befestigungsschrauben durchbohrt sind, worauf in der Rechnung keine Rücksicht genommen ist.

Anmerk. Die Zahlenangaben sind dem Journal *Engineering*, 1868, entnommen, wo auch das Widerstandsmoment in gleicher Weise berechnet ist.

106. Hölzerne homogene Träger haben meist rechteckige Querschnittform, — wodurch Gleichung 31) sich wesentlich vereinfacht.

Bezeichnet
h die Höhe des Trägers,
b die Breite desselben,
$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment,
$\mathfrak{A}$ die grösste Längenspannung,
so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}}{{}^1/_6 bh^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 157).$$

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 70^k genommen werden. — Es ist dies übrigens ein Mittelwerth, da die Hölzer nach Gattung, Behandlung und Alter verschiedene Festigkeit haben; es ist angenommen, dass $^1/_{10}$ der Bruchfestigkeit durch die zulässige Belastung erreicht werde.

Für Hölzer, welche den Einflüssen der Witterung ausgesetzt sind, wie nicht bedeckte Brücken, Gerüste etc., ist es rathsam, den Coefficienten noch weiter zu ermässigen, etwa auf 60 Kilo pro $\square^{cm}$, vergleiche hierüber die Bemerkung S. 78.

§. 12. Die Blechwandbrücken.

107. Die Blechwandbrücken unterscheiden sich von den schmiedeisernen homogenen Trägern hauptsächlich dadurch, dass sie aus einzelnen Theilen — Wandblechen, Kopfblechen, Winkeln etc. — zusammengesetzt sind; in Folge dessen ist ihre Anfertigung bezüglich Grösse und Form beinahe unbeschränkt; sämmtliche Theile können meist gerade so stark gewählt werden, als ihre Bestimmung es nothwendig macht.

Zur Bestimmung der Stärke der Gurtungen und Wandbleche dienen bei horizontal und geradlinig begränzter Trägerform dieselben Formeln wie für die homogenen Träger.

Bezeichnet für einen Querschnitt x:
$\mathfrak{M}$ das Angriffsmoment der äussern Kräfte,
$\mathfrak{V}$ die Vertikalkraft,
$\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) die grösste horizontale Längenspannung (Pressung) in den äussersten Fasern,
$\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) den Abstand der äussersten gespannten (gepressten) Längenfasern von der neutralen Schichte,
$\mathfrak{a}_0$ ($\mathfrak{b}_0$) den Abstand des Schwerpunkts der gezogenen (gepressten) Gurtung von der neutralen Schichte,
$\mathfrak{H}_0$ die Distanz der beiden Gurtungsschwerpunkte,
$\mathfrak{H}$ die Distanz der Mittelpunkte von Druck und Zug,
Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts,
δ die Dicke des Mittelwandbleches,
Ω^a (Ω^b) den Querschnitt der gezogenen (gedrückten) Gurtung,
$\mathfrak{S}_0$ die Schubspannung in der neutralen Faser,

so ist nach Gleichung 31)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\Theta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 31).$$

Die Bestimmung des Trägheitsmoments Θ ist bei complicirteren Querschnitten oft sehr zeitraubend; es wird daher mit Vortheil die Näherungsformel aus N°. **95** angewendet:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{a}_0\,(\Omega_a + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{a}_0)\\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{H}_0\,\mathfrak{b}_0\,(\Omega_a + {}^1/_3\,\delta\mathfrak{b}_0)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 150).$$

Gemäss Gleichung 31) darf $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$ jederzeit durch $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$ ersetzt werden und umgekehrt; bei ganz oder nahezu symmetrischen Querschnitten ist diese Näherungsformel vollständig genau, und geht in die Gleichung über:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\frac{\mathfrak{H}_0{}^2}{H}\,(\Omega_a + {}^1/_6\,\delta\mathfrak{H}_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 158).$$

welche Gleichung mit Formel 152ᵃ) identisch ist.

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht grösser als 600 Kilogramm genommen werden,

Anmerkung. Dies gilt auch, wenn alle Längen und Höhen, und somit auch $\mathfrak{M}$ in Metern (oder überhaupt andern Längenmassen) ausgedrückt sind, wenn nur die Ausdrücke $(\Omega^a + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{a}_0)$ und $(\Omega^b + \frac{1}{3}\,\delta\mathfrak{b}_0)$ nach Centimetern berechnet sind.

Zur Bestimmung der Dicke der Mittelrippe hat man nach N°. **99** Gleichung 148)

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}\,\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 148),$$

wobei wir auf die Bestimmung von $\mathfrak{H}$ in N°. **99** verweisen.

Ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 350 genommen werden. Hieraus folgt

$$\delta \geqq \frac{1}{350}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 149).$$

108. Bei Trägern mit gebogenen oder überhaupt nicht parallelen Gurtungen müssen obige Formeln einige Modificationen erleiden, indem wir uns einen Querschnitt denken, der auf allen Längenfasern normal steht. — Bezeichnen wir mit

Q' die Kraft in der gezogenen Gurtung,
Q_y' die vertikale Composante dieser Kraft,
α' den Winkel, den die gezogene Gurtung mit dem Horizont bildet,
Ω_a den Querschnitt der gezogenen Gurtung senkrecht zur Gurtungsrichtung,

und ebenso

Q'' die Kraft in der gedrückten Gurtung,

Q_y'' die vertikale Composante dieser Kraft,

α'' den Winkel, den die gedrückte Gurtung mit dem Horizont bildet,

$\Omega_\mathfrak{b}$ den Querschnitt der gedrückten Gurtung senkrecht zur Gurtungsrichtung,

so ist nach Gleichung 150), indem der Hebelsarm der Zugresultante $= \mathfrak{H}_0 \cos \alpha'$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \mathfrak{H}_0 \cos \alpha' (\Omega_\mathfrak{a} + {}^1/_3 \delta \mathfrak{a}_0) \quad . \; . \; . \; . \quad 159),$$

ferner ist

$$Q' = \Omega_\mathfrak{a} . \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

und folgt aus I. und 159)

$$Q' = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha'} - \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0 \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \mathfrak{A} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

$$Q_y' = \sin \alpha' \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha'} - \frac{1}{3} \delta \mathfrak{a}_0 \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \mathfrak{A} \right\} \quad . \; . \quad \text{III.}$$

und ebenso ist (nach Gleichung 150)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \mathfrak{H}_0 \cos \alpha'' (\Omega_\mathfrak{b} + {}^1/_3 \delta \mathfrak{b}_0) \quad . \; . \; . \quad 159^a)$$

$$Q'' = \Omega_\mathfrak{b} \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

wonach aus 159ª) und IV. folgt:

$$Q'' = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha''} - \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0 \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \mathfrak{B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{V.}$$

$$Q_y'' = \sin \alpha'' \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}_0 \cos \alpha''} - \frac{1}{3} \delta \mathfrak{b}_0 \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \mathfrak{B} \right\} \quad . \; . \quad \text{VI.}$$

Die bestehende grösste Gurtungsspannung $\mathfrak{A}$ (oder Pressung $\mathfrak{B}$) wird nach obiger Gleichung 159), beziehungsweise 159ª) berechnet; ist alles in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückt, so soll $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht grösser als 700 genommen werden.

Zur Bestimmung der Schubspannung in der Wand müssen die vorstehend entwickelten Gleichungen IV. und VI. zu Hilfe genommen werden.

Da nämlich ein Theil der Vertikalkraft durch die vertikalen Composanten der Gurtungskräfte aufgenommen wird, so ist die durch die Schubkräfte des Vertikalschnittes aufzunehmende Kraft $\mathfrak{V}_1$ um so viel kleiner, und zwar ist

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V} - Q_y' - Q_y'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{VII.}$$

woraus für die horizontale Schubkraft in der neutralen Faser folgt:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V} - Q_y' - Q_y''}{\mathfrak{H}\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 160)$$

wo Q_y' und Q_y'' aus obigen Gleichungen III. und IV. zu entnehmen sind.

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{S}_0$ nicht grösser als 350 sein, wornach

$$\delta \geqq \frac{1}{350} \frac{\mathfrak{V} - Q_y' - Q_y''}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 161).$$

Bei Bestimmung der Wanddicke müssen gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ in Rechnung genommen werden, da letztere Grösse für die Werthe Q′ und Q″ massgebend ist.

109. Bei den vorstehenden Regeln ist durchaus vorausgesetzt, dass die Abzüge für die Nietlöcher oder ungenügende Stossverbindungen bereits vorgenommen worden sind. — Im Allgemeinen ist hiebei auf die Zusammenstellung in N°. **54** zu verweisen, wo die Regeln über Nietverbindungen kurz zusammengefasst sind, es lassen sich jedoch einige weitere Betrachtungen anreihen.

Die Nieten, mit denen die einzelnen Theile der Gurtungen verbunden werden, werden schon dieses Zweckes halber meist so nahe zusammengerückt und von solcher Stärke hergestellt, dass an den Stössen kaum eine weitere Verschwächung nothwendig wird. — Dies kann insbesondere noch dadurch erreicht werden, dass die Nieten zunächst dem Stossplattenrande ganz gleich den auf die ganze Länge durchlaufenden Nieten hergestellt werden und erst die innern Nietreihen — welche nicht mehr die ganze Kraft zu übertragen haben, mit stärkern oder zahlreichern Nieten versehen werden; für die Verschwächung des gestossenen Bleches ist nur die dem Stossplattenrande zunächst befindliche Nietreihe massgebend (siehe N°. **54**).

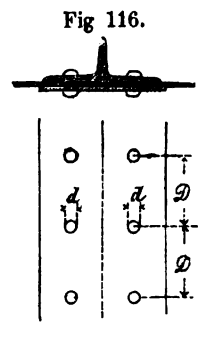
Ob ein beliebiger Stoss genügend hergestellt ist, wird nach Anleitung von N°. **54** untersucht; im Allgemeinen soll Stossplatte oder Niete nicht mehr in Anspruch genommen sein, als das gestossene Blech; ist jedoch letzteres stärker als nothwendig wäre, so genügt für den Stoss die der Widerstandsfähigkeit des Nietbolzenmaterials entsprechende Stärke.

Die Stösse der Blechwand erfordern eine besondere Beurtheilung. — Die Stärke der Blechwand, wie sie nach den Formeln 149) und 161) sich ergiebt, ist meist geringer, als in der Ausführung rathsam erscheint; mit Rücksicht auf das Einknicken zu dünner Bleche sowie auf die Witterungseinflüsse darf unter ein gewisses Minimum (das mit der Trägerhöhe wechselt) nicht gegangen werden; im Allgemeinen wird nur bei kleinen oder sehr grossen Brücken die Dicke der Mittelrippe genau nach der Gleichung 149) bemessen werden können; in den meisten Fällen hat also die Wand eine übermässige Stärke gegen Abscheeren. —

Es kann aber ganz allgemein der für einen vertikalen Wandstoss nothwendige Nietenabstand unabhängig von der Blechwanddicke berechnet werden. — Es ist hiefür die horizontale Schubkraft in der neutralen Faser massgebend (nach Gleichung 48 ist in demselben Wandelement horizontale und vertikale Schubkraft per Längeneinheit gleich gross). — Die horizontale Schubkraft in der neutralen Faser ist nach Gleichung 46) per Längeneinheit:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 46)$$

Fig 116.



wo $\mathfrak{H}$ den Abstand der Mittelpunkte von Druck und Zug des ganzen Querschnitts bezeichnet. Diese Kraft nimmt bis zu den Gurtungen hin wenig ab und wird daher auf die ganze Höhe constant angenommen; es muss daher diese Kraft durch die per Längeneinheit angebrachten Wandnieten übertragen werden; diese Nieten sind als doppelschnittig zu rechnen, da stets beiderseits Stossplatten (oder ⊤Eisen) angebracht sind; bezeichnet

d den Durchmesser der Nietbolzen,
$\mathfrak{C}$ die zulässige Schubspannung derselben,
n die Anzahl der Nieten per Längeneinheit,

D die Distanz der Nieten, welche $\frac{1}{n}$ der Längeneinheit beträgt,

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &= \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{H}} = 2n. \frac{d^2\pi}{4} . \mathfrak{C} \\ D &= \mathfrak{C} \frac{2\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} . \frac{d^2\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 162).$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{C}$ nicht grösser als 600 genommen werden. (Es ist gestattet, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$ gleichzeitig anstatt in Centimetern in andern Maassen, z. B. in Metern auszudrücken.) Hiebei ist jedoch sehr gutes Nieteisen und gute Ausführung vorausgesetzt.

Wird die Stärke der Blechwand durch den Widerstand gegen Abscheeren bedingt, somit nach Formel 149) bestimmt, so ist für die Verschwächung durch die Nieten ein Zuschlag in der Blechdicke zu geben, den wir uns durch eine vorläufige Rechnung gemacht denken; diese Rechnung geschieht dadurch, dass man Entfernung, beziehungsweise Durchmesser der Nieten nach Gleichung 162) aufsucht. Ist nun die Dicke des Bleches (unter Berücksichtigung der Abzüge der Nietlöcher) nach

Gleichung 149) berechnet, so kann hieraus der Abstand der Nieten direkt gefunden werden; da nämlich in letzterer Formel 149) die Wanddicke so bemessen ist, dass die Schubspannung im Blech 350 K. beträgt, während für die Niete 600 Kilo pro □^{cm} zulässig ist, so ist auf die Distanz D zweier Nieten (unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen)

Widerstand eines

$$\text{Nietbolzen} = 2 \,.\, 600 \,.\, \frac{d^2 \pi}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Widerstand des zwischen liegenden

$$\text{Wandtheils} = (D - d)\,\delta \,.\, 350 \quad \ldots\ldots \quad \text{II.}$$

und folgt aus I. und II.

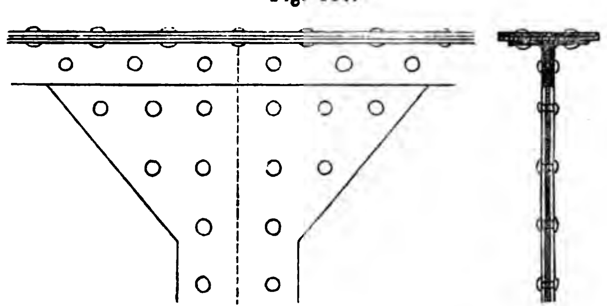
$$D = \frac{\pi d^2 + 1{,}16\,\delta\, d}{1{,}16\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 163).$$

Ist z. B. $d = 2\delta$, so folgt $D = 6{,}3d$, so dass in diesem Falle das Blech um $\frac{1}{6{,}3}$ verschwächt wird. — Die Gleichungen 162) und 163) geben denselben Abstand D, wenn der Nietendurchmesser d beidemale gleich gross ist, vorausgesetzt, dass in letzterem Falle δ nach Gleichung 149) berechnet ist.

In der Nähe der Gurtungen sind vorstehende Betrachtungen nicht mehr zutreffend, indem daselbst die Wand die Längenspannung der Gurtung mitmachen muss und dieselben Nieten, welche nach Vorstehendem die Schubkraft der Wand aufzunehmen haben, ausserdem durch die Längenspannung in Anspruch genommen sind; es sollen desshalb da, wo Gurtung und Wand gleichzeitig vollständig in Anspruch genommen sind, die Stösse der Wandbleche beiderseits doppelte Nietreihen erhalten.

Diese doppelten Nietreihen sind allerdings zunächst nur in der Nähe der Gurtung nothwendig; hieraus erklärt sich die in Figur 117 skizzirte, schon mehrfach angewendete Anordnung,

Fig. 117.



welche übrigens in der Ausführung kostspielig wird, falls man nicht etwa bei höheren Blechen die Stossplatten aus mehreren Stücken zusammensetzt. —

110. Die Nieten, mittelst welchen die Blechwand mit der Gurtung verbunden ist, haben die daselbst herrschende Schubkraft zu übertragen; diese Schubkraft berechnet sich nach Gleichung 45); die Anwendung dieser Gleichung ist jedoch etwas umständlich; wir haben diese Schubkraft für 2 Beispiele gerechnet (vergl. Tafel I. und VII. und N°. **27** und **28**) und gefunden, dass die Schubspannung zunächst der Gurtung, gegenüber der horizontalen Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser beträgt:

für eine Brücke von 15^m Spannweite . . . 0,735—0,8 $\mathfrak{S}_0$

für eine Brücke von 3 Oeffnungen von 67^m mittlerer Spannweite (Langonbrücke) . . 0,817 $\mathfrak{S}_0$

Man wird im Allgemeinen nicht zu weit gehen, wenn man die Schubspannung zunächst der Gurtung $^4/_5$ der Schubspannung in der neutralen Faser annimmt und demgemäss für die grösste zulässige Entfernung D, der Nieten, welche die Wand mit der Gurtung verbinden, $^5/_4$ derjenigen Entfernung annimmt, welche nach Gleichung 163) für die Nietenentfernung der übrigen Wandfläche berechnet wird, woraus folgt:

$$D_{,} = 1{,}25 \,.\, \mathfrak{C} \,.\, \frac{2\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} \,.\, \frac{d^2\pi}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 164).$$

Ist alles in Centimetern und Kilogrammen ausgedrückt, so soll $\mathfrak{C}$ nicht grösser als 600 genommen werden.

111. Da die Blechwände einen starken Druck auszuhalten haben, so müssen sie, insofern sie gegenüber ihren Längen- und Breitendimensionen verhältnissmässig geringe Metalldicke haben, durch besondere Absteifungen gegen Einknicken oder Ausbauchen geschützt werden. Es ist dies insbesondere dann nothwendig, wenn die Wanddicke auf das durch die Formel bestimmte Maass beschränkt ist.

In der Regel geschieht die Absteifung der Blechwände durch Vertikalstützen, welche aus Winkeln, ⊤Eisen oder Combinationen verschiedener Blechsorten bestehen. — Bei der Britanniabrücke wurde die Entfernung der 20—26′ hohen ⊤förmigen Rippen zu 2′ engl. angenommen; bei der Brücke von Langon wurde bei $5{,}5^m$ Wandhöhe die Distanz der Vertikalrippen auf $0{,}86^m$ bemessen; bei geringerer Trägerhöhe darf die Distanz der Vertikalrippen grösser genommen werden und wird die von Gurtungen und Rippen eingeschlossene freie Wandfläche für jede Blechdicke eine bestimmte Zahl Quadrateinheiten messen dürfen.

Bei grösseren Trägern, wo die Distanz der Vertikalrippen kleiner ist, dient es wesentlich zur Materialersparniss, wenn zwischen einzelnen stärkeren Ständern schwächere Rippen verwendet

werden; die stärkeren Ständer dienen insbesondere zur Befestigung der Querträger und werden häufig durch die Befestigung der letzteren bedingt; in der Praxis handelt es sich somit oft darum, ob zwischen den durch die Querträger bestimmten Ständern eine oder mehrere Vertikalrippen nothwendig werden.

Wenn zunächst nur die obere Gurtung eines Trägers belastet ist, so muss die Hälfte der Belastung durch die Wand auf die untere Gurtung übertragen werden, was ein weiterer Grund des Ausbauchens dünner Wände ist. — Zur Uebertragung dieser Kräfte können aber wiederum dieselben Vertikalrippen dienen oder nach Umständen hiezu besonders angeordnet werden; so z. B. bei Querträgern, welche durch die Fahrbahn in bestimmten Punkten belastet werden und dann gerade hier ihre Vertikalrippen erhalten.

Besondere Betrachtungen erfordern die Endständer. Dieselben haben die in der Wand nach allen Richtungen thätigen (theilweise jedoch sich gegenseitig neutralisirenden) Kräfte aufzunehmen und deren vertikale Composante auf die Auflager zu übertragen. Ist an jedem Ende ein einziger Endständer vorhanden, so hat derselbe in seinem unteren Theile die gesammte Vertikalkraft, beziehungsweise den Auflagerdruck aufzunehmen; hienach ist also der Querschnitt zu berechnen (da wir im Früheren die Vertikalkräfte stets für ein Geleise berechnet haben, so müssen dieselben zunächst je auf einen Träger reduzirt werden). Auf die Breite des Endständers darf ein entsprechender Theil der Mittelwand dem Endständer zugerechnet werden. Die Breite der letztern soll übrigens, wie in N°. **93** dargelegt, thunlich eingeschränkt werden.

Sind mehrere Endständer vorhanden, so entsteht sofort Unsicherheit darüber, wie die Vertikalkraft sich unter die einzelnen Ständer vertheilt: Frei aufliegende Träger haben in Folge der Durchbiegung des Trägers das Bestreben, auf die Auflagerkante zu drücken, wodurch die der Auflagerkante nahe liegenden Endständer mehr belastet werden als die übrigen. Bei continuirlichen Trägern endlich würde bei Anwendung von 2 Endständern auf den Mittelpfeilern in Folge wechselnder Belastung der einzelnen Oeffnungen nur je der eine belastet, der andere ganz entlastet sein (vergl. N°. **93**). Es ist desshalb zu empfehlen, die Endständer nur je einfach zu construiren, man ist dann über den Angriffspunkt der Auflagerreaction nicht im Zweifel, und ist eine sicherere und gleichmässigere Vertheilung des Druckes auf die Auflager möglich, als im andern Fall.

Wo die Endständer ganz fehlen, da hat die Wand auf die Auflagerbreite den ganzen Druck selbst aufzunehmen; wenn dieser Druck zudem ungleich vertheilt ist, z. B. vorzugsweise auf die Kante wirkt, wird leicht ein Ausbiegen der Wand eintreten; bei grösseren Trägern sind daher die Endständer unentbehrlich; ebenso

muss eine ungenügende Stärke der Endständer als ein entschiedener Constructionsfehler bezeichnet werden.

Bei den Blechwandbrücken werden die Endständer durch aufgenietete Winkel und ⊤Eisen gebildet, wobei derjenige Theil der Mittelwand, der direkt über der Auflagerfläche sich befindet, zum Querschnitt des Endständers zu rechnen ist. — Selbstverständlich sind auch hier die nothwendigen Abzüge für die Nietlöcher zu machen.

Die Endständer sind, insbesondere bei bedeutenden Spannweiten, auch erheblichen horizontalen Anstrengungen ausgesetzt, sobald die horizontalen Windverstrebungen sich nicht in der Ebene der unteren Gurtung, sondern oberhalb der letzteren befinden. Man hat zu diesem Zwecke die Kräfte zu berechnen, welche die Windverstrebung aufzunehmen hat, und findet hieraus die dem Auflagerdruck analoge, auf den Endständer in horizontalem Sinne wirkende Resultante, welche eine Verwindung des Brücken-Querschnitts am Auflager anstrebt. Wenn die Fusspunkte der Endständer als feststehend betrachtet werden dürfen, so werden die letzteren durch die Wirkungen der horizontalen Composanten der Windstösse etc. auf relative Festigkeit in Anspruch genommen. Bei grösseren Trägerhöhen, wo in der Höhe der oberen Gurtung eine zweite Horizontalverstrebung nothwendig wird (wie dies übrigens mehr bei Fachwerksbrücken, als bei Blechwandbrücken eintritt), sind die beiderseitigen Träger, beziehungsweise Endständer am Auflager durch geeignete Querverbindungen zu einem unverrückbaren Viereck zu vereinigen. Liegt jedoch die Fahrbahn zwischen beiden Gurtungen, so kann mit Rücksicht auf die Passage der Fuhrwerke eine etwaige Einschaltung fester Dreiecke nicht erzielt werden, und muss dann der Querschnitt der Endständer so angeordnet werden, dass sie mittelst ihrer relativen Festigkeit die Unverrückbarkeit des Brücken-Querschnitts herstellen.

112. Bei den kleineren Spannweiten bis 7^m haben wir es vorzugsweise mit Lastzügen aus concentrirten Lasten zu thun und sind für die Bestimmung von Max $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ die Regeln massgebend, die wir in N°. **102** für homogene Träger entwickelt haben. Wir haben in den Tabellen XXX. und XXXI. die Maximalwerthe für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ für verschiedene Radbelastungen und Radstände zusammengestellt, für die Berechnung besonderer Fälle dienen die im 3ten Abschnitt in N°. **63** bis **66** und **102** gegebenen Regeln.

Für die grössern Spannweiten haben wir oben in N°. **63** bis **67** nachgewiesen, dass im Allgemeinen die concentrirten Lasten der Bahnzüge mit grosser Annäherung durch eine gleichförmig vertheilte Last ersetzt werden können, wodurch man im Stande ist, die Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ für jeden Querschnitt schnell aufzufinden. Wir haben als Aequivalent eines Eisenbahntrains die

gleichförmigen Belastungen q und q_1 berechnet, von denen erstere (q) der Totalbelastung der ganzen Brücke entspricht und vorzugsweise bei Berechnung der 𝔐 in Betracht kommt. Man berechnet die der Maximallast entsprechenden Werthe 𝔐 und 𝔙 aus Gleichung 92ª) und 93ª); der absolut grösste Werth von 𝔐 ist $= \frac{ql^2}{8}$. Der Werth q_1 entspricht der grössten einseitigen Belastung und dient vorzugsweise zur Bestimmung der Vertikalkräfte (nach Gleichung 96), die zugehörigen 𝔐 findet man sodann aus Gleichung 97).

Handelt es sich sodann um einseitige Belastungen, die zwischen der grössten einseitigen Belastung (Belastung der einen Brückenhälfte) und der Totalbelastung in der Mitte liegen, so ist die Regel der N°. **67** massgebend, welche durch die Fig. 94 genügend erklärt ist und welche für jede Abscisse das in Rechnung zu stellende stellvertretende q_1 leicht auffinden lehrt.

Es sind nun die Werthe von q (Totallast) und q_1 (grösste einseitige Belastung) für den frei aufliegenden Träger in den Tabellen XVI. und XVII. für verschiedene Spannweiten zusammengestellt und lassen sich in der oben angegebenen Weise die Werthe 𝔐 und 𝔙 für jeden Querschnitt leicht berechnen. Im Uebrigen geben die graphischen Darstellungen der Tafel II. eine übersichtliche Anschauung der Aenderungen der Werthe 𝔙 und 𝔐 für verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$.

Soweit concentrirte Lasten durch eine gleichförmig vertheilte Last nicht ersetzt werden können, hat man sich der Gleichungen 100) bis 102) der N°. **63** zu bedienen unter Berücksichtigung derjenigen Laststellungen, welche die Max von 𝔐 und 𝔙 hervorbringen (vergl. N°. **66** und **67**).

Bei continuirlichen Trägern sind in gleicher Weise wie beim frei aufliegenden Träger die Werthe von q und q_1, welche als Aequivalent für einen Eisenbahnzug sich ergeben, ebenfalls der Tabelle XVI. oder XVII. zu entnehmen; wir haben in N°. **82** nachgewiesen, dass für continuirliche Träger mit genügender Annäherung dasselbe stellvertretende q und q_1 eingeführt werden kann, wie für frei aufliegende Träger von gleicher Spannweite.

Man bestimmt sodann zunächst die Momente auf den Mittelpfeilern für 2 Oeffnungen nach Gleichung 116), für 3 Oeffnungen nach Gleichung 126), die Werthe von $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{V}_x$ im beliebigen Querschnitt ergeben sich sodann aus den Gleichungen 117) bis 120) für 2 Oeffnungen, resp. Gleichung 127) bis 131) für 3 Oeffnungen.

Zu Berechnung der 𝔐 ist in diese Gleichungen der Werth von q, für Berechnung von 𝔙 aber q_1 einzusetzen; für continuirliche Träger grosser Spannweiten, bei welchen q_1 von q nicht

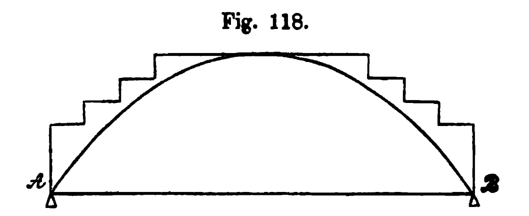
bedeutend abweicht, genügt es meist, die Rechnung nur mit dem der Totallast entsprechenden q durchzuführen.

Schliesslich sind dann bezüglich der $\mathfrak{V}$ die in N°. **81** und **88** am Schluss namhaft gemachten Correcturen anzubringen, welche theilweiser Belastung der Oeffnungen Rechnung tragen.

Sind continuirliche Träger mit kleiner Spannweite zu verwenden, so thut man besser, einen bestimmten Bahnzug als Belastung anzunehmen; die N°. **82** giebt genügende Anhaltspunkte, wie solche Rechnungen durchzuführen sind, und ist die Operation einer geringen Anzahl concentrirter Lasten ohne besondere Schwierigkeit durchzuführen.

Wenn die einzelnen Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ für sämmtliche Querschnitte bekannt sind — zu welchem Zwecke graphische Darstellungen wie in den Tafeln II—V. hergestellt werden — so werden die Gurtungs-Querschnitte und Blechwanddicken nach den praktischen Formeln 143), 150) und 152), sowie gebogene Gurtungen nach den Formeln 159) und 161) berechnet. — Durch passende Wahl der Gurtungs-Querschnitte kann erreicht werden, dass dasselbe Maximum der Längenspannung auf die ganze Trägerlänge stattfindet; man ändert den Gurtungs-Querschnitt in der Regel dadurch, dass man mehr oder weniger Kopfbleche oder auch der Reihe nach stärkere oder schwächere Winkel oder Kopfbleche anbringt; die Aenderung des Gurtungs-Querschnitts geschieht hiebei staffelförmig, während die Angriffsmomente sich bei gleichförmig vertheilter Ueberlast stetig ändern; eine staffelförmige Darstellung der Werthe der aufeinander folgenden Gurtungs-Querschnitte wird sich bei horizontalen geradlinigen Gurtungen der Parabel der grössten Angriffsmomente möglichst anzuschliessen haben und zwar so, dass die Längenspannung des mittelsten Querschnitts nirgends überschritten wird (vergl. Fig. 118); es ist

Fig. 118.

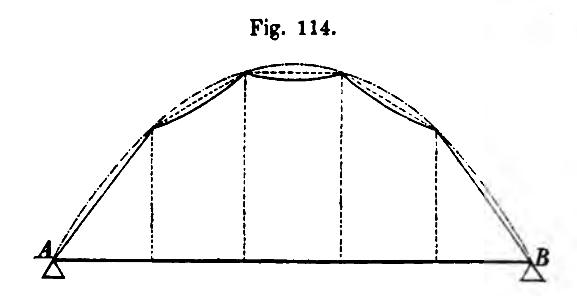


wünschenswerth, wenn die Längenspannung in den übrigen Querschnitten, zumal gegen die Auflager hin, etwas kleiner wird, weil hier die grösste schiefe Wandspannung — welche die grösste Längenspannung nicht überschreiten soll — durch verhältnissmässig grössere Vertikalkräfte beeinflusst wird.

113. Bei grösseren Brücken liegen die Lasten gewöhnlich nicht direkt auf dem Hauptträger auf, sondern sind besondere

Querträger zur Aufnahme der Verkehrsbelastung vorhanden, so dass die Hauptträger nur an einzelnen Punkten, den Knotenpunkten, die zufällige Last aufnehmen. Zwischen den Querträgern müssen die Lasten durch Zwischenträger (Schwellenträger *Poutrelles*) aufgenommen werden, welch letztere in Folge dessen mit einem Theil des Angriffsmoments behaftet sind, in den Hauptträgern ist das Moment dann um so viel kleiner. Wenn die Längenträger in den Knotenpunkten frei aufliegen, so lässt sich leicht beweisen, dass das in den Knotenpunkten herrschende Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ des Hauptträgers dasselbe ist, wie wenn die Lasten auf dem Hauptträger selbst aufliegen würden. — Wir haben schon oben in N°. **102** bei Behandlung der homogenen Träger erwähnt, dass wir bezüglich der Maximal-Momente, welche bei wechselnder Verkehrslast in jeden Querschnitt eintreten, uns auf die Knotenpunkte beschränken können, weil, wie aus Fig. 114

Fig. 114.



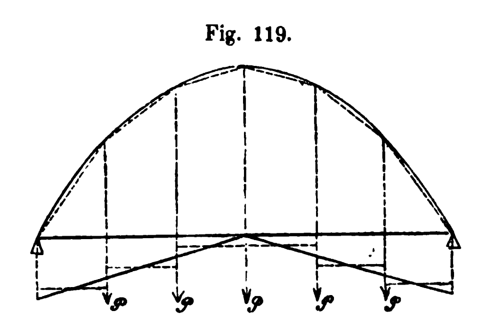
hervorgeht, für die zwischen den Knotenpunkten liegenden Abscissen max $\mathfrak{M}$ stets kleiner bleibt, als für den Fall direkter Auflage der Lasten auf dem Hauptträger. Will man die Maxima $\mathfrak{M}$ zwischen den Knotenpunkten darstellen, so genügt es mit grosser Annäherung die Maxima $\mathfrak{M}$ der Knotenpunkte durch gerade Linien mit einander zu verbinden. Das so entstehende Polygon stellt dann die Umhüllungslinien der max $\mathfrak{M}$ vor, wenn die Last nur an den Knotenpunkten auf die Hauptträger übergeht.

Nachdem wir nun für die grösseren Spannweiten der Belastung durch einen Bahnzug als Aequivalent eine gleichförmig vertheilte Last q substituirt haben, vereinfacht sich die Construction der Umhüllungslinien max $\mathfrak{M}_x$ weiterhin, wir haben einfach eine Parabel aufzutragen, deren mittlere Ordinate $= \frac{ql^2}{8}$ und die Schnitte mit den durch die Knotenpunkte gezogenen Abscissen durch gerade Linien zu verbinden, wie dies in Fig. 119 geschehen ist.

Die Kurve der Vertikalkräfte geht durch den Einfluss der Querträger in eine staffelförmige Linie über, indem $\mathfrak{V}$ auf die

Distanz zwischen zwei Querträgern constant bleibt, und zwar gleich demjenigen $\mathfrak{V}$ ist, welches für die Mitte des betrachteten Trägerfeldes ohne Berücksichtigung der Querträger bestimmt wurde.

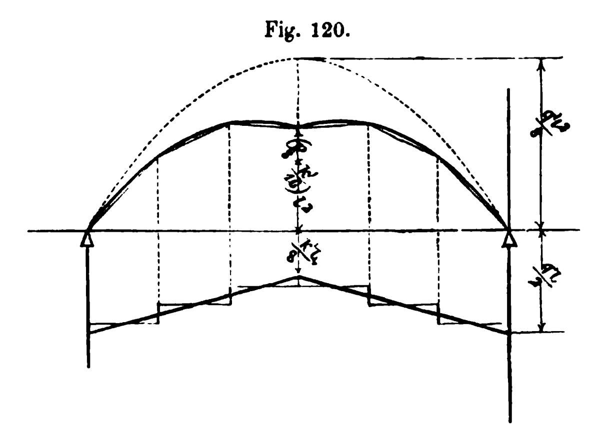
Fig. 119.



Diese Modification der Kurve $\mathfrak{V}$ ist gleichfalls in Fig. 119 eingetragen.

Fig. 120 stellt in ähnlicher Weise den Einfluss der Querträgerbelastung bei der grössten einseitigen Belastung dar, wobei sämmtliche max $\mathfrak{V}$ nach Gleichung 96) und 96ª) und je gleichzeitige $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 97) und 97ª) bestimmt sind; zur Con-

Fig. 120.



struction der Kurven $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ können übrigens in vielen Fällen die graphischen Darstellungen der Tafel II. dienen, wo 6 verschiedene Verhältnisse $\frac{p}{q}$ zu Grunde gelegt, die einzelnen Ordinaten aber aus Tabelle XV. ersichtlich sind.

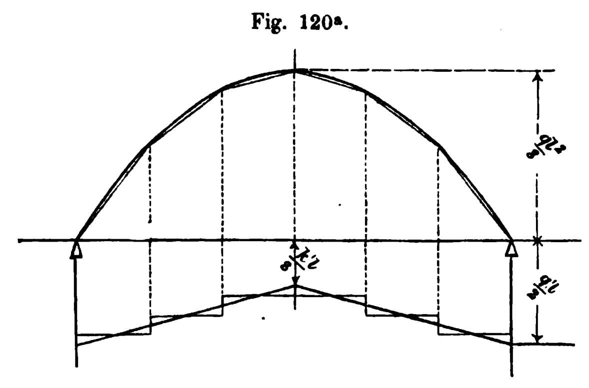
Wir machen aufmerksam, dass in Fig. 120 die Grössen q' und k' eingeführt sind, welche der einseitigen Belastung ent-

sprechen (vergl. Tabelle XVI. und XVII.) und stets erheblich grösser sind als q und k. — (Zu vergleichen N°. **111.**)

In der Regel handelt es sich aber bei den Blechwandbrücken nicht um gleichzeitige Werthe von 𝔐 und 𝔙, sondern es dienen zur Bestimmung der Gurtungsstärke im allgemeinen die grössten Werthe von 𝔐, zur Bestimmung der Mittelwanddicke die grössten Werthe von 𝔙.

Es sind daher in Fig. 120ª diese Maximalwerthe aus Fig. 119 und Fig. 120 zusammengestellt (indem max 𝔐 aus Fig. 119, und max 𝔙 aus 120 entnommen wurde).

Fig. 120ª.



Die polygonförmige Kurve 𝔐 und die treppenförmige Kurve 𝔙 in Fig. 120ª geben mittelst Abgreifen mit dem Zirkel direkt die in die praktischeu Formeln einzusetzenden Werthe von 𝔐 und 𝔙; man kann aber auch die Lasten nach dem Hebelgesetz auf die Querträger vertheilen und alsdann nach den Gleichungen 100) bis 102) die 𝔐 und 𝔙 für Maximallast und grösste einseitige Last unmittelbar bestimmen: das Resultat muss dasselbe bleiben, wie wenn man die einzelnen 𝔐 und 𝔙 zuerst für das ganze System berechnet und die auf die Zwischenträger fallenden Δ𝔐 und Δ𝔙 nach Anleitung der Figuren 119, 120 und 120ª ausgeschieden hätte. —

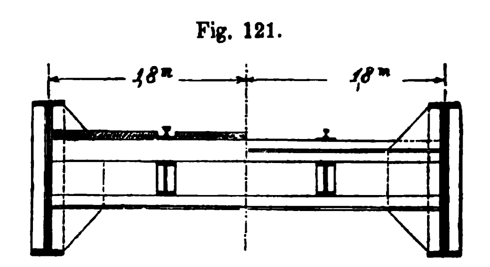
§. 13. Blechbalkenbrücke von 15m Spannweite.

114. Als Beispiel einer Blechbalkenbrücke wählen wir eine Eisenbahnbrücke, deren Geleise mittelst Schwellenträgern auf den Querträgern aufliegt, welche Anordnung aus umstehender Fig. 121 ersichtlich ist, während die genauen Ausmasse und Constructionsdetails auf Tafel VI. dargestellt sind.

Das Eigengewicht p der Brücke wurde zu 1075k per Meter angenommen, indem in Gleichung 105) l = 32 gesetzt worden

ist; es wurde sodann die gleichförmig vertheilte Maximallast k = 4750 k, die einseitig wirkende auf einen Theil der Länge gleichmässig vertheilte Last k' = 6080 k angenommen, welche Belastungen der Anwendung schwerer Güterzug-Maschinen ent-

Fig. 121.



sprechen. — Nach Vorstehendem ist q = p + k = 5825 und q' = p + k' = 7155 Kilo.

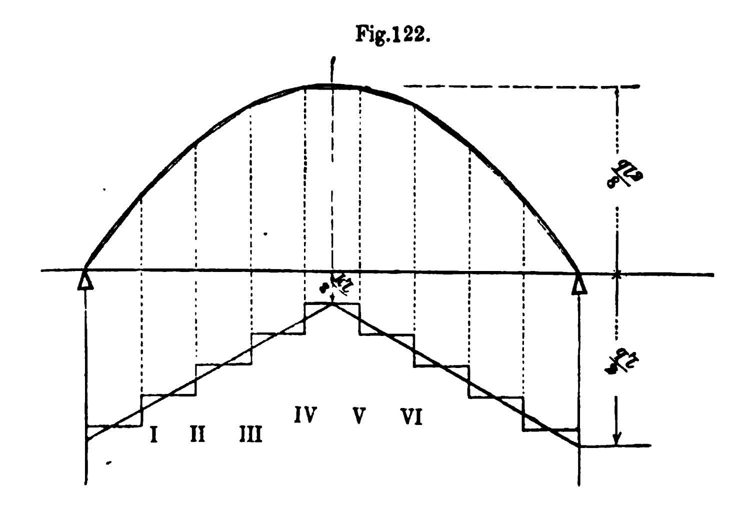
Indem man nun in Fig. 122, oberhalb der Abscissenaxe die Maxima 𝔐, und unterhalb die Maxima 𝔙 aufträgt, die Eintheilung in 9 Felder anbringt und nach Anleitung von Fig. 120a die entsprechende Modification der Kurven 𝔐 und 𝔙 vornimmt, ferner nach vorstehenden Zahlenangaben die Werthe:

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{5825 \cdot 225}{8} = 163828^{km}$$

$$\frac{q'l}{2} = \frac{7155 \cdot 15}{2} = 53662{,}5^{km}$$

$$\frac{k'l}{8} = \frac{6080 \cdot 15}{8} = 11400{,}0^{km}$$

Fig.122.



ausrechnet, so erhält man aus Fig. 122, auf graphischem Weg nach den bekannten Eigenschaften der Parabel und der geraden Linie, oder aber auch durch Berechnung (Gleichung 92—93^b) nachstehende Tabelle:

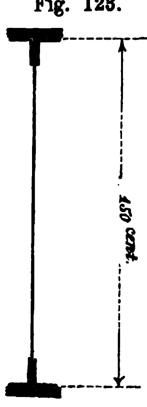
Tabelle XXXII.

Querträger:	0	I.	II.	III.	IV.		V.
Abscissen:	0	$1^2/_3$	$3^1/_3$	5	$6^2/_3$	$7^1/_2$	$8^1/_3$
max $\mathfrak{M}$	0	64700	110000	145600	161800	161800	161800
max $\mathfrak{B}$	53662,6	44271	34880	25488	16096	11400	16096
in der Mitte des Feldes:		49271	39575	30184	20792	11400	

Die Werthe der Tabelle XXXII. gelten für ein Geleise; sie sind daher, sofern sie auf einen Träger angewendet werden, im vorliegenden Falle sämmtlich zu halbiren; die halbirten Werthe der Tabelle können dirket zur Bestimmung der Dimensionen der Hauptträger angewendet werden.

Die vorläufig angenommene Querschnittsform des Hauptträgers ist in nebenstehender Figur 123 skizzirt, wonach dieser Querschnitt aus einer 1,5^m hohen Mittelwand und zwei Gurtungen besteht, welche letztere in der Mitte der Brücke, wo max $\mathfrak{M}$ stattfindet, aus je 2 Winkeln und 3 Kopfblechen zusammengesetzt ist; da der Schwerpunkt der Gurtung ziemlich genau mit dem betreffenden Ende der Mittelwand zusammenfällt, so wird die Höhe der Mittelwand $= \mathfrak{H}_0$ gesetzt, welche Grösse als Distanz der Gurtungs-Schwerpunkte in der Formel 152) auftritt; ehe letztere Gleichung zu Bestimmung der Gurtungsstärke angewendet werden kann, ist die Kenntniss der Mittelwanddicke nothwendig.

Fig. 123.



Die Bestimmung der Dicke der Mittelwand geschieht nach Gleichung 149), indem man schätzungsweise die Distanz $\mathfrak{H}$ der Mittelpunkte von Druck und Zug gleich $\frac{9}{10}\,\mathfrak{H}_0 = 1{,}35^m$ seszt; es folgt nun aus Gleichung 149) unter Einsetzung der in Tabelle XXXII. enthaltenen Werthe von max $\mathfrak{B}$

$$\text{im Felde } 0\text{—I} \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{49271}{350 \, . \, 135} = 0{,}52^{cm}$$

$$\text{„ „ } \text{I—II} \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{39575}{350 \, . \, 135} = 0{,}40^{cm}$$

$$\text{„ „ } \text{II—III} \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{30184}{350 \, . \, 135} = 0{,}32^{cm}$$

$$\text{„ „ } \text{III—IV} \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{20792}{350 \, . \, 135} = 0{,}22^{cm}$$

$$\text{„ „ } \text{IV—V} \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{11400}{350 \, . \, 135} = 0{,}12^{cm}.$$

Mit Rücksicht auf die Verschwächung der Blechwand durch die Nietreihen wird δ in den beiden äusseren Feldern gleich $0{,}7^{cm}$ gesetzt; in den 5 Mittelfeldern wird $\delta = 0{,}6^{cm}$ angenommen, indem man wegen Witterungs-Einflüssen und Widerstandsfähigkeit gegen Einknicken nicht unter letztere Blechdicke gehen will. —

Der Gurtungsquerschnitt Ω in der Träger-Mitte kann nunmehr nach Gleichung 158 erhalten werden:

$$\Omega = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A} \frac{\mathfrak{H}_0^2}{H}} - \frac{1}{6} \delta \mathfrak{H}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 158).$$

In dieser Gleichung setzen wir die zulässige Spannung $\mathfrak{A} = 650$, $\mathfrak{H}_0$ wie oben bemerkt $= 150$; ferner H durch vorläufige Annahme der Kopfblechdicke $= 156^{cm}$, δ mit Rücksicht auf die Verschwächung durch Nieten $= 0{,}5^{cm}$, woraus

$$\Omega = \frac{80900 \, . \, 1{,}56}{650 \, . \, 1{,}5^2} - \frac{0{,}5 \times 150}{6}$$

$$\Omega = 86{,}2 - 12{,}5 = 73{,}7 \; \square^{cm}.$$

Um diesen Querschnitt zu erhalten, nehmen wir folgende Dimensionen der Winkel und Kopfbleche an:

3 Kopfbleche je 22^{cm} breit, $0{,}9^{cm}$ dick	je $19{,}8 \; \square^{cm}$ zus. . .	$59{,}4 \; \square^{cm}$
2 Winkel je $18{,}0 \; \square^{cm}$ zus.		$36{,}0 \; \square^{cm}$
	zus.	$95{,}4 \; \square^{cm}$
hievon gehen ab		
2 Kopfblechnieten von $1{,}8^{cm}$ Dicke und $3{,}7^{cm}$ Länge	$13{,}32 \; \square^{cm}$	
1 Niete durch die Winkel und das Wandblech $1{,}8 \times 2{,}6$	$4{,}86 \; \square^{cm}$	
	zus.	$18{,}0 \; \square^{cm}$
bleiben als wirksamer Querschnitt Ω =		$77{,}4 \; \square^{cm}$

während nach obiger Rechnung $75{,}7 \square^{cm}$ benöthigt werden. —

Gegen die Auflager hin werden im Verhältniss der Abnahme von 𝔐 ein oder zwei Kopfblechlagen weggelassen, wobei zur näheren Bestimmung der Länge der Kopfbleche ein graphisches Verfahren angewendet wird, wie solches in Fig. c der Tafel VI. dargestellt ist.

Die Grösse 𝔥 bestimmt sich, nachdem der Gurtungs-Querschnitt bekannt ist, nach der Näherungsformel 150^{a}

für die Mitte der Hauptträger ist:

$$\mathfrak{H} = 150 \frac{12 \cdot 77 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 150}{12 \cdot 77 + 3 \cdot 0{,}5 \cdot 150} = 140{,}1^{cm}$$

für die Enden der Hauptträger, wo die Dicke der Mittelwand nach Abzug der Nieten zu 0,6 angenommen werden darf, und der Gurtungs-Querschnitt nach Abzug zweier Kopfblechlagen noch 46 □^{cm} beträgt, findet man:

$$\mathfrak{H} = 150 \frac{12 \cdot 46 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 150}{12 \cdot 46 + 3 \cdot 0{,}6 \cdot 150} = 133{,}5^{cm}$$

während wir oben näherungsweise im Mittel 135^{cm} gesetzt haben. —

Zur Bestimmung der Nieten-Distanz dienen die Formeln 162) und 164); es muss derjenige Querschnitt betrachtet werden, für welchen 𝔙 am grössten ist; für diesen Querschnitt haben wir oben 𝔥 = 133,5^{cm} gefunden. Für die Nieten der Mittelwand und der Gurtung ist ein Durchmesser von 1,8^{cm} angenommen worden; hienach berechnet sich die Vertikaldistanz der Wandstossniete D nach Gleichung 162) zu 16,25^{cm}, die Horizontaldistanz D′ der Gurtungsnieten nach Formel 164) zu 20,3^{cm}. — In der Ausführung sind für letztere Distanz nur 13^{cm} angenommen, da diese Nieten auch zur Verbindung der Gurtungstheile unter sich zu dienen haben und insbesondere von den Stössen hiedurch weiterhin in Anspruch genommen sind.

Soweit an den Stössen der Gurtungen beiderseits Stossplatten angenommen sind, vermag eine Niete von 1,8^{cm} Durchmesser bei 600 Kilo Schubspannung 3060 Kilo Zug oder Druck zu übertragen; die Kopfbleche haben bei 650 Kilo Längenspannung 11960 Kilo auszuhalten; diese Kraft kann somit von 4 doppelschnittigen Nieten übertragen werden, welche je mit 2990^{k} in Anspruch genommen sind. — Es ergiebt sich hiernach die Stossplattenlänge eines mit beiderseitigen Stossplatten versehenen Stosses = 4 D′ = 52^{cm}, die Länge einer einseitigen Stossplatte wenigstens 8 D′ = 104^{cm}.

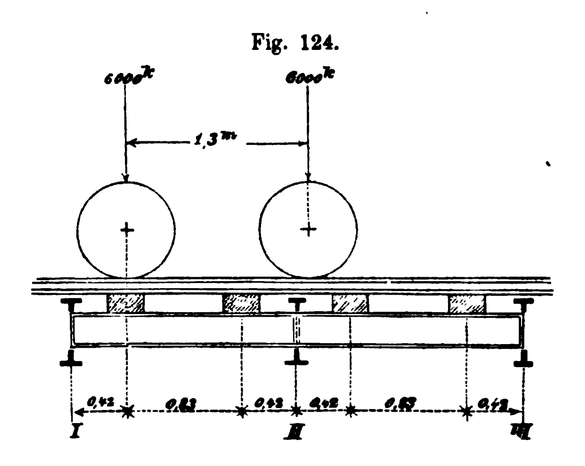
Die einzelnen Stösse der Kopfbleche, Winkel und Wandbleche sind in Fig. c Tafel VI. gleichfalls eingetragen; — wie dort ersichtlich, gehen die Stossplatten je über 2 Stösse (vergl. Fig. 57) und müssen bei doppelschnittigen Nieten wenigstens 78^{cm}, bei einschnittigen Nieten wenigstens 156^{cm} lang sein. Die Wandstösse sind gemäss N°. **109** mit doppelten Nietreihen versehen. — Be-

sondere Vertikalstützen sind nicht nothwendig, da die zur Befestigung der Querträger dienenden Vertikalrippen auch für die Absteifung der Hauptträgerwand genügend sind. —

115. Wir haben nun noch die einzelnen Theile der Fahrbahn zu berechnen.

Bei den Schwellenträgern darf das Eigengewicht der Fahrbahn wohl vernachlässigt werden; die grösste Belastung tritt

Fig. 124.



dann ein, wenn ein Locomotiv-Rad direkt über eine der Querschwellen zu stehen kommt; für diesen Fall ist der Auflagerdruck A am nächstgelegenen Querträger I.

$$A = \frac{1,25}{1,67} \cdot 6000 + \frac{0,42}{1,67} \cdot \frac{0,37}{0,84} \cdot 6000 = 5156^k,$$

und das Angriffsmoment am Auflagepunkt der belasteten Querschwellen

$$\mathfrak{M} = A \times 0,42 = 5156 \times 0,42 = 2165^{km},$$

wonach wir aus Tabelle XXIX. Seite 244 einen I Träger von 42,6 Kilo Gewicht per laufenden Meter auswählen und zwar finden wir für $25,1^{cm}$ Höhe $\Sigma Xy = 2481^{km}$ verzeichnet.

Anmerkung. Wir hätten auch das grösste Angriffsmoment für die Schwellenträger näherungsweise durch Interpolation aus Tabelle XXX a. erhalten können, und zwar:

$$\max \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 3587 + 1 \cdot 4500}{3} = 1945^{km}.$$

Dieser Werth ist kleiner als der oben gefundene, weil in Tabelle XXX a. eine grössere Distanz der Querschwellen und eine grössere Distanz der Locomotivaxen angenommen ist.

Für die Berechnung der Querträger ist als Belastung zu rechnen, indem in Fig. 124 a Querträger II als vorzugsweise belastet erscheint:

von der Locomotive

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) 12000^k = 15000^k$$

$$1{,}67^m \text{ Fahrbahn à } 550^k = \quad 918^k$$

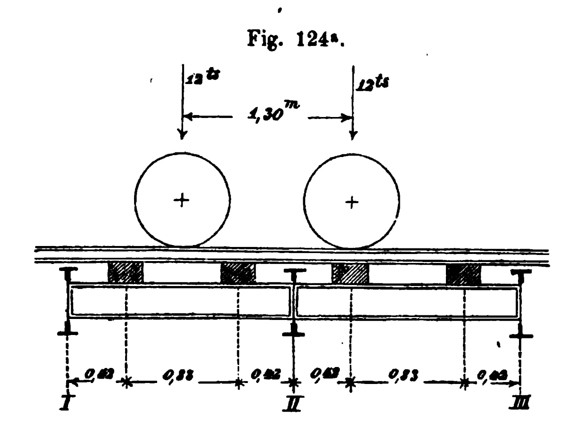
$$\text{zus. } 15918^k$$

wovon die Hälfte mit rund 8000^k an jedem der beiden Lastpunkte thätig ist (siehe Fig. 121 Seite 274); nach Fall 12 der Tabelle XXVIII. ist im vorliegenden Beispiel

$$\max \mathfrak{M} = P\lambda = 8000 \,.\, 1{,}0 = 8000^{km}.$$

Wir nehmen für den Querträger eine Mittelwand von 50^{cm} Höhe und $0{,}7^{cm}$ Dicke an; als Gurtung genügen dann 2 Winkel

Fig. 124a.



ohne Kopfblech; die Distanz $\mathfrak{H}_0$ der Gurtungsschwerpunkte wird zu 45^{cm} angenommen, so ist nach Formel 152), indem $\mathfrak{A} = 600$ gesetzt wird:

$$\Omega = \frac{8000}{600 \,.\, \frac{0{,}2025}{0{,}50}} - \frac{1}{6} \,.\, 0{,}6 \,.\, 45$$

$$\Omega = 32{,}9 - 4{,}5 = 28{,}4 \;\square^{cm},$$

so dass zwei Winkel von je 17 $\square^{cm}$ genügen, welche nach Abzug der Nietlöcher einen nutzbaren Querschnitt von etwa 30 $\square^{cm}$ ergeben, wonach die Spannung in den äussersten Fasern

$$600 \, \frac{28{,}4}{30} = 564^k \text{ betragen wird.}$$

116. Nachdem im Vorstehenden die einzelnen Dimensionen der Träger berechnet sind, sollen die Gewichte der einzelnen Brückentheile bestimmt und übersichtlich zusammengestellt werden.

Tabelle XXXIII.

Nro.	Bezeichnung der Brückentheile.	Im Einzelnen. Cubik-Decim.	Im Einzelnen. Kilogr.	Gewicht per lauf. Met. der Brücke.
1	**Gurtungen.**			
	4 Kopfbleche je 15,6 m lang, 22,0 cm breit, 0,9 cm dick	123,55	964	
	4 dto. je 10,2 m lang, 22,0 cm breit, 0,9 cm dick	80,78	630	241
	4 dto. je 7,2 m lang, 22,0 cm breit, 0,9 cm dick	57,02	435	
	8 Winkel je 15,6 m lang mit je 18 □cm Querschnitt	224,64	1752	
	16 Winkeldeckplatten je 88 cm lang mit je 12 □cm Querschnitt	15,36	120	
	4 Stossplatten der Kopfbleche je 160 cm lang, 22,0 cm breit, 0,9 cm dick	12,67	99	21
	Nietköpfe (ohne die Nieten zwischen Wand und Gurtung) 1940 Stück à 6,0 Cbcm .	11,84	92	
	zus.	. .	4092	262
2	**Mittelwand.**			
	4 Wandbleche je 3,63 m lang, 145 cm hoch, 0,7 cm dick	147,4	1150	148
	4 dto. je 4,17 m lang, 145 cm hoch, 0,6 cm dick	149,1	1163	
	12 Deckplatten je 1,25 m lang, 40 cm breit, 0,5 cm dick	30,0	234	
	16 Futterbleche je 1,25 m lang, 20 cm breit, 1,0 cm dick	40,0	312	
	4 dto. je 1,25 m lang, 20 cm breit, 0,5 cm dick	5,0	39	86
	32 Winkel der Vertikalständer je 143 cm lang mit 14 □cm Querschnitt	64,1	500	
	4 Endständer je 143 cm lang mit je 40 □cm Querschnitt	22,9	179	
	1700 Nietköpfe à 6 Cbcm	10,2	80	
	zus.	. .	3657	234
3	**Diagonalverbindungen.**			
	10 Stück je 5,2 m lang, 10 cm breit, 0,8 cm dick	41,6	325	
	120 Nietköpfe à 6 Cbcm	0,7	45	
	zus.	. .	370	24

Tabelle XXXIII. (Fortsetzung.)

Nro.	Bezeichnung der Brückentheile.	Im Einzelnen. Cubik-Decim.	Kilogr.	Gewicht per lauf. Met. der Brücke.
4	**Querträger.**			
	10 Wandbleche je 2,9 m lang, 50 cm hoch, 0,7 cm dick	101,5	792	
	20 Eckbleche je 143 cm hoch, vergl. 23 cm breit, 0,7 cm dick	46,0	359	
	40 Winkel je vergl. 3,5 m lang mit je 17 □cm Querschnitt	238,0	1856	
	40 Deckplatten je 20 cm lang, 30 cm hoch, 0,5 cm dick	12,0	94	
	1800 Nietköpfe à 6 Cbcm	10,8	84	
	zus.	. .	3185	204
5	**Schwellenträger.**			
	18 Stück doppelt T-Eisen je $1^2/_3$ m lang per laufenden Meter je 42 K. wiegend . . .	. .	1260,0	
	72 Stück Eckwinkel je 21 cm hoch mit 40 □cm Querschnitt	62,0	484	
	20 Verstärkungsbleche je 48 cm hoch, 30 cm breit, 1 cm dick . .	28,8	225	
	600 Nietköpfe à 6 Cbcm	3,6	27	
	zus.	. .	1996	127
6	**Fahrschienen.**			
	15,6 laufende Meter à 80 Kilo	. .	1248	80,0
7	**Querschwellen.**			
	18 Stück je 2,5 m lang, $^{24}/_{16}$ cm stark, je 67 Kilo wiegend	. .	1206	77
8	**Eichene Bedielung.**			
	2,0 m breit, 7 cm dick, wiegt per laufenden Meter 105 Kilo	. .	1638	105

Die sub 1—8 aufgeführten Gewichte sind nun gemäss N°. **69** auf Hauptträger und Fahrbahn zu vertheilen, wonach sich folgende Zusammenstellung ergibt:

Tabelle XXXIV.

Nro.	Bezeichnung der Brückentheile.	Gewicht		Summa	
		in Kilo.	per lauf. Meter in Kilogr.	total.	per lauf. Meter in Kilogr.
	Hauptträger.				
1	Gurtungen	4092	262		
2	Mittelwand	3657	234		
3	Diagonalen	370	24	8119	520
	Fahrbahn.				
4	Querträger	3185	204		
5	Schwellenträger	1996	127		
6	Fahrschienen	1248	80		
7	Querschwellen	1206	77		
8	Bedielung	1638	105	9273	593
				17392	1113
	Gesammtgewicht.				
	Hievon beträgt:				
6—8	der Oberbau	4092	262		
1—5	die Schmiedeisenconstruction	13300	851		
	Summe wie oben	17392	1113		

In der Berechnung hatten wir das Eigengewicht anstatt 1113 zu 1075 Kilo angenommen, was für die im Träger thätige Spannung nur eine sehr geringe Differenz antrifft. — In Gleichung 105) wäre für das vorliegende Beispiel zu setzen

$$C = 33{,}3 \qquad F = 593$$

somit

$$p = 33{,}3\, l + 593 = 1113 \text{ Kilo}$$

117. Wir wollen nun noch für die betrachtete Brücke die grösste s c h i e f e Wandspannung berechnen. —

Für den Hauptträger sind auf Tafel VI. Fig. a und b auf Grundlage der Tabelle XXXII. die gleichzeitigen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ sowohl für die Maximallast als für die grösste einseitige Belastung graphisch dargestellt (wie dieses in N°. **112** an Fig. 119 und 120 erläutert ist) und wurde nun für zwei Querschnitte, wo sich der wirkliche Querschnitt dem theoretischen am meisten nähert, die grösste Längenspannung $\mathfrak{A}_0$ und die Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser für den Fall der einseitigen Belastung nach den in Fig. b verzeichneten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ bestimmt; hiernach sind auf Tafel I. die Figuren N°. 2 und N°. 3 mit Hilfe des in N°. **27** beschriebenen Verfahrens hergestellt worden, und ist aus diesen Figuren ersichtlich, dass für die fraglichen Querschnitte $\mathfrak{D}_{max}$

nirgends den Werth der in den äussersten Fasern thätigen Längenspannung $\mathfrak{A}_0$ erreicht.

Für die Querträger haben wir max $\mathfrak{V}$ von den Lastpunkten bis zu den Auflagern je = 8000^k, δ mit Rücksicht auf die Verschwächung durch Nieten = 0,6^{cm}; die Grösse $\mathfrak{H}$ bestimmt sich für die Querträger auf Grundlage der oben angenommenen Querschnitt-Dimensionen nach der Formel 32)

$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\int_0^a z\, dy} = \frac{38383}{897,7} = 42,8^{cm},$$

woraus nunmehr aus Gleichung 148) die Schubspannung in der neutralen Faser

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{8000}{0 . 6 \times 42,8} = 311^k$$

gefunden wird; diese Schubspannung sinkt am innern Rande der Gurtungswinkel auf 276^k herunter, während die Längenspannung daselbst auf $\frac{17}{28} . 600 = 408^k$ sich berechnet; hiernach erhalten wir aus Gleichung 55)

$$\max \mathfrak{D} = \frac{408}{2} \pm \sqrt{276^2 + 204^2} = 547.$$

Für die Schwellenträger haben wir max $\mathfrak{V}$ von den Schwellen bis zu den Auflagern gleich 5156^k, woraus nach der aus Tafel VI. ersichtlichen Form der **I** Träger nach Gleichung 45) und der nachfolgenden Entwicklung

Schubspannung in der neutralen Faser

$$\mathfrak{S}_0 = 214^k$$

Schubspannung am innern Gurtungsrande

$$\mathfrak{S} = 153^k.$$

Indem wir endlich die Längenspannung am innern Gurtungsrand $= 600 \frac{21,2}{24} = 530^k$ setzen, erhalten wir schliesslich für letzteren Horizontalschnitt nach Gleichung 55)

$$\mathfrak{D}_{max} = 265 \pm \sqrt{153^2 + 265^2} = 571^k.$$

§. 14. Die Eisenbahnbrücke bei Langon.

118. Die Brücke über die Garonne bei Langon wurde für die Eisenbahn von Bordeaux nach Cette erbaut und 1857 dem Betrieb übergeben; hier wurden zuerst im grossen Maasstabe die bei der Britanniabrücke gemachten Erfahrungen von sachkundigen französischen Ingenieuren angewendet, und wenn auch der Einfluss der englischen Röhrenbrücken sich nicht verläugnet, so ist

doch ein Fortschritt und eine selbstständige Beurtheilung deutlich zu erkennen.

Eine eingehende Behandlung des ganzen Baues dieser Brücke ist in dem Werke *„Construction des ponts métalliques par MM. L. Molinos et C. Pronnier, Paris, 1857“* veröffentlicht worden und legen wir dieselbe der folgenden Darstellung zu Grunde; hienach sind auch auf Tafel VII. am Schlusse des Buches die wichtigeren Haupt-Abmessungen und Detail-Masse verzeichnet.

Bei der Berechnung der Brücke wurde die Spannweite für die Mittelöffnung zu $74{,}4^m$ angenommen, so dass die Auflagerbreite für die Zwischenpfeiler 3^m (entsprechend der wirklichen Berührungsfläche) und für die Endpfeiler $1{,}57^m$ betrug; die ganze Länge der Hauptträger ist 211,7 Meter.

Als Eigengewicht wurde für den laufenden Meter eines Geleises 1900^k gerechnet; als zufällige Last ebenso 4000^k; da die Brücke für 2 Geleise bloss 2 Hauptträger erhalten hat, so hat jeder Träger die auf 1 Geleise antreffende Last auszuhalten.

Die Hauptträger sind über sämmtliche 3 Oeffnungen continuirlich hergestellt; zur Bestimmung der elastischen Linie, der Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ und der Auflagerdrücke wurde das Verfahren von Clapeyron angewendet, welches in N°. **21** und **22** entwickelt ist.

Es wurden hiebei der Reihe nach eine oder mehrere Oeffnungen mit der zufälligen Last je auf ihre ganze Länge behaftet gedacht; die hauptsächlichsten Resultate sind in der umstehenden Tabelle XXXV. enthalten.

Mittelst der Tabelle XXXV. lassen sich nun sämmtliche $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ mit Hülfe der in N°. **85** aufgestellten Regeln bestimmen. — Auf Grund dieser Rechnungen wurde eine graphische Darstellung der $\mathfrak{M}$ *(moments de rupture)* und $\mathfrak{V}$ *(efforts tranchants)* für sämmtliche 4 Belastungsarten hergestellt.

Durch gleichzeitiges Auftragen der einzelnen Kurven bildet sich für die Werthe $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ je eine Umhüllungslinie, welche die absolut grössten Werthe der Vertikalkräfte und Angriffsmomente enthält. — Für jeden Querschnitt wurde die Wandstärke und der Gurtungs-Querschnitt nach den beschriebenen Maximalwerthen von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ bestimmt.

Wir bezeichnen mit:

H die ganze Höhe der Construction,
$\mathfrak{H}_0$ die Distanz der Gurtungs-Schwerpunkte (zugleich Höhe der Blechwand $= 550^{cm}$),
δ die Blechwanddicke,
Ω die Gurtungs-Querschnitte,
$\mathfrak{A}$ die Spannung in den äussersten Fasern,
Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts,
$\mathfrak{S}$ die Schubspannung gegen Abscheeren.

Tabelle XXXV.

$p = 1900^k$ $a = 64{,}08^m$
$k = 4000^k$ $b = 74{,}4^m$

Art der Belastung.		1. Auflager A.	1. Oeffnung.	2. Auflager B.	2. Oeffnung.	3. Auflager C.	3. Oeffnung.	4 Auflager D.
Belastung der Oeffnung AB	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	0	Tm 2137,5	Tm 1936,5	Tm 1079,8	Tm 637,3	Tm 682,6	0
	Auflagerdruck	T 158,8	—	307,4	—	T 124,0	—	—
Belastung der Oeffnung BC	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	0	211,4	2084,6	1997,7	2084,6	211,4	—
	Auflagerdruck	28,3	—	312,9	—	312,9	—	28,3
Belastung der Oeffnungen AB und BC	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	0	1673,5	3108,6	1649,2	1809,5	280,3	—
	Auflagerdruck	140,5	—	474,5	—	291,1	—	—
Belastung sämmtlicher 3 Oeffnungen	Grösstes Angriffsmoment $\mathfrak{M}$	—	1777,3	2883,5	1248,9	2883,5	1777,3	—
	Auflagerdruck	144,8	—	452,7	—	452,7	—	144,8

Für die Berechnung der Wandstärke nahm man an, dass ein Vertikalschnitt $\delta \mathfrak{H}_0$ die Kraft $\mathfrak{V}$ aufzunehmen habe, wodurch man als vertikale Wandspannung $\mathfrak{E}$ erhielt.

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{V}}{\delta \mathfrak{H}_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Wir wissen aber aus N°. **24—28**, dass die vertikale Schubspannung sich nicht gleichförmig auf den Querschnitt vertheilt; es ist vielmehr aus Tafel I. oder speciell aus Tafel VII. ersichtlich, dass die vertikale Schubspannung gegen die Gurtungen hin abnimmt; — es ist nach Gleichung 148) die Schubspannung in der neutralen Faser

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{V}}{\delta \mathfrak{H}_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Die vorstehenden Gleichungen I. und II. unterscheiden sich nur durch den Werth der Grössen $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}$; letztere Grösse finden wir nach Gleichung 150^a) über den Zwischenpfeilern $= 0{,}93\ \mathfrak{H}_0$. — Es wurde bei Feststellung des Projects unter Vernachlässigung der Nietlöcher eine grösste Schubspannung von 360 Kilo per $\square^{cm}$ angenommen und die Blechdicke nach obiger Gleichung I. für jede Abscisse berechnet. Zunächst den Mittelpfeilern wurde die Blechdicke auf 12^{mm} festgesetzt; als geringste Dicke nahm man etwa auf die Hälfte der Länge 7^{mm} an, da diese Stärke mit Rücksicht auf Ausbauchungen und auf Witterungsverhältnisse nicht vermindert werden wollte. — Wir haben in Tafel VII. auf Grund der in N°. **28** früher gegebenen Berechnung eine graphische Darstellung der Schubspannung und der grössten schiefen Spannung (oder Pressung) gegeben.

Zur Bestimmung des Gurtungs-Querschnittes wurde nach Molinos und Pronnier eine Näherungsformel angewendet, welche unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen sich ausspricht:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \left\{ \mathfrak{H}_0\, \Omega + \frac{1}{6}\, \delta \mathfrak{H}_0^{\,2} \right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 165).$$

Um durchaus eine Spannung $\mathfrak{A}$ von circa 600^k zu erhalten, wurde der Gurtungs-Querschnitt, welcher an den Endauflagern aus 6 Winkeleisen von zus. $129{,}6\ \square^{cm}$, 2 vertikalen Blechen von zus. $74{,}8\ \square^{cm}$ und einem horizontalen 90^{cm} breiten Blech von $108\ \square^{cm}$ besteht, also eine Gesammtfläche von $312{,}4\ \square^{cm}$ repräsentirt, durch weitere horizontale Bleche (Kopfbleche) verstärkt; über den Zwischenpfeilern, wo der Gurtungs-Querschnitt am grössten ist, befinden sich 5 weitere Kopfbleche, von welch letzteren drei je 90^{cm} breit, 12^{mm} dick, 2 schmälere nur 9^{cm} breit und 10^{mm} dick sind; dieser stärkste Querschnitt auf dem Zwischenpfeiler misst somit $312{,}4 + 342 = 654{,}4\ \square^{cm}$, wobei indess keine Nietlöcher in Abzug gebracht sind.

In der Mitte der ganzen Brücke haben die Gurtungen eine Stärke von $528{,}4\ \square^{cm}$, während ebendaselbst nach Tabelle XXXV. das grösste Angriffsmoment $\max \mathfrak{M} = 1997{,}7^{Tm}$ ist; hienach folgt aus obiger Gleichung 165)

$$\mathfrak{A} = \frac{199700}{5{,}50 \times 528{,}4 + \frac{1}{6}\, 5{,}5\ (0{,}7 \times 550)}$$

$$= 613^k.$$

Unsere Formel 158), welche für symmetrische Träger-Querschnitte mathematisch genau ist, gibt bei denselben Annahmen unter Einführung des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{H}_0}{H} = \frac{550}{557}$ den Werth $\mathfrak{A} = 620{,}8$, wonach also im vorliegenden Falle die Gleichung 165) eine Ungenauigkeit von etwas über 1 % ergibt.

Wendet man Gleichung 165) auf die Gurtung über den Mittelpfeilern an, indem man wieder max $\mathfrak{M}$ aus Tabelle XXXV. entnimmt, so erhält man unter Einsetzung des oben berechneten Querschnitts von 654,4 □^{cm} eine grösste Spannung von 739^k; es ist uns nicht bekannt, aus welchem Grunde nur an dieser Stelle eine wesentlich höhere Spannung angenommen wurde; dieselbe ergibt sich auch unmittelbar aus den graphischen Darstellungen, welche dem Werke von Molinos und Pronnier beigegeben sind.

Wir haben schon in N°. **28** die schiefen Wandspannungen für diese Brücke berechnet, unter der Voraussetzung, dass die Längenspannung in den äussersten Fasern = 600^k, die Schubspannung in der neutralen Faser gleich 350^k sei; die Figur 4 der Tafel VII. stellt das Resultat dieser Berechnung graphisch dar; wir ersehen hieraus, dass unter den gemachten Voraussetzungen (welche für einen grossen Theil der Länge vollständig zutreffen) die grösste schiefe Wandspannung = 687^k ist; es muss diese Spannung über den Zwischenpfeilern (wo $\mathfrak{A}$ zu 739^k berechnet ist) wesentlich grösser sein und zwar über 800^k pro □^{cm} betragen.

119. Nach den Angaben von Molinos und Pronnier beträgt das Eisengewicht der Brücke von Langon *(poids de la construction métallique)*:

Hauptträger	726^T
Windkreuze und Verschiedenes	49^T
	775^T
Querträger, Schwellenträger, Andreaskreuze . . .	188^T
	total 963^T

somit per laufenden Meter eines Geleises 2274^k und mit Hinzurechnung von Schwellen, Schienen, Bedielung und Kiesdecke ca. 2900^k; hienach spricht sich Gleichung 105) im vorliegenden Falle aus:

Eisengewicht

$$p' = 445 + 271 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und totales Eigengewicht

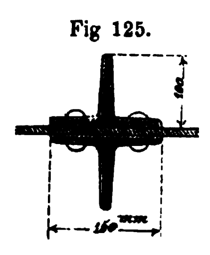
$$p = 1085 + 271 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Die vorstehende Gleichung I. ergibt für die Brücke von Langon eine für die damalige Zeit sehr bemerkenswerthe Leichtigkeit, welche in der Continuität der Hauptträger, in der Anordnung der Fahrbahn, sowie insbesondere darin begründet ist, dass für 2 Geleise nur 2 Hauptträger angewendet sind.

Durch die Continuität werden am Gewicht der Gurtungen etwa 20% erspart; aber mehr noch wird für die Blechwände durch die angeführte Beschränkung der Trägeranzahl gewonnen; denn da die Blechdicke bei vermehrter Trägeranzahl auf den

grössern Theil der Länge wenig oder gar nicht vermindert werden dürfte, da ferner die Absteifungen, wenn auch etwas schwächer, doch in ganz ähnlicher Weise für jeden Träger angebracht werden müssten, so würden 4 Träger wenigstens um die Hälfte schwerer als die 2 Hauptträger der Langonbrücke, und ist somit an den Seitenwänden ein Mindergewicht von circa 30% erzielt.

Fig 125.



120. Die Blechwände der Hauptträger bestehen aus 86^{cm} breiten Blechtafeln von $5,5^m$ Höhe, welche durch ⊤förmige Deckplatten an ihren vertikalen Stössen verbunden sind, wie in Fig. 125 skizzirt ist. Die Vertikaldistanz der 18^{mm} starken Nieten beträgt 10^{cm}, die Schubspannung $\mathfrak{S}_0$ in der neutralen Faser, welche oben auf 360^k mit Vernachlässigung der Nieten berechnet ist, beträgt somit nach Abzug der Nietlöcher:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{100}{82} \cdot 360 = 439 \text{ Kilo} \quad \dots\dots\dots \quad \text{I.}$$

Die Schubspannung $\mathfrak{C}$ der Nieten findet sich nach Gleichung 162)

$$\mathfrak{C} = 360 \frac{8,2}{2 \cdot 2,54} = 585 \text{ Kilo} \quad \dots\dots\dots \quad \text{II.}$$

Die Resultate der vorstehenden Gleichungen I. und II. sind ziemlich übereinstimmend mit unsern Regeln; doch ist wie auch bei dem Beispiel in §. 13 die Entfernung und entsprechend die Anstrengung der Nieten verhältnissmässig geringer, was insofern nothwendig ist, als die in Fig. 125 skizzirten Rippen nur einfache Nietreihen haben, welche in der Nähe der Gurtungen weit mehr in Anspruch genommen sind. Wenn z. B. in einem bestimmten Querschnitte die Längenspannung am inneren Gurtungsrande 600^k, die vertikale Schubspannung der Wand ebendaselbst 300^k betragen würde, so wäre nach Tabelle VI. die grösste schräge Wandspannung $724,2^k$, während Durchmesser und Anzahl der Nieten dieselben sind, wie in der neutralen Axe, wo die grösste (Schub-) Spannung 439^k beträgt; wir erhielten somit als Schubspannung in den der Gurtung zunächst befindlichen Nieten mit Benützung von obigen Gleichungen I. und II.:

$$\mathfrak{C} = 724,2 \frac{585}{439} = 964^k \quad \dots\dots\dots \quad \text{III.}$$

In der Nähe der Mittelpfeiler, wo die Längenspannung bis 750^k beziehungsweise 900^k steigt, würden die fraglichen Nieten der Vertikalwand ganz ausserordentliche Anstrengung zu erleiden haben; es sind aber daselbst verstärkte Rippen angebracht (vergl. Fig. 125ᵃ), welche mit doppelten Nietreihen versehen sind. — Hiedurch sind die betreffenden Nieten wesentlich entlastet;

die schräge Wandspannung behält aber ihren oben berechneten Maximalwerth bei.

Wo die Querträger auf die nach Fig. 125 und 125^a construirten Rippen treffen, ist das ⊤Eisen einerseits durch 2 Winkel nebst Deckplatten ersetzt, wie Fig. 125^b angibt.

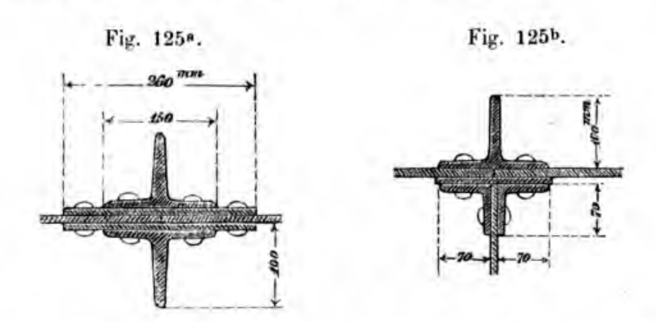


Fig. 125^a. Fig. 125^b.

Diese letztere Anordnung ist nur an der Hälfte der Querträger angebracht, indem in Entfernungen von $5{,}16^m$ stärkere Vertikalständer vorhanden sind, welche zugleich zur Aufnahme je des zweiten Querträgers dienten, wie aus der Tafel VII. ersichtlich ist; der Querschnitt dieser Vertikalständer ist in Fig. 126 dargestellt.

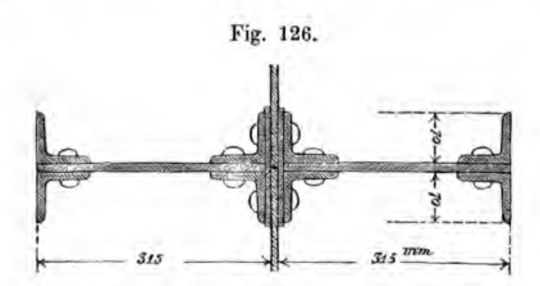


Fig. 126.

Derartige stärkere Ständer sind auch auf den Pfeilern als Endständer angebracht, welche da, wo keine Querträger nothwendig waren, mittelst sogenannter Andreaskreuze zu einem sehr steifen Querverband benützt sind.

Die Eintheilung der in Fig. 125—126 dargestellten Vertikalrippen ist in der Tafel VII. gegeben. Es ist daselbst ersichtlich, dass auf einen Mittelpfeiler für jeden Träger 3 stärkere Absteifungen treffen, welche mit dem zwischen denselben befindlichen Wandstück den ganzen Pfeilerdruck aufzunehmen haben. — Der grösste Pfeilerdruck beträgt nach Tabelle XXXV. bei Belastung von 2 Oeffnungen 474,4 tons; der Querschnitt der Wandfläche ist

(ohne Nietenabzug) 360 □^{cm}, und wird durch besagte 3 Hauptständer auf etwa 900 □^{cm} erhöht, so dass die mittlere Pressung annähernd $\frac{474500}{900} = 527^k$ beträgt; die wirkliche Pressung ist jedoch in Folge der Verschwächung durch die Nieten wesentlich grösser. Es erhellt daraus insbesondere, dass der Druck auf die ganze Auflagerfläche vertheilt sein muss, wenn nicht einzelne Theile Noth leiden sollen (vergl. hierüber N°. **93**).

Was die Anordnung der Gurtungen betrifft, so ist dieselbe aus Tafel VII. ersichtlich und nur hinzuzufügen, dass durchweg beiderseitige Stossplatten angebracht sind; dieselben haben so viele Nieten hinter einander erhalten, dass die durchlaufende Eintheilung der Nieten beibehalten werden konnte; es ist diess nicht nur mit Rücksicht auf die Verschwächung durch die Nietlöcher, sondern auch wegen der Einfachheit der Ausführung vortheilhaft. Sämmtliche Gurtungsbänder haben dieselbe Länge von 5,16^m erhalten, gleich der doppelten Querträgerdistanz.

121. Die Stärke der Nieten, welche zur Verbindung von Gurtung und Blechwand dienen, wurde aus der Grösse $\frac{d\mathfrak{M}}{dx}$ abgeleitet, indem die Schubspannung dieser Bolzen = 500^k per □^{cm} gesetzt wurde; wir wissen, dass dieser Ausdruck nach Gleichung 18) gleich der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ ist, deren Maximalwerth für einen Träger nach Tabelle XXXV. und Gl. = 64,08 . q — A = 64,0 . 5,9 — 140,5 = 237,5 tons beträgt.

Nach Gleichung 162) beträgt hier die Distanz D, der 2,5^{cm} starken Nieten zwischen Wand und Gurtung

$$D_{,} = \frac{5}{4} \cdot 2\mathfrak{S} \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}} \cdot \frac{d^2\pi}{4}.$$

$$D_{,} = \frac{5}{4}\, 2 \,.\, 500 \,\frac{511{,}5}{237500} \cdot 4{,}9 = 13{,}2^{cm},$$

während in der Ausführung eine Entfernung von 10,7^{cm} gewählt wurde; — beim Project wurden 8 Nieten per Längeneinheit berechnet, was einer Nietendistanz D, = 12,5^{cm} entspricht.

Die Anfertigung der Nieten ist vom grössten Einfluss auf die Solidität der Blechwandbrücken sowie auf die Kosten der Zusammensetzung derselben. Sie haben beim Bau der Langonbrücke und in der Beschreibung derselben die verdiente Sorgfalt gefunden.

Die Nietbolzen erhielten einen Durchmesser, der 1^{mm} geringer war, als das Loch, das sie auszufüllen hatten; durch das beim Aushämmern des Nietkopfes hervorgebrachte Stauchen des glühenden Nietbolzens wird das Loch vollständig ausgefüllt und bleibt der Contact erfahrungsgemäss bei tüchtiger Arbeit auch nach dem Erkalten, wie man sich durch Augenschein überzeugen

Tabelle XXXVI.

Dicke der zu verbindenden Bleche in Millimetern.	Nieten von 18mm Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 4,28k.		Nieten von 20mm Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 5,87k.		Nieten von 22mm Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 7,76k.		Nieten von 25mm Durchmesser. 100 Nietköpfe wiegen 11,39k.	
	Länge d. Cylinders in Mm.	Gewicht von 100 Stück.	Länge des Cylinders.	Gewicht von 100 Stück.	Länge des Cylinders.	Gewicht von 100 Stück.	Länge des Cylinders.	Gewicht von 100 Stück.
15	42	12,04k	45	16,14k	45	20,50k	51	29,28k
18	45	12,64	48	16,87	48	21,39	54	30,16
21	48	13,23	51	17,60	51	22,28	57	31,31
24	51	13,82	54	18,34	54	23,17	60	32,46
27	54	14,42	57	19,07	57	24,06	63	33,61
30	57	15,01	60	19,80	60	24,94	66	34,76
33	60	15,61	63	20,54	63	25,83	69	35,91
36	63	16,19	66	21,27	66	26,72	72	37,05
39	66	16,77	69	22,00	69	27,61	75	38,20
42	72	17,94	72	22,74	72	28,49	78	39,35
45	75	18,53	75	23,47	75	29,38	81	40,50
48	78	19,11	78	24,20	81	30,27	87	42,79
51	81	19,61	81	24,44	84	31,16	90	43,94
54	84	20,28	84	25,67	87	32,05	93	45,09
57	87	20,86	87	26,40	90	32,94	96	46,23
60	90	21,45	90	27,13	93	33,82	99	47,38

kann, dass dieser Art eingesetzte Nieten, wenn sie durch Lostrennen des Nietkopfes frei werden, das Nietloch vollständig ausfüllen; dass diese Ausfüllung der Löcher durch die Nieten nur dann zu erreichen ist, wenn letztere im Verhältniss zu ihrer Dicke nicht zu lang, ist schon früher erwähnt. — Es muss desshalb der cylindrische Theil der Niete eine grössere Länge erhalten, als die Dicke der zu verbindenden Bleche nachweist; zu Anfertigung des 2. Kopfes ist ausserdem eine Länge gleich dem 1,1fachen des Bolzendurchmessers hinzuzurechnen. — Molinos und Pronnier haben die vorstehende Tabelle XXXVI. veröffentlicht, wonach unter Voraussetzungen und auf Grund von Versuchen in den Werkstätten von Gouin & Comp. die Länge der Nietbolzen bestimmt worden ist.

Wir schliessen die Beschreibung dieser Brücke mit einer Uebersicht des Gewichts der einzelnen Constructionstheile, wo insbesondere die einzelnen Bestandtheile des Hauptträgers nach der Angabe von Molinos und Pronnier ausgeschieden sind.

Tabelle XXXVII.

Bezeichnung der Bestandtheile.	Gewicht für 1 Geleise per lauf. Meter	
	einzeln in Kilogr.	im Ganzen.
a) Hauptträger-Construction.		
1) Seitenwand.		
Blechtafeln	350,3	
Vertikalständer	396,3	
Nietenköpfe	30,0	776,6
2) Gurtungen.		
Kopfbleche und Winkel	829	
Stossplatten	78	
Nietenköpfe	32	939,0
3) Windkreuze und Verschiedenes.		113,4
	zus.	1829,0
b) Querträger, Schwellenträger, Andreaskreuze.		445,0
totales Eisengewicht		2274,0
hiezu für Schienen, Langschwellen und Dielenbelag		411,0
ferner Kiesdecke		215,0
totales Eigengewicht per Meter Geleise		2900,0

Anhang.

Vergleichung der Masse und Gewichte verschiedener Länder.*)

Tabelle XXXVIII.

Fusstabelle.

Englischer und Russischer Fuss	Preussischer Fuss	Oesterr. Fuss	Badischer und Schweizer Fuss	Pariser Fuss	Meter
à 12 Zoll.	à 12 Zoll.	à 12 Zoll.	à 12 Zoll.	à 12 Zoll.	à 100 cm.
1	0,9711	0,9642	1,0160	0,9383	0,3048
1,0297	1	0,9929	1,0462	0,9662	0,3138
1,0371	1,0072	1	1,0537	0,9731	0,3161
0,9843	0,9559	0,9490	1	0,9235	0,3000
1,0658	1,0350	1,0276	1,0828	1	0,3248
3,2809	3,1862	3,1634	3,3333	3,0784	1

Nordamerika wie England,
Holland, Belgien wie Frankreich,
ferner ist:

1 sächsischer Fuss = 0,2832 Meter 1 Meter = 3,5312 Fuss sächsisch
1 hannover. „ = 0,2921 „ 1 „ = 3,4236 „ hannover.
1 württemb. „ = 0,2865 „ 1 „ = 3,4905 „ württemb.
1 bayrischer „ = 0,2919 „ 1 „ = 3,4258 „ bayrisch.

Anmerkung. Der sächsische, hannövrische und bayrische Fuss sind in 12 Zoll eingetheilt.

---

*) In Deutschland, Oesterreich und der Schweiz ist das Fussmass und das alte Gewicht aufgehoben und der Meter und das Kilogramm als gesetzliches Mass und Gewicht eingeführt. Wir haben jedoch in den folgenden Tabellen die alten Masse beibehalten, um die in älteren Lehrbüchern und Aufsätzen vorkommenden Masse und Gewichte leicht in die neuen Einheiten überführen zu können.

Tabelle XXXIX.

Gewichtstabelle.

Englisches Pfund	Zollpfund	Russisches Pfund	Kilogramm.
$= \frac{1}{2240}$ tons.	$= \frac{1}{100}$ Ctr.	$= \frac{1}{40}$ Pud.	$= \frac{1}{1000}$ tonnes.
1	0,9072	1,1076	0,4536
1,1023	1	1,2209	0,5000
0,9028	0,8190	1	0,4095
2,2046	2,0000	2,4419	1

In Deutschland und Oesterreich ist statt des Zollpfunds das Kilogramm eingeführt.

Nordamerika wie England,
Belgien, Holland wie Frankreich.

1 altes Pfund österreichisch = 0,560 [k]
1 „ „ preussisch = 0,4677[k]
1 „ „ französisch = 0,4896[k].

Tabelle XL.

Quadratfusstabelle.

Englischer oder Russischer Quadratfuss.	Preussischer Quadratfuss.	Oesterr. Quadratfuss.	Badischer oder Schweizer Quadratfuss.	Pariser Quadratfuss.	Quadratmeter.
1	0,9431	0,9297	1,0322	0,8804	0,0929
1,0608	1	0,9858	1,0945	0,9335	0,0985
1,0756	1,0144	1	1,1103	0,9470	0,0999
0,9688	0,9137	0,9007	1	0,8529	0,0900
1,1359	1,0712	1,0560	1,1724	1	0,1055
10,7643	10,1519	10,0074	11,1111	9,4768	1

1 Quadratfuss sächsisch = 0,0802 Quadratmeter
1 „ hannover. = 0,0853 „
1 „ württemb. = 0,0821 „
1 „ bayrisch = 0,0852 „
1 Quadratmeter = 12,4694 Quadratfuss sächsisch
1 „ = 11,7207 „ hannover.
1 „ = 12,1837 „ württemb.
1 „ = 11,7364 „ bayrisch.

Tabelle XL^a.

Cubikfusstabelle.

Englischer oder Russischer Cubikfuss.	Preussischer Cubikfuss.	Oesterr. Cubikfuss.	Badischer oder Schweizer Cubikfuss.	Pariser Cubikfuss.	Cubikmeter.
1	0,9159	0,8964	1,0487	0,8261	0,0283
1,0918	1	0,9787	1,1450	0,9019	0,0309
1,1156	1,0217	1	1,1699	0,9215	0,0316
0,9535	0,8733	0,8548	1	0,7877	0,0270
1,2106	1,1087	1,0851	1,2695	1	0,0343
35,3166	32,3459	31,6578	37,0370	29,1738	1

1 Cubikfuss sächsisch = 0,0227 Cubikmeter
1 „ hannover. = 0,0249 „
1 „ württemb. = 0,0235 „
1 „ bayrisch = 0,0249 „
1 Cubikmeter = 44,0318 Cubikfuss sächsisch
1 „ = 40,1263 „ hannover.
1 „ = 42,5275 „ württemb.
1 „ = 40,2066 „ bayrisch.

Tabelle XLI.

Gewicht per Quadrateinheit nach den landesüblichen Massen.

(Unter Zugrundlegung der alten Fussmasse und des Zollpfunds für die deutschen Staaten und Oesterreich.)

Englisch	Russisch	Preussisch	Österreichisch	Badisch	Französisch
Tonne per Quadratzoll.	Pud per Quadratzoll.	Pfund per Quadratzoll.	Pfund per Quadratzoll.	Pfund per Quadratzoll.	Kilogramm per Quadratcentim.
1	62,0256	2154,6	2185,8	2834,9	157,49
0,01612	1	34,738	35,239	45,704	2,539
0,000464	0,02879	1	1,014	1,316	0,0731
0,000457	0,02835	0,986	1	1,297	0,0720
0,000353	0,02188	0,760	0,771	1	0,0555
0,006349	0,3938	13,681	13,879	18,000	1

1 Zollpfund pro Quadratzoll sächsisch = 0,0898 Kilo pro Quadratcent.
1 „ „ „ hannover. = 0,0845 „ „ „
1 „ „ „ württemb. = 0,0609 „ „ „
1 „ „ „ bayrisch = 0,0845 „ „ „
1 Kilo pro Quadratcent. = 11,138 Zollpfund pro Quadratzoll sächsisch
1 „ „ „ = 11,850 „ „ „ hannov.
1 „ „ „ = 16,416 „ „ „ württ.
1 „ „ „ = 11,831 „ „ „ bayrisch.

Anmerkung. Bei Berechnungen der per Quadrateinheit wirkenden Kraft findet sich häufig noch älteres preussisches und österreichisches Gewicht.

1 Kilo pro Quadratcent. = 14,62 Pfd. alt preussisch pro Quadratzoll.
1 „ „ „ = 12,39 „ „ österreich. „ „
1 Pfd. alt preussisch pro Quadratzoll = 0,0684 Kilo pro Quadratcent.
1 „ „ österreich. „ „ = 0,0807 „ „ „

Tabelle XLII.

Gewicht per Längeneinheit nach den landesüblichen Massen.

(Unter Zugrundlegung der alten Fussmasse und des Zollpfunds für die deutschen Staaten und Oesterreich.)

Englisch	Russisch	Preussisch	Österreichisch	Badisch	Französisch
Tonne per lauf. Fuss.	Pud per lauf. Fuss.	Pfund per lauf. Fuss.	Pfund per lauf. Fuss.	Pfund per lauf. Fuss.	Kilogramm per lauf. Meter.
1	62,0256	2092,5	2107,6	2000,2	3333,6
0,01612	1	33,735	34,966	32,246	53,743
0,00048	0,0296	1	1,0072	0,956	1,593
0,00047	0,0284	0,993	1	0,949	1,582
0,0005	0,0310	1,046	1,054	1	1,667
0,0003	0,0186	0,628	0,632	0,6	1

1 Zollpfund pro lfd. Fuss sächsisch = 1,765 Kilo pro lfd. Meter
1 „ „ „ hannover. = 1,712 „ „ „
1 „ „ „ württemb. = 1,745 „ „ „
1 „ „ „ bayrisch = 1,713 „ „ „
1 altes preuss. Pfd. pro lfd. Fuss = 1,490 „ „ „
1 „ österr. „ „ „ = 1,772 „ „ „
1 Kilo pro lfd. Meter = 0,566 Zollpfund pro lfd. Fuss sächsisch
1 „ „ „ = 0,584 „ „ „ hannover.
1 „ „ „ = 0,573 „ „ „ württemb.
1 „ „ „ = 0,583 „ „ „ bayrisch
1 „ „ „ = 0,671 alt preuss. Pfd. pro lfd. Fuss
1 „ „ „ = 0,564 „ österr. „ „ „

Bei Gewichtsberechnungen kann man mittelst Tabelle XLI. alle Cubikmasse auf Cubikdecimeter reduciren. Ein Cubikdecimeter Wasser wiegt 1 Kilo, und kann man die so erhaltenen Kilogramme mittelst Tabelle XXXIX. auf die andern Gewichtseinheiten zurückführen. — Das Gewicht des gleichen Volums Wasser gibt das wirkliche Gewicht des fraglichen Körpers mittelst folgender Tabelle:

Tabelle XLIII.

Specifische Gewichte verschiedener Körper.

Wasser	1,0
Tannenholz	0,47—0,55
Tanne frisch gefällt . .	0,9
Eichenholz	0,65—0,80
Buchenholz trocken . .	0,59
Gusseisen	7,2
Schmiedeisen	7,8
Gussstahl	7,9
Sandstein	2,1—2,5
Kalkstein	2,5
Ziegel	1,5—1,8
Asphalt	1,1
Beton	2,4
Schotter	1,5—2,0
Ziegelmauerwerk . . .	1,6
Bruchsteinmauerwerk .	2,2

Zur Bequemlichkeit bei Gewichtsberechnungen dürften noch folgende Angaben von Werth sein:

1	Cubikdecimeter	Wasser	wiegt	$1{,}000^k$	=	1,000	Kilo
1	Cubikzoll	engl.	„	„	$0{,}0162^k$	=	0,0357	Pfd. engl.
1	„	russisch	„	„	$0{,}0162^k$	=	0,04	Pfd. russ.
1	„	preuss.	„	„	$0{,}01788^k$	=	0,03576	Zollpfd.
1	„	österr.	„	„	$0{,}01829^k$	=	0,03657	„
1	„	badisch	„	„	$0{,}027^k$	=	0,0540	„
1	„	württ.	„	„	$0{,}0235^k$	=	0,0468	„
1	„	sächs.	„	„	$0{,}0131^k$	=	0,0262	„
1	„	hannov.	„	„	$0{,}0144^k$	=	0,0288	„
1	„	bayrisch	„	„	$0{,}0144^k$	=	0,0288	„

Nachtrag zu N°. 39.

Die direkte Anwendung der Tabelle XIII. setzt voraus, dass sämmtliche Constructionsglieder im Falle der Maximalanstrengung ganz oder annähernd in demselben (hauptsächlich durch die Grösse der Spannweite bestimmten) Verhältniss $\frac{q}{p}$ mehr in Anspruch genommen sind, als beim unbelasteten Zustande der Brücke. Unter dieser Voraussetzung berücksichtigt die der Tabelle zu Grunde liegende empirische Formel 77) die in dem Metall in Folge der Lastbewegung entstehenden Schwingungen, insbesondere auch diejenigen, welche durch Stösse veranlasst werden, in einer dem praktischen Bedürfnisse durchaus genügenden Weise; ferner ist für solche Fälle, wo das Verhältniss $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{A}_q}$ wesentlich von dem Verhältnisse $\frac{p}{q}$ abweicht, die durch Tabelle XIII^a. dargestellte Correction gegeben. Zur besseren Uebersicht geben wir in nachfolgender Tabelle XLIV. eine nach Anleitung der Tabelle XIII^a. hergestellte Ergänzung der Tabelle XIII. In dieser Tabelle XLIV. ist gewöhnliches Schmiedeisen von 3000^k Bruchfestigkeit pro □ Centimeter angenommen, und vorausgesetzt, dass bei einem Metalle abweichender Bruchfestigkeit die einzelnen Zahlen der nachfolgenden Tabelle im Verhältniss reduzirt, beziehungsweise erhöht werden.

Die Maximalwerthe nebenstehender Tabelle entsprechen den Werthen der Tabelle XIII., diese letzteren Werthe erleiden immer eine Verminderung, wenn die Spannung in Folge Bewegung der Ueberlast in grösserem Masse zunimmt, als dem Verhältnisse $\frac{p}{q}$ entsprechen würde; die Abnahme der Coefficienten ist aber nur dann von Bedeutung, wenn in Folge der Bewegung der Ueberlast Druck in Zug übergeht und umgekehrt.

Man kann in weiterer Ausdehnung der Tabelle XLIV. eine Erhöhung der in Tabelle XIII. gegebenen Festigkeitscoefficienten dann annehmen, wenn das Verhältniss $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{A}_q}$ grösser als $\frac{p}{q}$ wird, und würde man die absolut grössten Festigkeitscoefficienten dann

Tabelle XLIV.

Grösste zulässige Werthe $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) pro Quadrat-Centimeter gutes Schmiedeisen berechnet.

$\frac{p}{q}$	0	$^1/_{10}$	$^1/_7$	$^1/_5$	$^1/_4$	$^1/_3$	$^2/_5$	$^1/_2$	$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$
	355 355	381 381	393 393	410 410	427 427	457 457	485 485	533 533	1
	400 300	424 318	436 370	453 327	469 352	488 366	528 396	537 403	0,75
	444 222	468 234	479 239	495 247	502 251	522 261	571 285	622 311	0,50
	488 122	511 128	522 131	538 134	545 138	562 140	614 153	666 167	0,25
	533 0	554 0	565 0	581 0	598 0	609 0	658 0	711 0	0
		571 — 57	589 — 84	581 — 145	598 — 149	665 — 166	701 — 175	755 — 189	
				615 — 123	640 — 160	685 — 228	727 — 297	800 — 400	

Anmerkung. Die unterhalb der Werthe der grössten zulässigen Spannungen (Pressungen) angeschriebenen, mit kleinen Ziffern gedruckten Zahlen bezeichnen in dem obern Theile der Tabelle die in demselben Constructionsglied in Folge wechselnder Belastung eintretende grösste Pressung (beziehungsweise Spannung), in dem untern Theile der Tabelle und soweit negative Vorzeichen angebracht sind, die (in der Regel in unbelastetem Zustande vorhandenen) kleinsten Spannungen (Pressungen), welche in dem betreffenden Gliede überhaupt eintreten können.

erhalten, wenn die in Folge des Eigengewichts vorhandene Spannung durch die Ueberlast gar nicht modificirt wird.

Da die Fälle, in welchen einzelne Constructionsglieder durch die Verkehrsbelastung nur wenig beeinflusst oder gar entlastet werden, sehr selten, beziehungsweise von untergeordneter Bedeutung sind, so ist es hinsichtlich der Bestimmung der Querschnittsdimensionen in der Regel ausreichend, die in Tabelle XIII. gegebenen Maximalwerthe überall da anzuwenden, wo $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{A}_q}$ grösser als $\frac{p}{q}$ ist, gleichzeitig aber kein Wechsel zwischen Druck und Zug stattfindet. Eine weitere Erhöhung der Festigkeitscoefficienten wird jedoch in dem Falle angenommen, wo $\frac{\mathfrak{A}_p}{\mathfrak{A}_q}$ und $\frac{p}{q}$ gleichzeitig der Einheit gleich sind, welcher Grenzfall in N°. **42** als ruhende Belastung besprochen ist.

Druckfehler.

S. 85 Zeile 13 von oben lies „3000^k" anstatt „3300^k".

Anmerkung: Die Tabelle XIII. ist zunächst, wie auf S. 82 bemerkt, für Schmiedeisen von 3300^k Bruchfestigkeit aufgestellt worden, in Folge der durch Tabelle XIII^a. gegebenen Correctur ist eine Erhöhung der Werthe der Tabellen XIII. und XIII^a. bedingt, welche wir dadurch erhalten, dass diese beiden Tabellen für gewöhnliches Schmiedeisen von 3000^k Bruchfestigkeit gültig angenommen werden. Dieselbe Bruchfestigkeit ist dem am Schlusse des Anhangs gegebenen Nachtrage, sowie der Tabelle XLIV. zu Grunde gelegt.

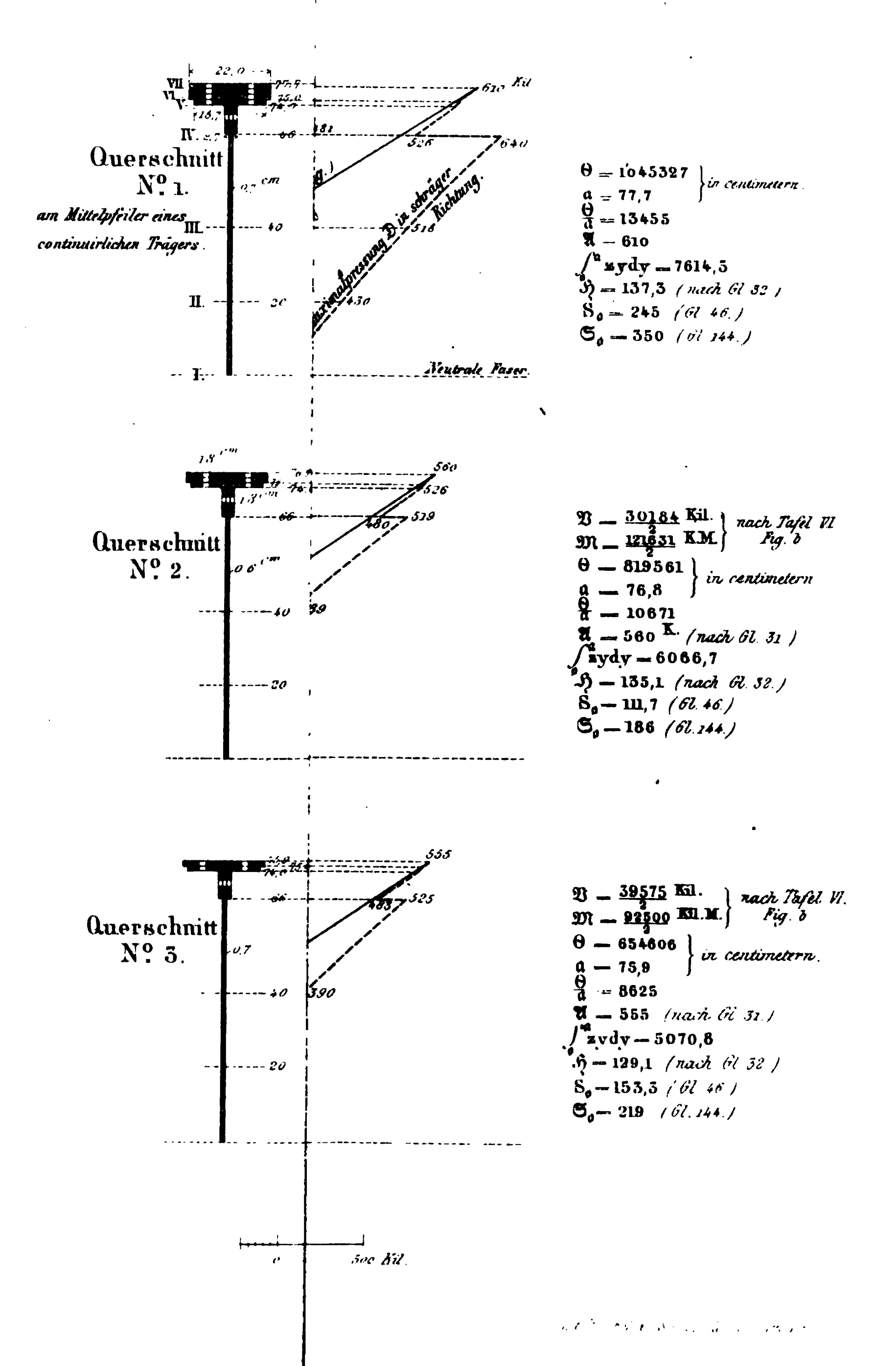
S. 128 Zeile 29 von oben lies „Tafel IV^b" anstatt „Tafel III".

S. 157 Zeile 21 von unten lies „Fig. 96 und 96^a" anstatt „Fig. 71 und 72".

S. 166. In Formel 111) ist zu setzen: „$\Sigma_0^x G (x-g)^3$" anstatt „$\Sigma G (x-g)^3$".

S. 273 Zeile 1 von unten lies „$C = 32$" anstatt „$l = 32$".

n $1^m_{,}50$ Höhe.



Querschnitt
N°. 1.
am Mittelpfeiler eines continuirlichen Trägers.
Neutrale Faser.
Maximalpressung D in schräger Richtung.
Θ = 1045327
a = 77,7
in centimetern.
Θ/a = 13455
𝔄 = 610
∫zydy = 7614,5
ℌ = 137,3 (nach Gl. 32.)
S₀ = 245 (Gl. 46.)
𝔖₀ = 350 (Gl. 144.)
Querschnitt
N°. 2.
𝔙 = 30184/2 Kil.
𝔐 = 121631/2 K.M.
nach Tafel VI Fig. b
Θ = 819561
a = 76,8
in centimetern
Θ/a = 10671
𝔄 = 560 K. (nach Gl. 31.)
∫zydy = 6066,7
ℌ = 135,1 (nach Gl. 32.)
S₀ = 111,7 (Gl. 46.)
𝔖₀ = 186 (Gl. 144.)
Querschnitt
N°. 3.
𝔙 = 39575/2 Kil.
𝔐 = 92500/2 Kil.M.
nach Tafel VI. Fig. b
Θ = 654606
a = 75,9
in centimetern.
Θ/a = 8625
𝔄 = 555 (nach Gl. 31.)
∫zydy = 5070,8
ℌ = 129,1 (nach Gl. 32.)
S₀ = 153,3 (Gl. 46.)
𝔖₀ = 219 (Gl. 144.)
500 Kil.

Fig. a.

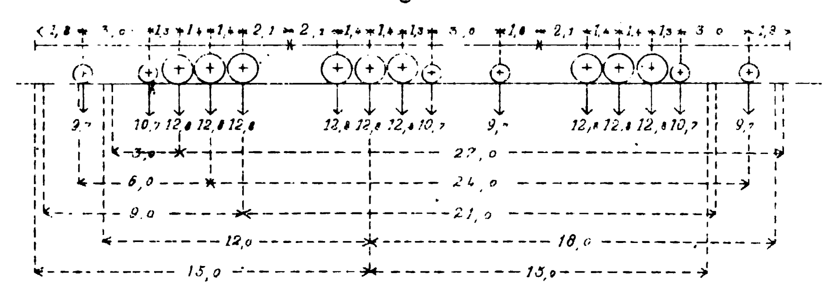


Fig. b.

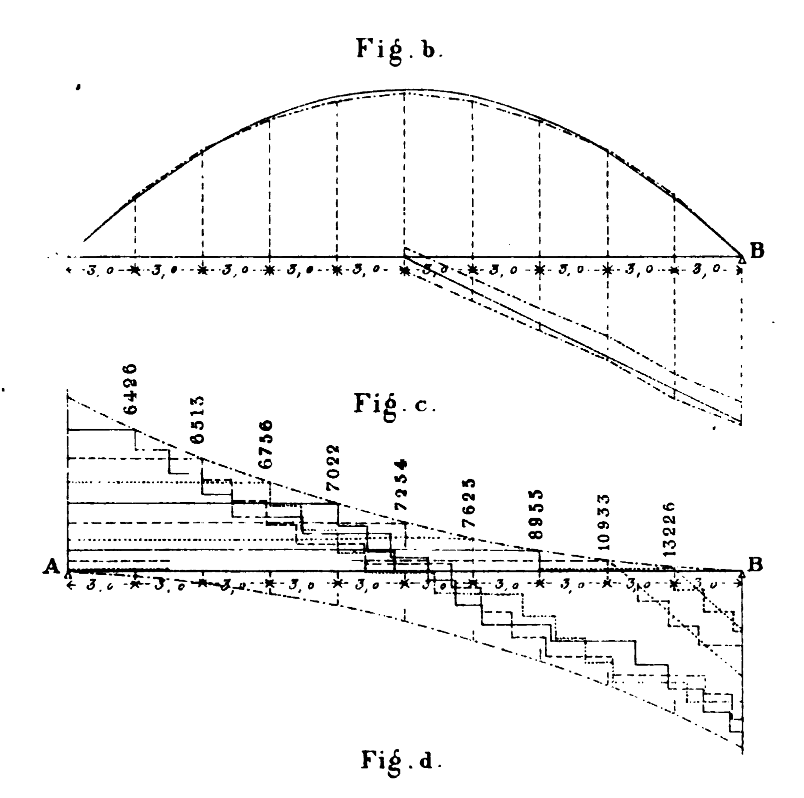
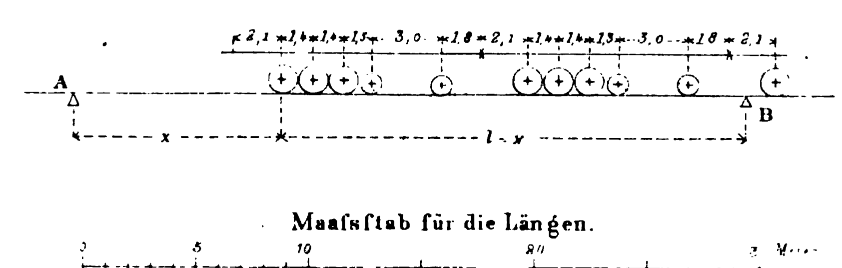


Fig. c.

Fig. d.



Maaſsſtab für die Längen.

0 5 10 20

Maaſsſtab für 𝔐.

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 T

Tafel III.

Fig. e.

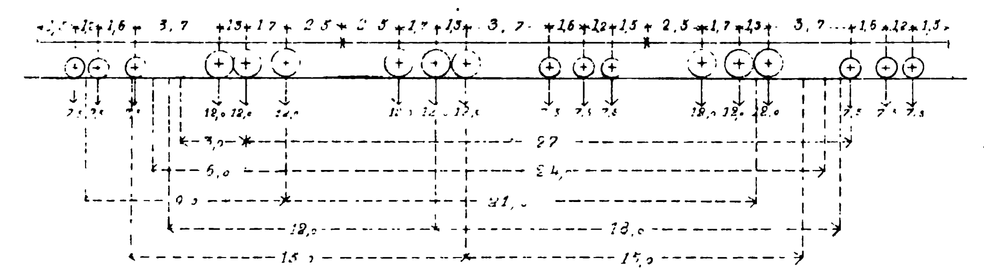


Fig. f.

Fig. g.

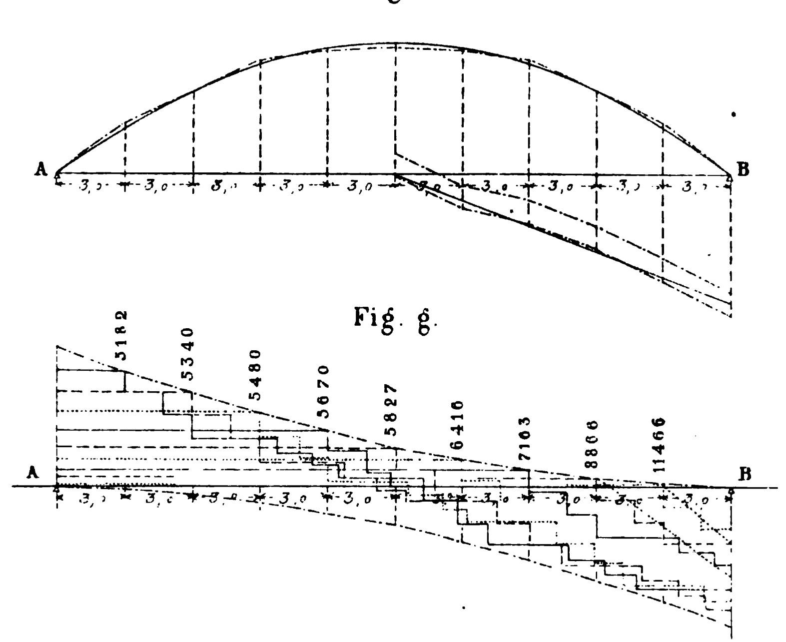
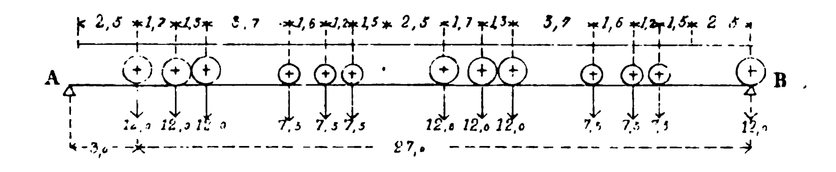


Fig. h



Maafsftab für $\mathfrak{M}$

0 100 200 300 400 500 600 700 800 T



Continuirlicher

Tafel IV.

älle.

stet mit p

, q

mit q BC mit p

, p , , q

Curven $\mathfrak{M}$

III

II

I

IV

A

B

0,4196 l

I

III

IV

II

0

0,125 $q l^2$

— $\mathfrak{V}$

III

II

$\frac{Kl}{16}$

$\frac{9}{16} Kl$

$\frac{5}{8} ql$

I

IV

$\frac{3}{8} pl$

A

B

Maximum

— $\mathfrak{V}$

$\frac{5}{8} pl$

I

IV

$\frac{9}{16} l$

$\frac{5}{8} ql$

$\frac{9}{16} Kl$

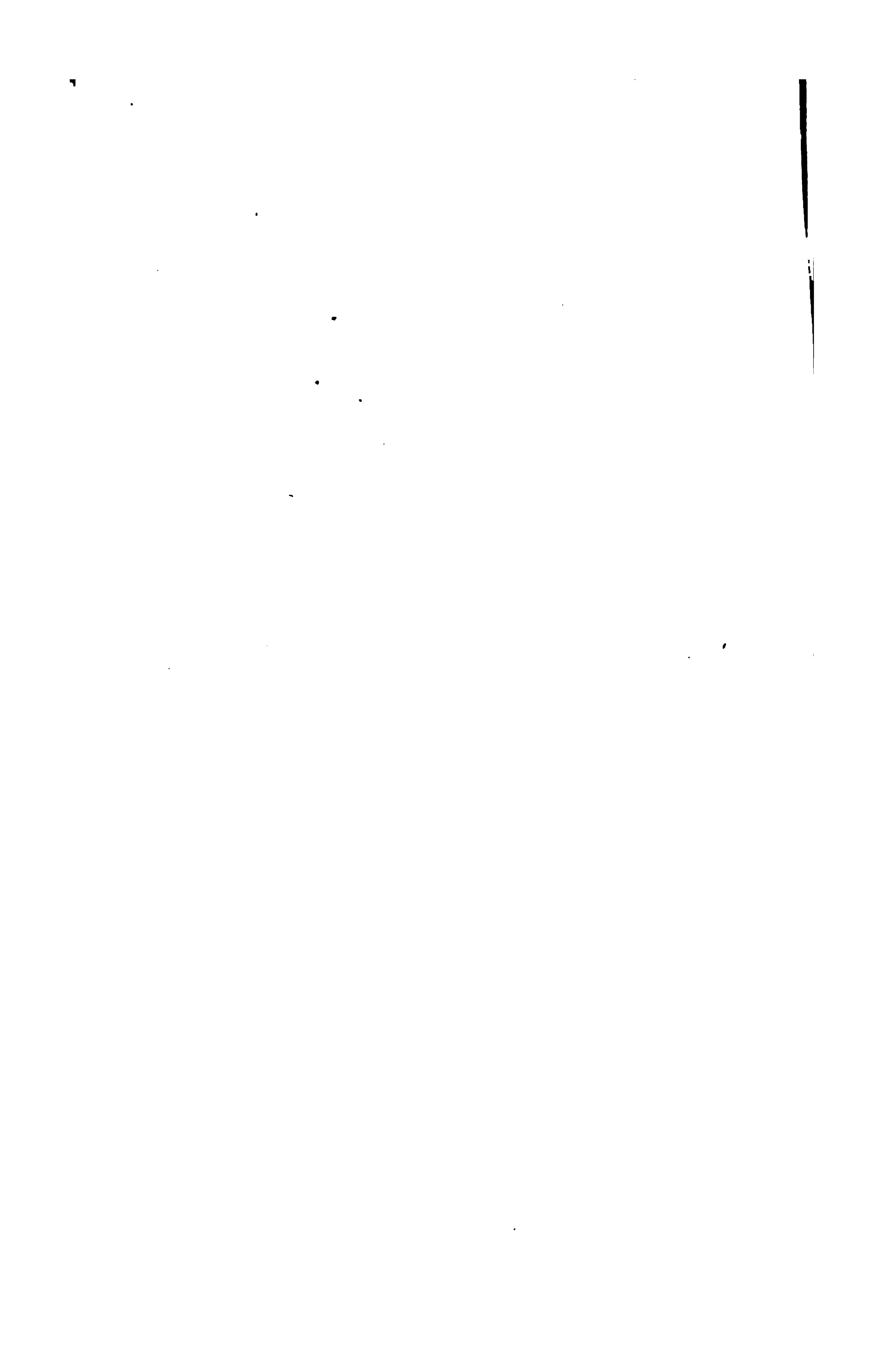
0

0

III

II

$\frac{Kl}{16}$



Continuirlicher Träger mit 2

$\frac{p}{k} = 3 \quad \frac{p}{q} = \frac{3}{4}$

Curven 𝔐

A B J

Curven 𝔙

$\frac{p}{k} = 2 \quad \frac{p}{q} = \frac{2}{3}$

A B

$\frac{p}{k} = 1 \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{2}$

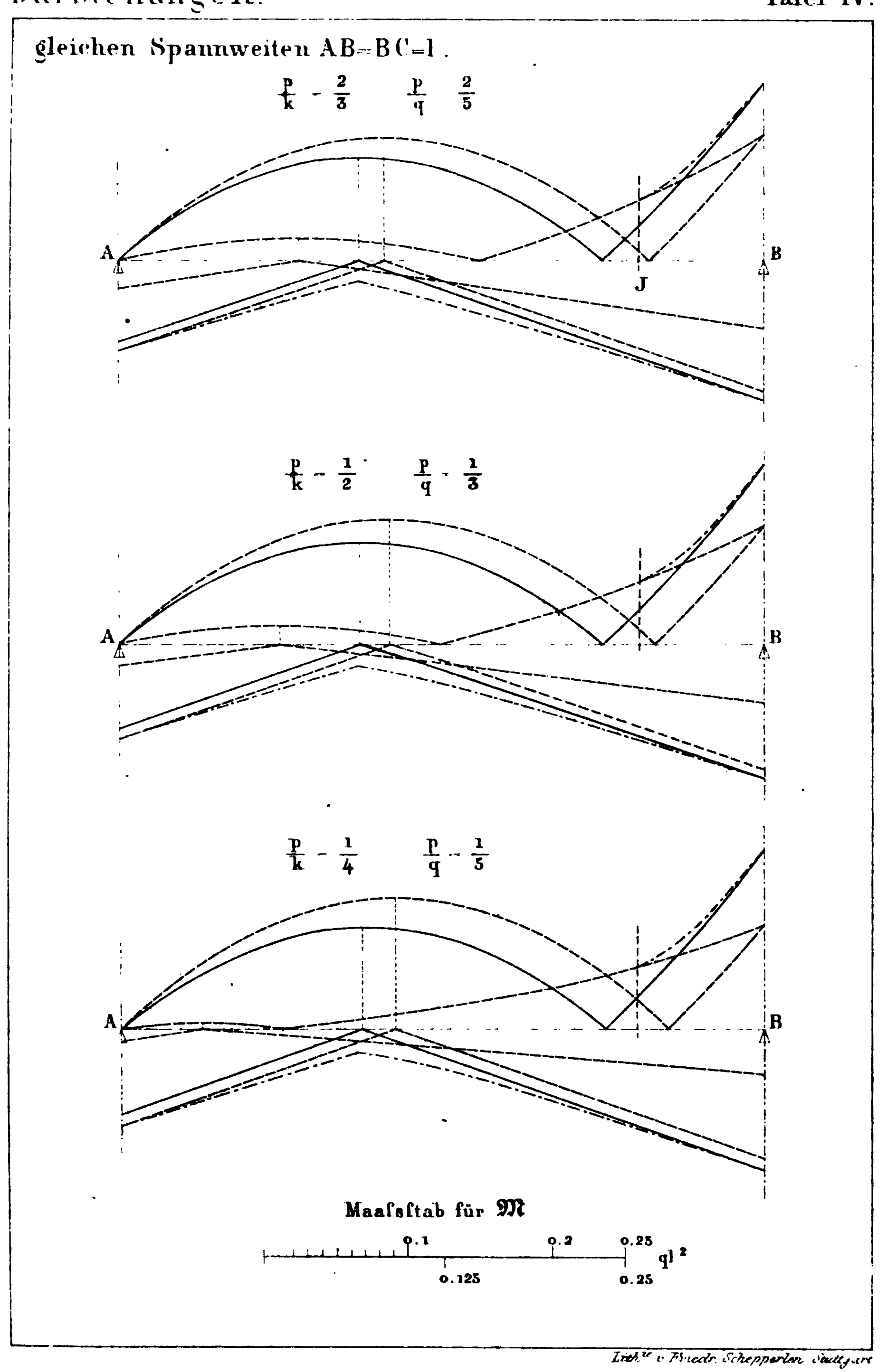
A B

Maafsſtab für die Längen

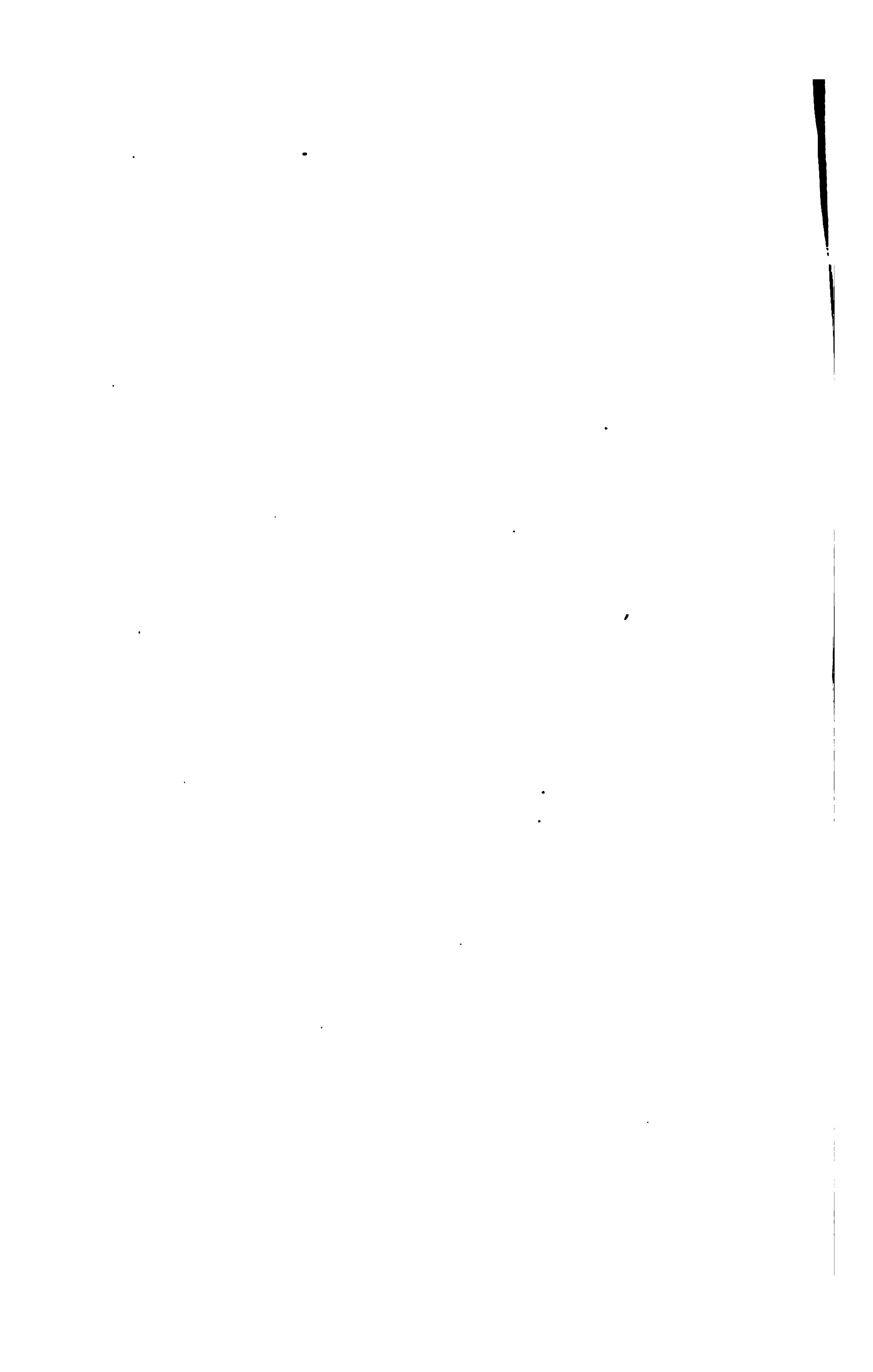
0.1 0.3 0.5 1.0 l

Maafsſtab für 𝔙

0.5 1.0 ql



Lith. v. Friedr. Schepperlen, Stuttgart



Tafel IV^b.

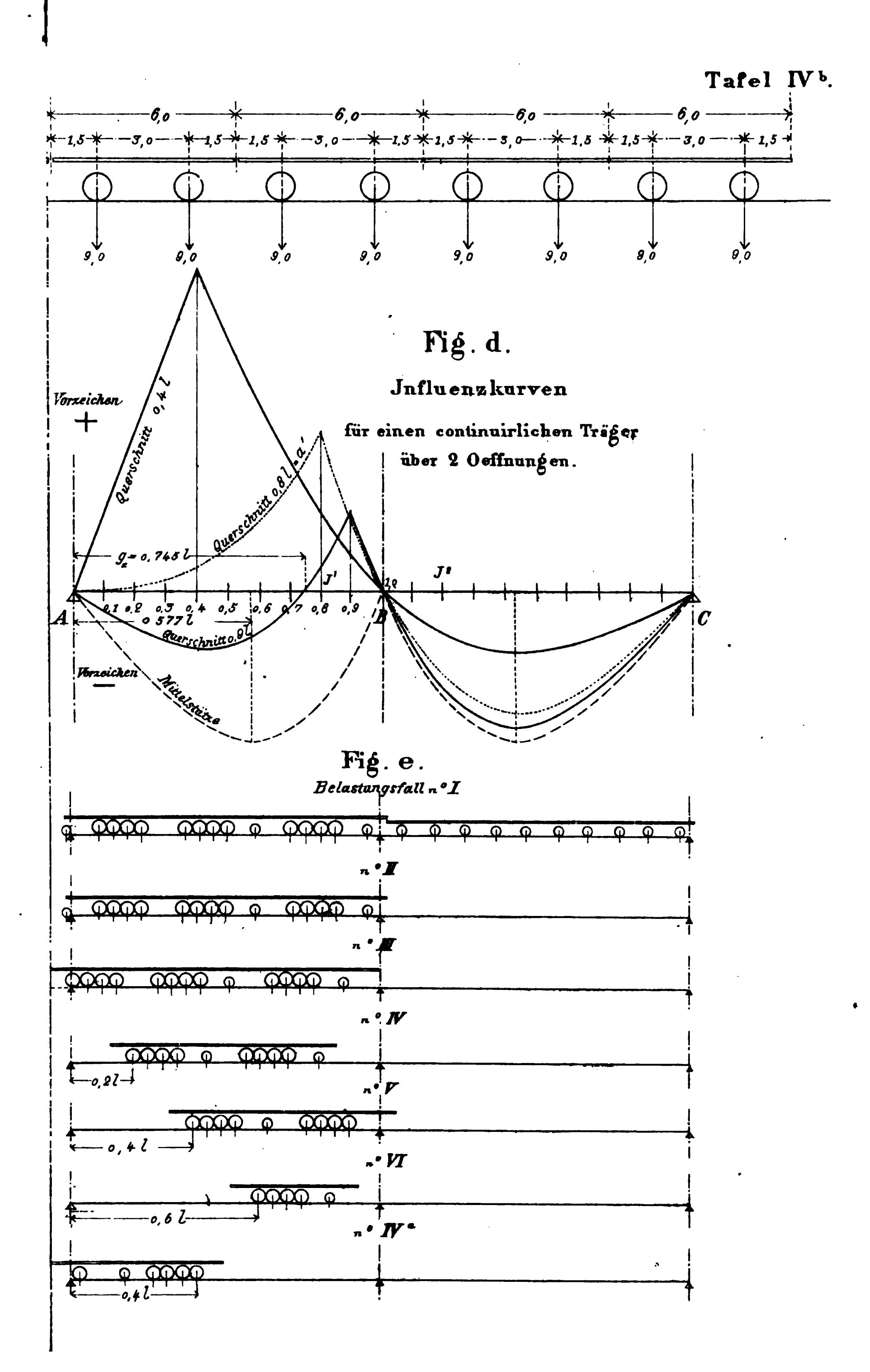


Fig. d.
Jnfluenzkurven
für einen continuirlichen Träger
über 2 Oeffnungen.
Vorzeichen +
Vorzeichen −
Querschnitt 0,4 l
Querschnitt 0,8 l = a'
Querschnitt 0,9 l
Mittelstütze
A
B
C
Fig. e.
Belastungsfall n° I
n° II
n° III
n° IV
n° V
n° VI
n° IVa

Fig. a.

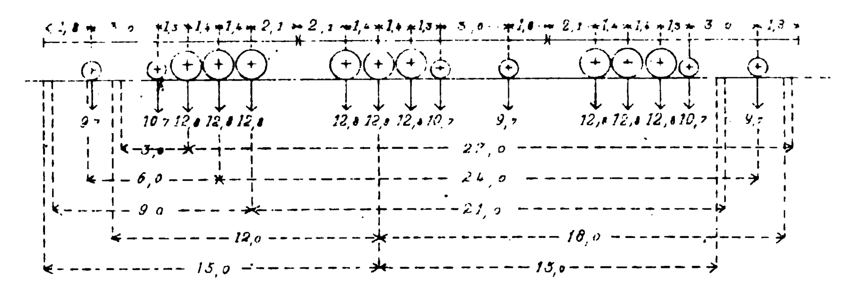


Fig. b.

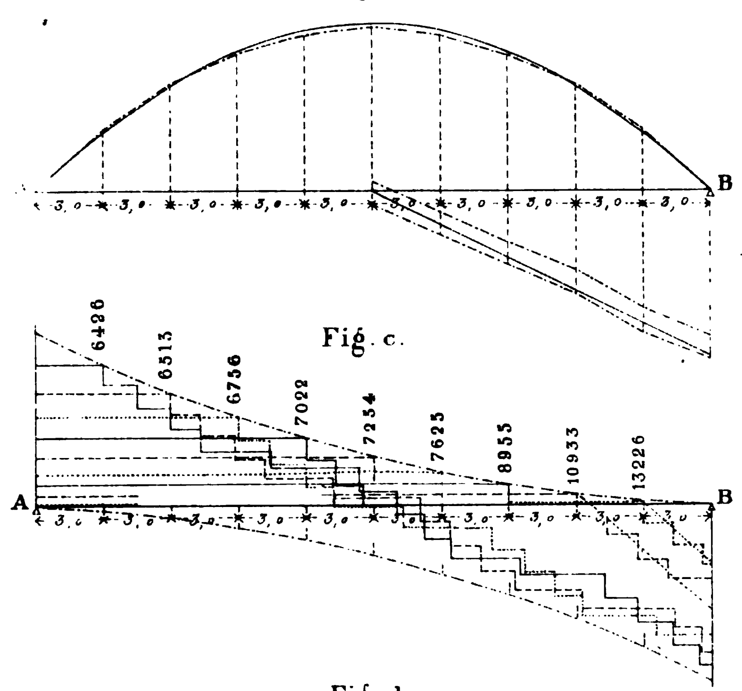
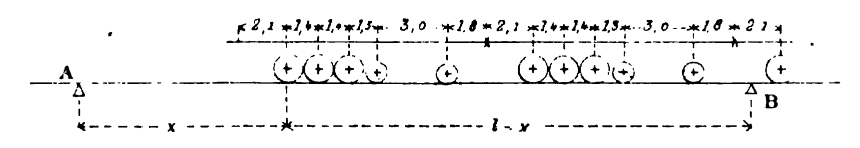


Fig. d.





Tafel III.

Fig. e.

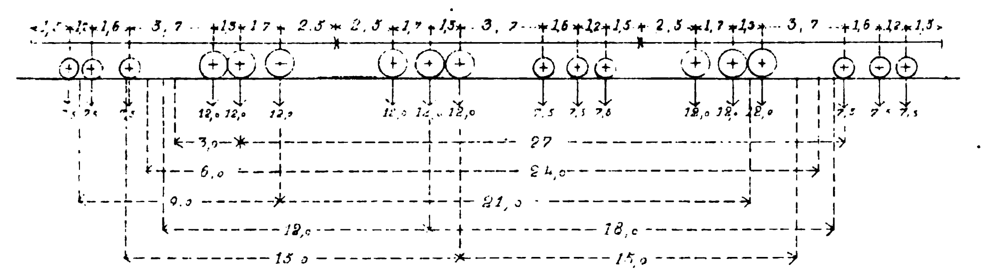


Fig. f.

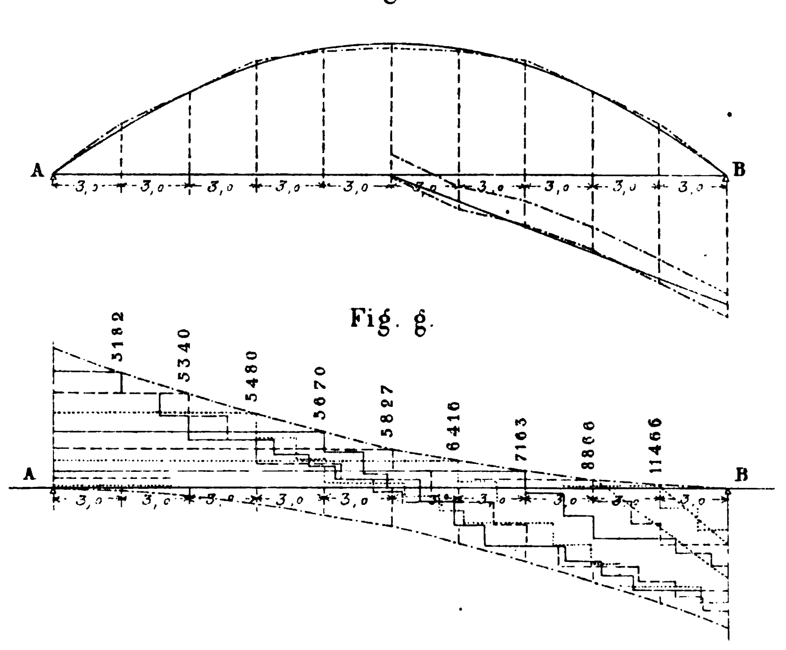
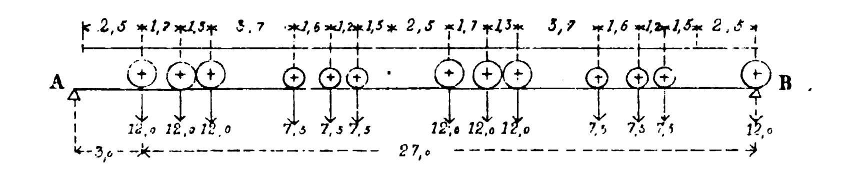


Fig. h



Maafsftab für 𝔐

Continuirlicher

Tafel IV.

ille.

...stet mit p

, q

...mit q B C mit p

, p , , q

Curven 𝔐

III

II

I

IV

A

B

0,4196 l

I

III

IV

II

0,125 $q l^2$

0

III — 𝔙

II

I

IV

$\frac{Kl}{16}$

$\frac{9}{16} K l$

$\frac{5}{8} q l$

$\frac{3}{8} p l$

A

B

Maximum

— 𝔙

$\frac{9}{16} l$

$\frac{5}{8} p l$

I

IV

$\frac{5}{8} q l$

$\frac{9}{16} K l$

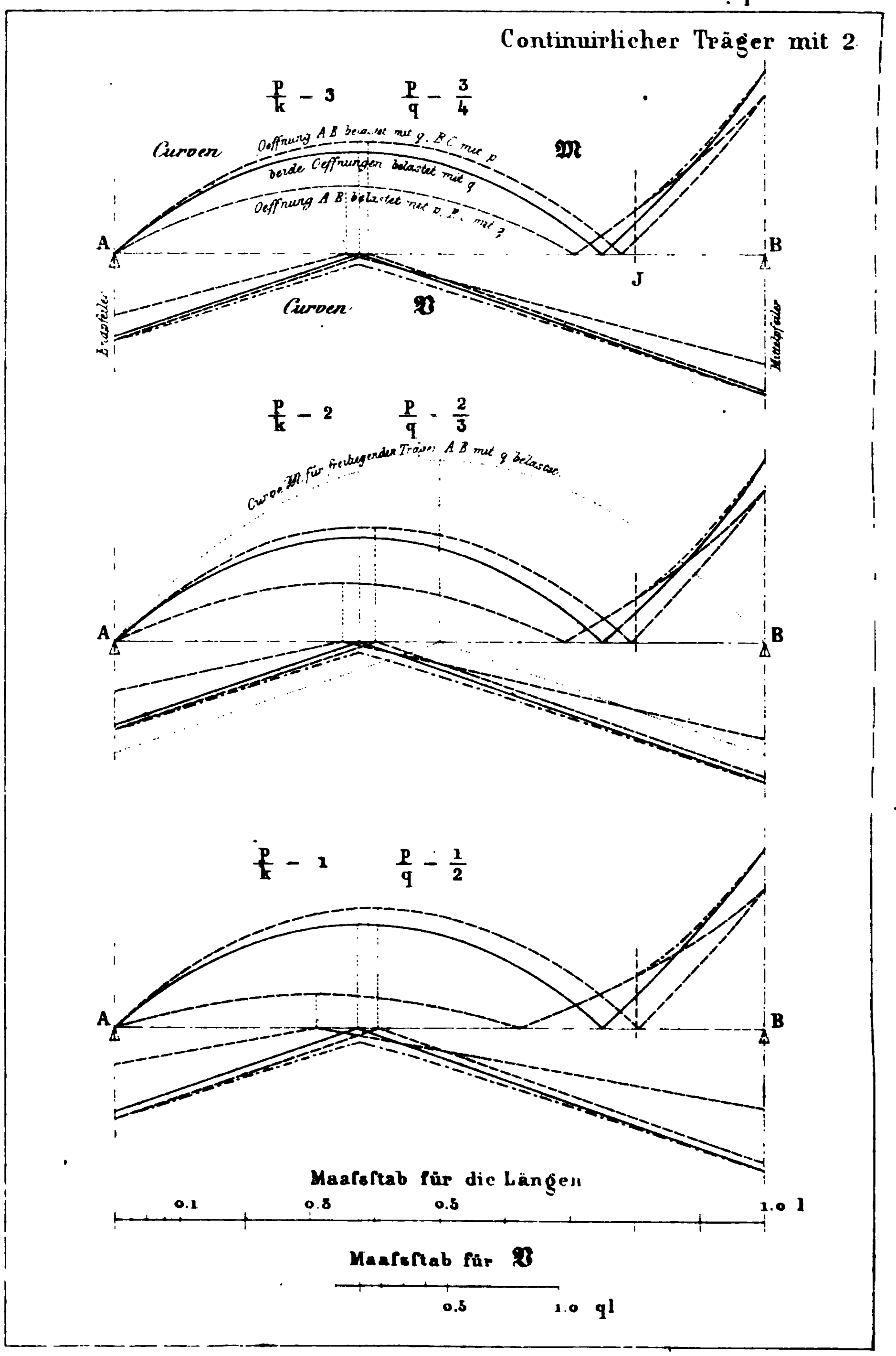
0

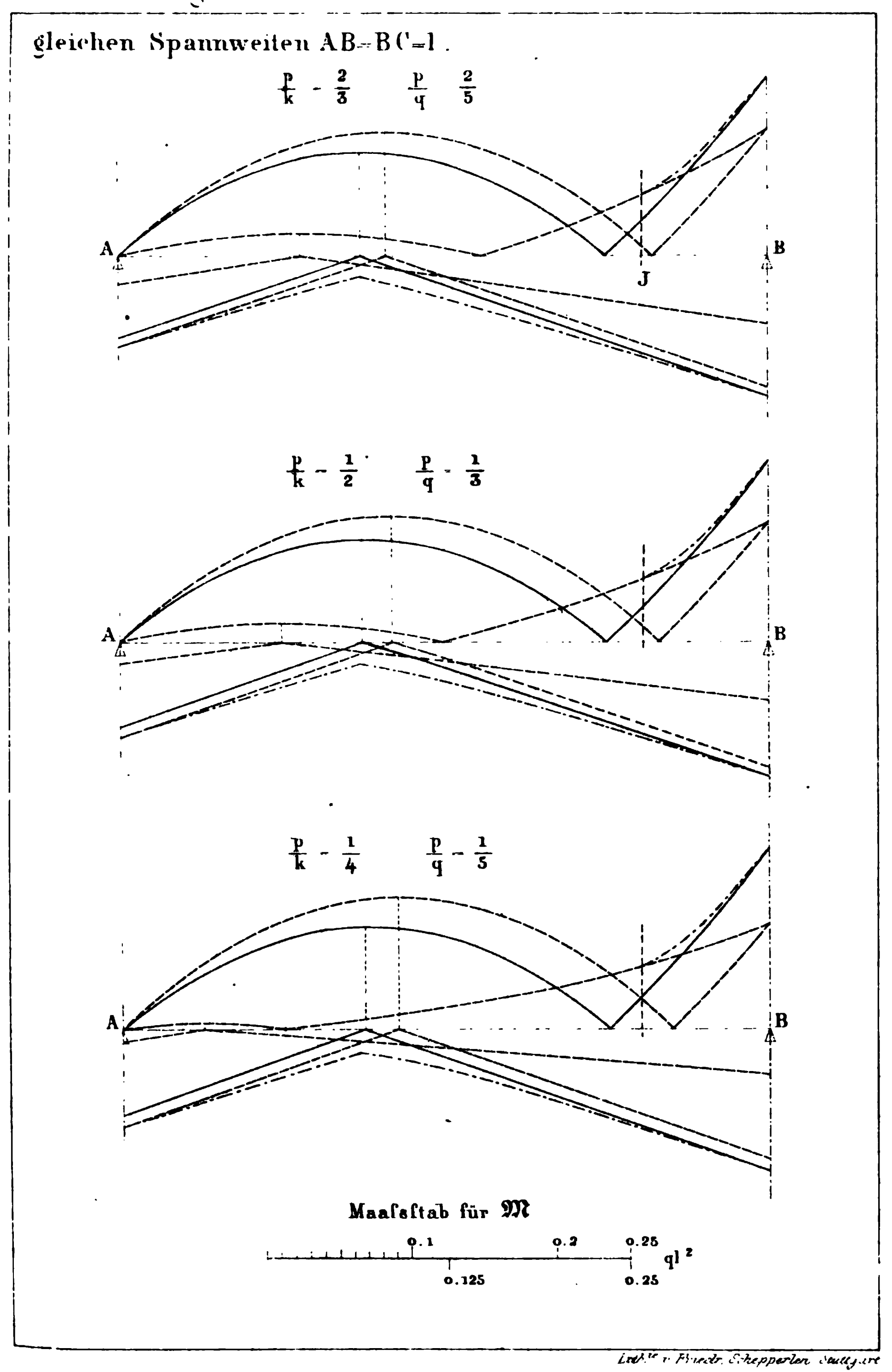
0

III

II

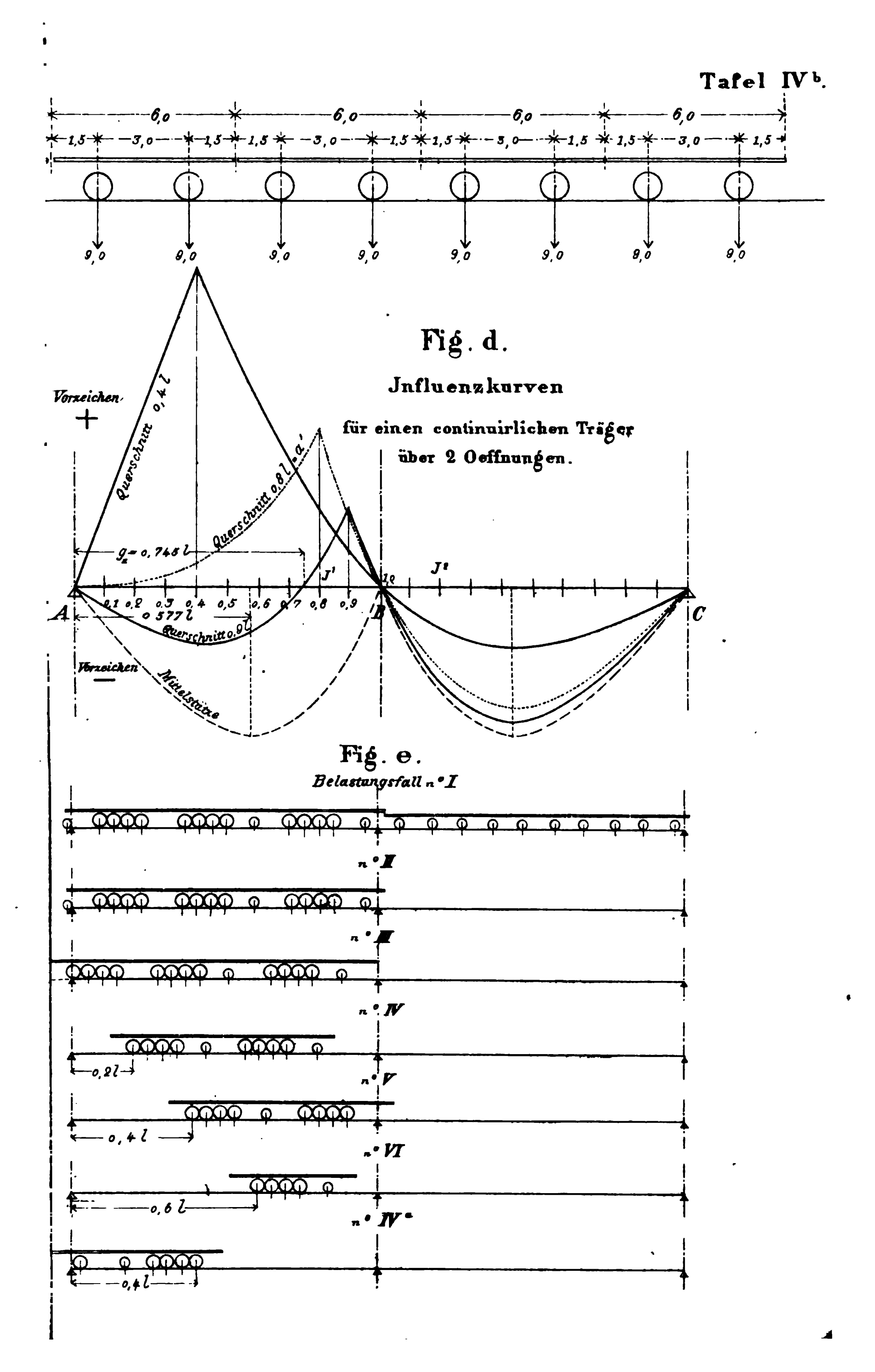
$\frac{Kl}{16}$


Continuirlicher Träger mit 2
p/k = 3
p/q = 3/4
Curven
Oeffnung A B belastet mit q, B C mit p
beide Oeffnungen belastet mit q
Oeffnung A B belastet mit p, B C mit q
M
A
B
J
Curven
V
Endpfeiler
Mittelpfeiler
p/k = 2
p/q = 2/3
Curve M für freiliegenden Träger A B mit q belastet.
A
B
p/k = 1
p/q = 1/2
A
B
Maafsftab für die Längen
0.1
0.3
0.5
1.0 l
Maafsftab für V
0.5
1.0 ql

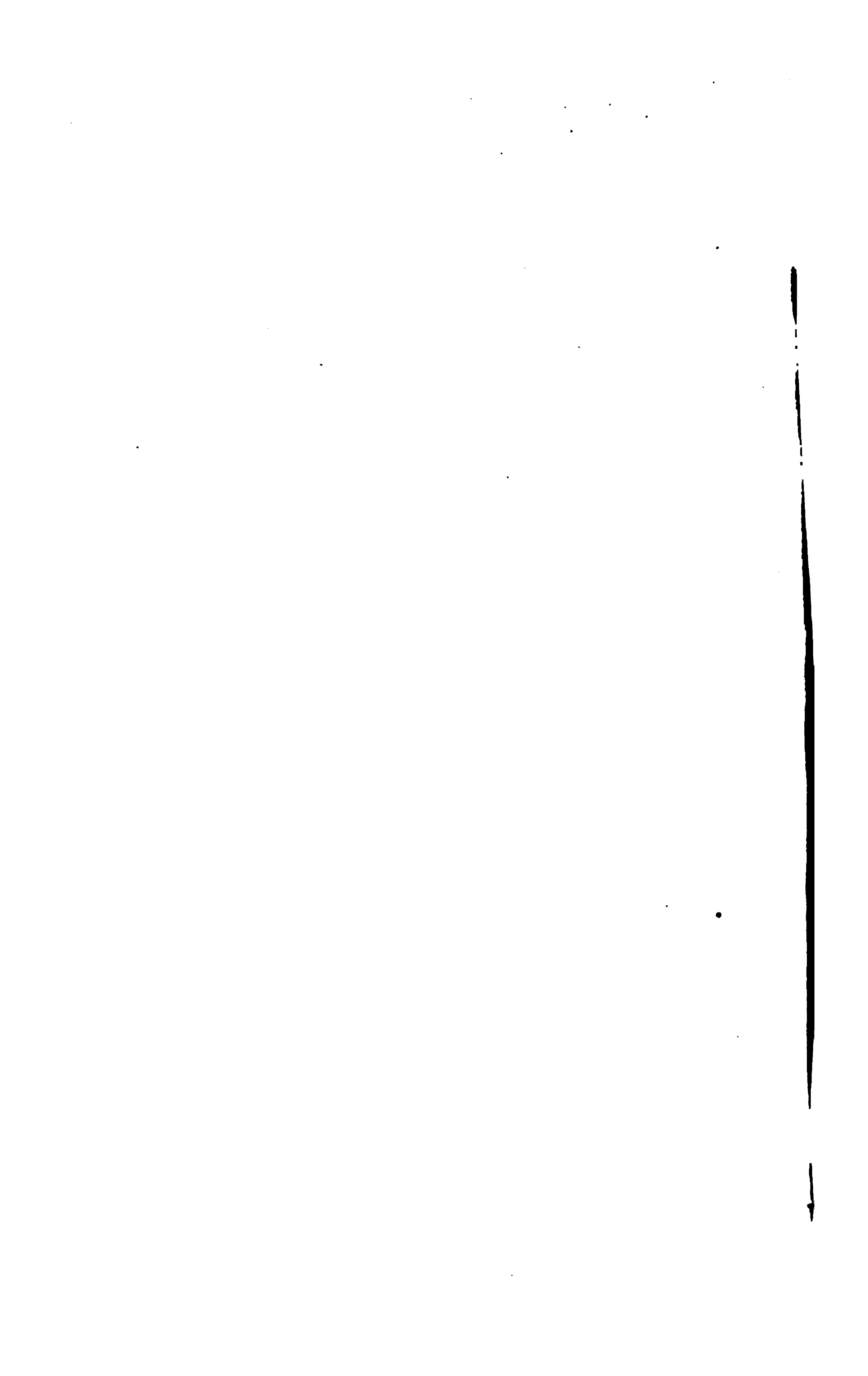


Lith. v. Friedr. Schepperlen, Stuttgart

Tafel IV b.



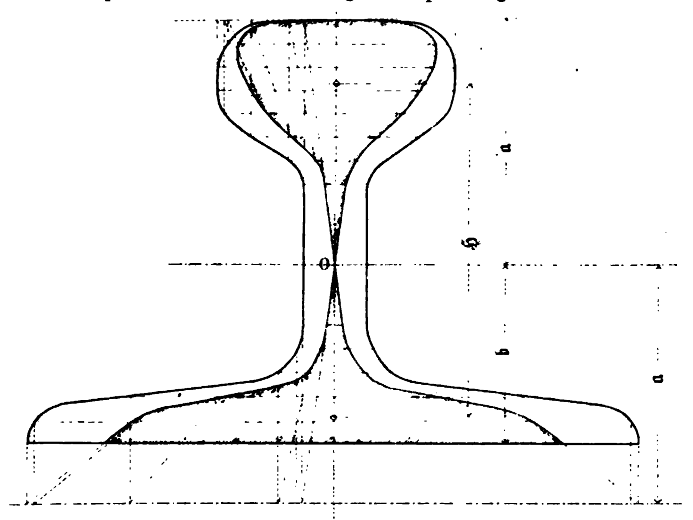
6,0
6,0
6,0
6,0
1,5
3,0
9,0
Fig. d.
Jnfluenzkurven
für einen continuirlichen Träger
über 2 Oeffnungen.
Vorzeichen +
Querschnitt 0,4 l
Querschnitt 0,8 l = a'
Querschnitt 0,9 l
Mittelstütze
Vorzeichen —
A
B
C
J'
J²
0,577 l
Fig. e.
Belastungsfall n° I
n° II
n° III
n° IV
n° V
n° VI
n° IV a
0,2 l
0,4 l
0,6 l



Schiene der Metropolitan Railway in London.

Fig. 1.

Kopf der Schiene auf Zug in Anspruch genommen

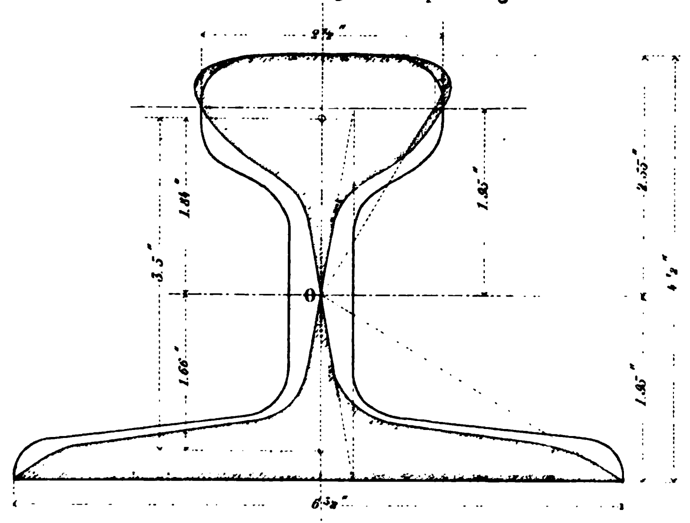


Jnhalt der schraffirten Fläche = 2,49 □ Zoll englisch $\mathfrak{H}$ = 3,5"

$\frac{\Theta}{a}$ = 2,49 × $\mathfrak{H}$ = 8,715.

Fig. 2.

Fufs der Schiene auf Zug in Anspruch genommen.



Jnhalt der schraffirten Fläche = 3,26 □ Zoll englisch.

$\frac{\Theta}{a}$ = 3,26 × $\mathfrak{H}$ = 11,4.

DER

BAU DER BRÜCKENTRÄGER

mit

besonderer Rücksicht auf

Eisen-Constructionen

von

Fr. Laissle und **Ad. Schübler,**

Ingenieuren.

Zweiter Theil.

Stuttgart.

Verlag von Paul Neff.

1871.

Druck von Woerner & Comp. in Stuttgart.

Vorrede zum zweiten Theil.

Der zweite Theil des „Bau's der Brückenträger" enthält drei Abschnitte, nämlich Fachwerkbrücken, sodann Gitterbrücken und zuletzt einige Nachträge und Schlussbetrachtungen.

Die meisten der in den letzten Jahren erbauten eisernen Brücken gehören in die Classe der Fachwerkbrücken, welche auch in dem vorliegenden zweiten Theile besonders eingehend behandelt sind und wobei die Arbeiten der Herren J. W. Schwedler in Berlin und H. Gerber in Nürnberg (zur Zeit in Mainz) sehr werthvolle Beispiele dargeboten haben.

Die Gitterbrücken sind neuerdings scheinbar in den Hintergrund getreten; doch dürften in vielen Fällen (insbesondere bei continuirlichen Trägern) Gitterwerke mit steifen Stäben sich immer noch als vortheilhafteste Lösung darbieten, abgesehen davon, dass schon der Vollständigkeit wegen eine entsprechende Behandlung dieser Classe der Balkenbrücken nothwendig ist.

Die im siebenten Abschnitte gegebenen Nachträge hätten früheren Abschnitten eingereiht werden können, sind aber der Uebersichtlichkeit

wegen besser abgesondert behandelt. Die Schlussbetrachtungen weisen auf die im vierten, fünften und sechsten Abschnitte eingeschalteten Beispiele, ausgeführter Brücken-Constructionen hin, deren nunmehr eine ansehnliche Zahl der Rechnung unterzogen und bezüglich der Constructionsweise sowie der Details insbesondere auch durch die Holzschnitte und lithographirten Tafeln näher erläutert sind.

Stuttgart, den 8. Sept. 1870.

Die Verfasser.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Fünfter Abschnitt.

Entwicklung der practischen Regeln für Fachwerkbrücken.

§. 15. Theorie der Fachwerkbrücken.

§. 16. Fachwerke mit geradlinig horizontalen Gurtungen.

§. 17. Die parabolischen Träger.

§. 18. Gekrümmte nicht parabolische Träger.

Sechster Abschnitt.

Die Gitterbrücken.

§. 19. Theorie der Gitterbrücken.

§. 20. Gitterbrücke mit beiderseits gleichen Stäben ohne Vertikalständer.

§. 21. Gitterbrücken mit flachen Stäben und Vertikalständern.

§. 22. Gitterbrücken mit steifen Streben und flachen Zugbändern.

Siebenter Abschnitt.

Ergänzungen und Schlussbetrachtungen.

§. 23. Ueber Röhrenbrücken.

§. 24. Ueber Hängbrücken.

Anhang.

Fünfter Abschnitt.

Entwicklung der praktischen Regeln für Fachwerkbrücken.

§. 15. Theorie der Fachwerkbrücken.

122. Die bezeichnende Eigenschaft der Fachwerkträger ist, dass deren Gurtungen durch Streben (Pfosten, Zugbänder, Bolzen,) zu einer Reihe fester Dreiecke verbunden werden, so dass der Fachwerkträger als ein unverrückbares System von Streben und Gurtungsgliedern sich darstellt. — Es ist eine wesentliche Bedingung, dass die einzelnen Glieder des Fachwerks vorzugsweise und möglichst ausschliesslich nur nach ihrer Längenrichtung in Anspruch genommen, d. h. gezogen oder gedrückt sind. — Nennt man

- O die Kraft im betrachteten Stück der oberen Gurtung,
- U die Kraft dessgleichen in der unteren Gurtung,
- Ω den Querschnitt des betrachteten Gurtungsstücks,
- N die Kraft in einer Strebe,
- ω den Querschnitt der betrachteten Strebe,
- $\mathfrak{A}$ die Spannung in einem gezogenen Gliede per Quadrat-Einheit,
- $\mathfrak{B}_m$ dessgleichen die mittlere Pressung in einem gedrückten Gliede,

so ist nach den Gesetzen der Festigkeitslehre, Gleichung 20)

für die obere Gurtung:

$$\mathfrak{A} \text{ oder } \mathfrak{B}_m = \frac{O}{\Omega} \quad \ldots\ldots \quad 166)$$

für die untere Gurtung:

$$\mathfrak{A} \text{ oder } \mathfrak{B}_m = \frac{U}{\Omega} \quad \ldots\ldots \quad 167)$$

für eine Strebe:

$$\mathfrak{A} \text{ oder } \mathfrak{B}_m = \frac{N}{\omega} \quad \ldots\ldots \quad 168)$$

Wenn Streben verschiedener Richtung zu unterscheiden sind, so bezeichnen

V die Kraft in einer vertikalen Strebe (Pfosten, Zuganker, Bolzen),

T die Kraft in einer schiefen Strebe, deren Richtung von der Strebenkraft N abweicht,

wonach Gleichung 168) übergeht in

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A} \text{ oder } \mathfrak{B}_m = \dfrac{T}{\omega} \\ \mathfrak{A} \text{ oder } \mathfrak{B}_m = \dfrac{V}{\omega}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 168)$$

Die mittlere Pressung $\mathfrak{B}_m$ ist bei kürzeren Stäben gleich zu setzen der grössten im Stab herrschenden Pressung $\mathfrak{B}$, bei längeren Stäben wird letztere durch die in §. 3 entwickelte Gleichung 76) gefunden, wonach

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m\left(1 + K\,\frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad \ldots\ldots \quad 169)$$

Es bezeichnet hier L die freie Länge des betrachteten Gurtungsglieds (zu vergleichen Nr. **37**.) Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts im Sinne der voraussichtlichen Biegung, und gibt der Ausdruck $\left(1 + K\,\frac{\omega L^2}{\Theta}\right)$ an, um wie viel die relativ rückwirkende Festigkeit gegen die absolut rückwinkende Festigkeit zurücktritt; die Coeffizienten K sind durch Tabelle XI., die Reihe der zulässigen Werthe $\mathfrak{B}_m$ durch Tabelle XIV. gegeben.

123. Die Eintheilung der Fachwerkträger in Dreiecke bedingt, dass an den Endpunkten der Streben im Allgemeinen wenigstens 2 Streben in den Gurtungen zusammentreffen, wesshalb die Endpunkte sich als Knotenpunkte des Fachwerks darstellen. — Da die Glieder eines Fachwerks nur nach ihrer Längenrichtung in Anspruch genommen werden sollen, so folgt daraus, dass die Belastung der Fachwerkträger streng genommen nur in den Knotenpunkten eintreten soll. Diess geschieht im Allgemeinen durch Vermittlung von Zwischenträgern und mittelst Querträgern, welche in der Regel den vorgenannten Zwischenträgern als Auflager dienen und entweder in den oberen oder unteren Knotenpunkten befestigt oder auch an Vertikalstreben (Ständern, Pfosten) angebracht sind.

Tritt jedoch die Last zwischen zweien Knotenpunkten in die Gurtung ein, so wird die relative Festigkeit der letzteren daselbst in Anspruch genommen und muss die hierdurch hervorgerufene Spannung (beziehungsweise Pressung) zu der im betrachteten Gurtungsstück herrschenden Fachwerkspannung (Pressung) addirt werden; bei Bestimmung dieser letzteren denkt man sich aber die Belastung der Gurtung nach dem Hebelsgesetz (nach Um-

ständen jedoch mit Berücksichtigung vorhandener Continuität) auf die Knotenpunkte vertheilt; es gilt diess insbesondere auch bezüglich des Eigengewichts der einzelnen Constructionsglieder, welches wie eine zwischen den Knotenpunkten eintretende Last wirkt. — Da man das Eigengewicht der Brücke gleichförmig per Längeneinheit vertheilt annimmt, so werden bei gleicher Distanz der Knotenpunkte (gleicher Fachweite) in der Regel sämmtliche Knotenpunkte durch das Eigengewicht der Hauptträger gleich belastet sein, während die Fahrbahntafel auf die oberen oder unteren Knotenpunkte oder auch auf beide gleichförmig vertheilt ist. —

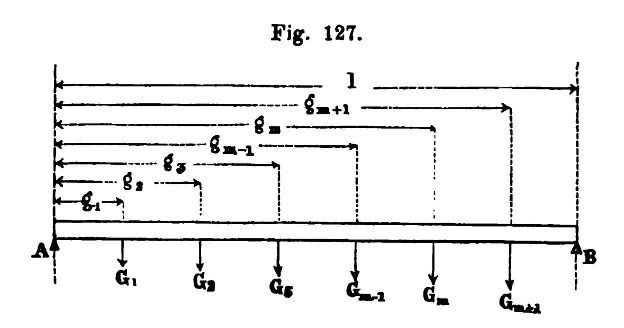
124. Wie in Nr. **4** entwickelt, bezeichnet in einem Trägerfragment, welches wir uns einerseits durch einen Vertikalschnitt x abgegränzt denken

𝔙 die Vertikalkraft, d. h. die algebraische Summe der vertikalen Composanten der am Fragmente thätigen äusseren Kräfte, numerisch gleich dem Vertikal-Widerstand ΣY im Querschnitt x,

𝔐 das Angriffs-Moment, d. h. das Moment der äusseren Kräfte in Beziehung auf den fraglichen Querschnitt x, welches Moment wiederum numerisch gleich ist dem auf irgend einen Punkt des Querschnitts x bezogenen Widerstandsmoment ΣXy der im fraglichen Schnitt x herrschenden inneren Kräfte. —

Da beim Fachwerk die Lasten in einzelnen Punkten, den Knotenpunkten eintreten, so dienen zur Bestimmung der Grössen 𝔐 und 𝔙 zunächst die Gleichungen 100—102), welche wir neu anschreiben, und zwar mit Auslassung der Glieder mit p (da wir nach dem Vorhergehenden auch das Eigengewicht in den Knotenpunkten vereinigt denken):

Fig. 127.



Bezeichnet

l die Spannweite zwischen 2 Auflagern A und B,

$G_1, G_2 \ldots . G_m$ die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden Gewichte,

$g_1, g_2 \ldots . g_m$ die zugehörigen Abscissen der Knotenpunkte von A aus gemessen,

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots . \mathfrak{M}_m$ die Angriffsmomente in Bezug auf die Knotenpunkte 1, 2 .... m,

$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2 \ldots . \mathfrak{V}_m$ die auf Fachlänge constante Vertikalkraft auf Schnitte links von den Knotenpunkten 1, 2 .... m bezogen, so ist:

$$170) \begin{cases} A = \left(1 - \frac{g_1}{l}\right) G_1 + \left(1 - \frac{g_2}{l}\right) G_2 + \left(1 - \frac{g_3}{l}\right) G_3 + \ldots \\ B = \frac{g_1}{l} G_1 + \frac{g_2}{l} G_2 + \frac{g_3}{l} G_3 + \ldots \end{cases}$$

somit die Vertikalkraft im Felde links vom Punkte m

$$\mathfrak{V}_m = A - G_1 - G_2 \ldots . - G_{m-1} \quad . \quad . \quad 171)$$

und das Angriffsmoment am Knotenpunkt m

$$172) \; \mathfrak{M}_m = A g_m - G_1 (g_m - g_1) - G_2 (g_m - g_2) - G_{m-1} (g_m - g_{m-1}).$$

Die Gleichungen 171) und 172) können auch auf continuirliche Träger angewendet werden, sobald die Auflagerreactionen bekannt sind (wobei die Spannweiten $AB = a$, $BC = b$ eingeführt werden), und zwar bleiben dieselben für die Oeffnung AB ganz unverändert; für die Oeffnung BC ist die Auflagerreaction B mit ihrem Hebelsarm $(g_m - a)$ einzusetzen, wie folgt:

$$171^a) \quad \mathfrak{V}_m = A - G_1 - G_2 \ldots . + B \ldots . - G_{m-1}.$$

$$172^a) \begin{cases} \mathfrak{M}_m = A g_m - G_1 (g_m - g_1) - G^2 (g_m - g_2) \ldots .. \\ \qquad + B (g_m - a) - \ldots . - G_{m-1} (g_m - g_{m-1}). \end{cases}$$

Wenn man nach Gleichung 172 (beziehungsweise 172ª) den Werth $\mathfrak{M}_{m-1}$ bildet und von $\mathfrak{M}_m$ abzieht, so erhält man

$$\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1} = \mathfrak{V}_m (g_m - g_{m-1})$$

woraus

$$\mathfrak{V}_m = \frac{\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}}{g_m - g_{m-1}} \ldots \ldots 173)$$

Die Grösse $\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}$ stellt den Zuwachs des Angriffsmoments auf die Fachlänge $d = g_m - g_{m-1}$ dar; bei unendlich kleiner Fachlänge, d. h. stetig zunehmendem $\mathfrak{M}$ geht Gleichung 173) über in die im ersten Abschnitte entwickelte Gleichung 18):

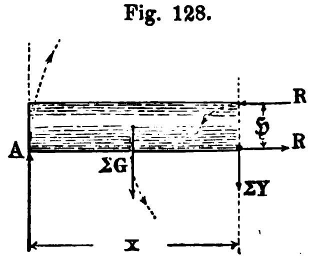
$$\mathfrak{V} = \frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,x} \ldots .. 173^a)$$

Indem wir die Richtung der Schwere als positiv annehmen, so ist $\mathfrak{V}$ negativ, solange $A > (G_1 + G_2 + G_{m-1})$, und folgt hieraus, dass negative $\mathfrak{V}$ eine der Auflagerreaction gleiche Richtung haben.

$\mathfrak{M}$ hat beim freiaufliegenden Träger stets dasselbe Vorzeichen, welches wir als das positive annehmen, woraus hervorgeht, dass die Drehung, welche der Auflagerreaction entspricht, als positiv angenommen werden muss; bei continuirlichen Trägern wird $\mathfrak{M}$ in der Nähe der Zwischenstützen negativ

und überwiegt auf dem betreffenden Trägerabschnitte das Moment der nach abwärts gerichteten Lasten über das Moment der Auflager-Reactionen. Da ΣY und ΣXy den Grössen 𝔙, beziehungsweise 𝔐 (zu vergleichen N⁰. **4**), gleich aber direct entgegengesetzt sind, so folgt aus Vorstehendem, dass negative ΣY der Richtung der Schwere gleichgerichtet sind, und dass die einem positiven ΣXy entsprechende Drehung dem Moment des Auflagerdrucks entgegengesetzt ist. (Vergl. hierüber Fig. 128.)

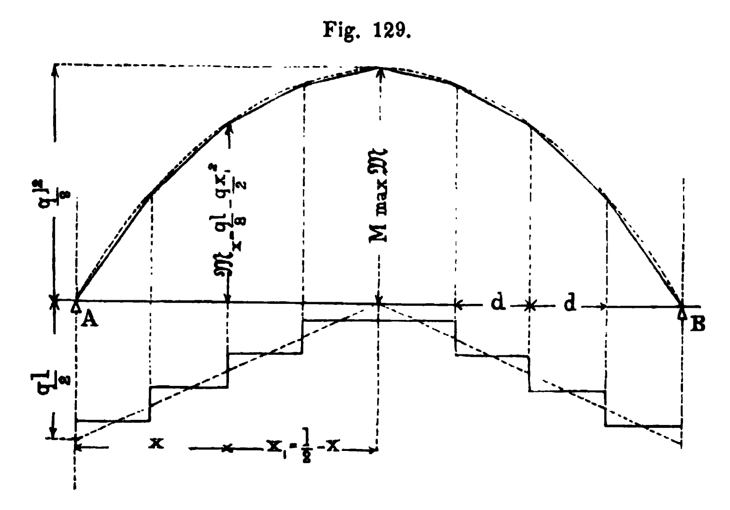
Fig. 128.



Diese Betrachtungen sind entscheidend, wenn es sich darum handelt, ob ein Constructionsglied auf Druck oder Zug in Anspruch genommen ist.

125. Wenn man in Fig. 127 die Distanzen sämmtlicher Knotenpunkte und ebenso die an denselben wirkenden Gewichte sämmtlich je gleich gross annimmt, wenn man sodann die hienach mittelst der Gleichungen 171) und 172) berechneten 𝔙 und 𝔐 als Ordinaten aufträgt, so findet man, dass die sämmtlichen für die Knotenpunkte berechneten 𝔐 in einer Parabel von vertikaler Axrichtung liegen, wie solches in Fig. 129 dargestellt ist, während aus der constanten Zunahme der Vertikalkraft direkt folgt, dass die für die aufeinander folgenden Felder berechneten, als Ordinaten in der Fachmitte aufgetragenen 𝔙 in einer Geraden liegen

Fig. 129.



müssen, welche nach Gleichung 171) in der Mitte der Spannweite durch die Abscissenaxe hindurchgeht.

Wie aus den vorstehenden Erläuterungen und insbesondere aus Gleichung 171) hervorgeht, ist die Vertikalkraft eine zwischen zweien Knotenpunkten constante Grösse, wesshalb die Fachwerkskurve 𝔙 ein treppenförmiges Polygon bildet, wie solches in Fig. 129 gleichfalls dargestellt ist. — Ist aber 𝔙 auf Fachlänge constant, so folgt aus der in Gleichung 173ª) gegebenen Relation $\mathfrak{V} = \frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,x}$ sofort, dass die Curve 𝔐 zwischen zweien Knotenpunkten geradelinig sein muss, dass diese Curve somit ein in die Parabel einbeschriebenes Polygon bildet.

Wenn die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden Lasten der auf Fachlänge vertheilten **gleichförmigen Maximallast** q entsprechen, so ist das Fachwerkpolygon 𝔐 in die Parabel der gleichförmig vertheilten Maximallast einbeschrieben, die einzelnen Punkte der Parabel finden sich, wenn die Scheitelordinate $\frac{q\,l^2}{8}$ bekannt ist, am bequemsten nach Gleichung 93ᵇ):

$$\mathfrak{M} = \frac{q\,l^2}{8} - \frac{q\,x_1^{\,2}}{2} \quad \ldots\ldots 174)$$

wo x_1 den Horizontalabstand des betrachteten Kurvenpunkts von der Trägermitte bezeichnet.

Das in Figur 129 dargestellte Verfahren bleibt dasselbe, wenn auch die Knotenpunkte verschiedene Distanz haben; solange nämlich die Last gleichförmig vertheilt ist, und auf die Knotenpunkte nach dem Hebelgesetz übergeht, müssen sämmtliche Eckpunkte in der Parabel der gleichförmigen Maximallast liegen und wird ferner in der Mitte jedes Feldes die der Maximallast entsprechende Gerade 𝔙 mit der treppenförmigen Fachwerkkurve 𝔙 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

126. Das Verhältniss zwischen den Fachwerkkurven 𝔐 und 𝔙 einerseits und den der stetig wachsenden Last entsprechenden Kurven $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{V}_x$ anderseits kann man sich auch dadurch klar machen, dass man von den Ordinaten der letzteren die den **Zwischenträgern** entsprechenden Vertikalkräfte $\Delta\mathfrak{V}$ und Angriffsmomente $\Delta\mathfrak{M}$ abzieht, wobei man sich bezüglich der letztern des Satzes erinnert, dass die Differenz zweier Gegenpaare (Kräftepaare) wiederum ein Gegenpaar sein muss.

Aus vorstehender Anschauung folgt direct, dass beiderlei Kurven jeweils da zusammenfallen, wo $\Delta\mathfrak{V}$ beziehungsweise $\Delta\mathfrak{M}$ gleich Null sind. Angewendet auf den **gleichförmig** belasteten Träger mit frei aufliegenden Zwischenträgern ergiebt sich, dass die 𝔐 in den **Knotenpunkten**, die 𝔙 dagegen in der **Mitte** der einzelnen Felder für die Totalconstruction, sowie für das Fachwerk der Hauptträger identisch sein müssen, wie diess schon in N⁰· **125**. sich ergeben hat. — **Aendert** sich die Belastungsart

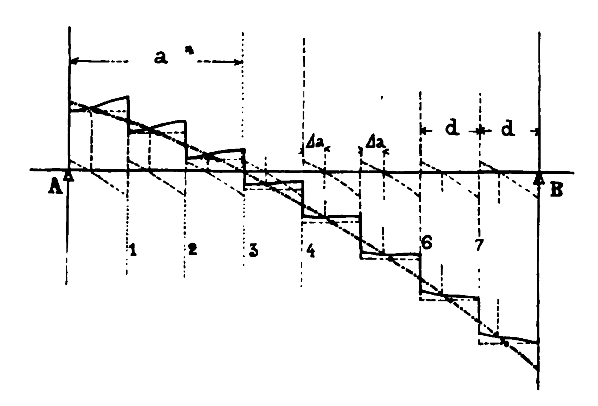
innerhalb eines Faches, so ist der Punkt $\varDelta\mathfrak{V} = o$, welcher zugleich max $\varDelta\mathfrak{M}$ angiebt, nach dem Hebelgesetz zu bestimmen.

Wenn ferner die Zwischenträger als continuirliche Balken betrachtet werden müssen, so ist $\varDelta\mathfrak{M}$ an den Knotenpunkten nicht Null, sondern hat daselbst einen bestimmten, negativen Werth, und der Schnittpunkt der beiderlei Kurven $\mathfrak{M}$ (d. h. der Punkt $\varDelta\mathfrak{M} = o$) ist durch dieselben Gesetze bestimmt, welche in §. 8 für continuirliche Träger dargestellt sind; ebenso findet sich auch der Punkt $\varDelta\mathfrak{V} = o$, welcher wiederum mit dem Punkte max $\varDelta\mathfrak{M}$ zusammenfällt.

127. Die grössten Werthe der Vertikalkraft finden, wie in N°· **59** erläutert, bei einseitiger Belastung statt, und zwar beim frei aufliegenden Träger in jedem Abstande x dann, wenn die gleichförmig vertheilte Ueberlast gerade bis zum fraglichen Punkte x vorgerückt ist; zur Bestimmung der Kurve max $\mathfrak{V}_x$ dienen die Gleichungen 96), zur Bestimmung der gleichzeitigen $\mathfrak{M}_x$ die Gleichungen 97).

Die Kurve max $\mathfrak{V}_x$ stellt aber nicht die im Fachwerk wirkenden Vertikalkräfte dar, indem die von den Zwischenträgern aufgenommenen $\varDelta\mathfrak{V}$ noch in Abzug zu bringen sind; letzteres geschieht indem wir für jedes Feld die Kurve max $\varDelta\mathfrak{V}$ bilden, wie in Fig. 130ᵃ geschehen.

Fig. 130ᵃ.



Da nämlich in dieser Figur unter Annahme einer von A nach B vorrückenden, gleichförmig vertheilten Last, je für den vordersten Punkt der Ueberlast, sowohl $\mathfrak{V}_x$ als $\varDelta\mathfrak{V}$ aufgezeichnet sind, so ist auch für jede Stellung der Ueberlast ein genau bestimmter Werth der Fachwerks-Vertikalkraft $\mathfrak{V}_m$ als Differenz der Grössen $\mathfrak{V}_x$ und $\varDelta\mathfrak{V}$ gegeben, und wenn auch dieser Werth $\mathfrak{V}_m$ zunächst für die Spitze der Ueberlast berechnet ist, so ist er nicht minder

für die ganze Fachlänge gültig, indem die Vertikalkraft je auf Fachlänge constant ist. Die treppenförmige Fachwerkcurve, welche in Fig. 130ᵃ dargestellt ist, giebt also eine graphische Darstellung sämmtlicher Werthe $\mathfrak{V}_m$, welche bei stetig vorrückender Last je in dem Fache wirken, inner welchem das vordere Ende der Verkehrslast sich befindet — und giebt eben damit an, bis zu welchem Punkte jeweils die Ueberlast vorgerückt sein muss, um die grösste im betreffenden Fache überhaupt stattfindende Vertikalkraft hervorzurufen.

Wir ersehen aus Fig. 130ᵃ, dass zwischen $\mathfrak{V} = o$ und dem Auflager B das für die Fachmitte sich ergebende max $\mathfrak{V}_x$ ziemlich annähernd dem grössten im Fachwerke stattfindenden $\mathfrak{V}_m$ entspricht, ebenso wie zwischen A und $\mathfrak{V} = o$, wo die einzelnen max $\mathfrak{V}_x$ negativ sind, das der Fachmitte entsprechende $\mathfrak{V}_x$ den kleinsten negativen Werth, also wiederum den relativ grössten Werth $\mathfrak{V}_m$ darstellt. — Wir ziehen hieraus den Schluss, dass das je für die Fachmitte gültige max $\mathfrak{V}_x$ die grösste im betreffenden Fache eintretende Fachwerks-Vertikalkraft $\mathfrak{V}_m$ darstellt und gründet sich hierauf das in Fig. 130ᵇ dargestellte Verfahren, wo die Last so-

Fig. 130ᵇ.

wohl von A als von B verrückend gedacht ist, und wo die relativ grössten, wie die relativ kleinsten Werthe von $\mathfrak{V}_m$ durch die treppenförmig geradlinigen Linien angegeben sind, welche zwischen sich alle möglichen Werthe von $\mathfrak{V}_m$ einschliessen.

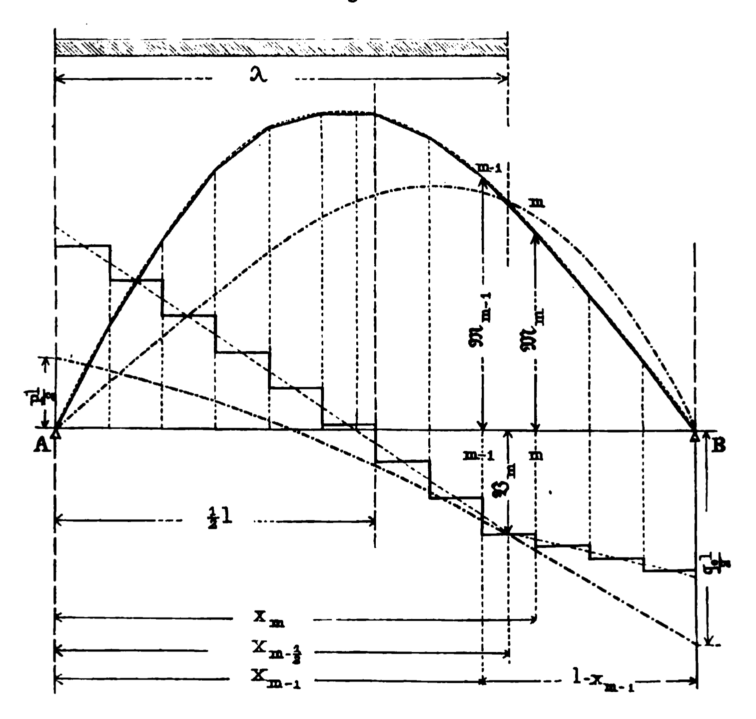
In Fig. 103ᵇ sind für die beiden Kurven $\mathfrak{V}_x$ auch die gleichzeitigen Werthe von $\mathfrak{M}_m$ eingetragen; indem man von diesen graphisch die Werthe $\Delta\mathfrak{M}$ abzieht, erhält man für die Fachmitte je gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}_m$. Da hiebei die Last jeweils bis zur betreffenden Fachmitte vorgerückt gedacht ist, so wird,

wenn wir die Fachlänge mit d bezeichnen, $\mathfrak{V}_m$ um den Werth $\frac{k\,d}{8}$ zu gross erhalten. Diese Differenz fällt weg, wenn man das im halbbelasteten Felde befindliche variable Gewicht im anstossenden belasteten Knotenpunkt concentrirt denkt, was eine übrigens kleine Modification der durch Gleichung 91) gegebenen Auflagerdrücke bedingt.

Fig. 130b, beziehungsweise das durch diese Figur dargestellte Verfahren kann direkte praktische Anwendung da finden, wo in jedem Fach neben max $\mathfrak{V}_m$ ein gleichzeitiger (mittlerer) Werth $\mathfrak{M}$ genügend ist, hauptsächlich aber dann, wenn einzelne Dimensionen lediglich von max $\mathfrak{V}_m$ abhängig sind, welche Maximalwerthe durch Fig. 130b ziemlich genau dargestellt sind, wie bereits oben erläutert ist.

128. Wenn zur Bestimmung der Querschnittdimensionen der einzelnen Fachwerksglieder je zwei oder mehrere gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ nothwendig sind, so ist Fig. 130b nicht mehr direct

Fig. 131.



anwendbar; es entspricht vielmehr jeder Länge der Ueberlast eine aus zwei Parabeln zusammengesetzte Kurve $\mathfrak{M}_x$, welche mit der

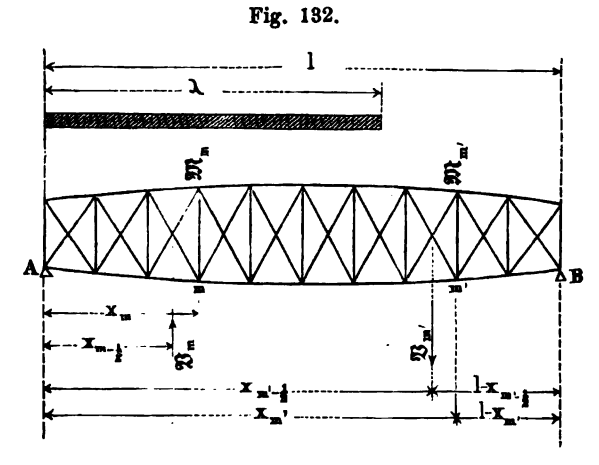
nach Gleichung 97) bestimmten, in Fig. 130^b. dargestellten Kurve $\mathfrak{M}$ nur in dem einen Punkte zusammenfällt, bis zu welchem die Ueberlast vorgerückt ist.

Fig. 131 stellt den Fall dar, wo die Ueberlast k von A bis zur Mitte des Feldes (m — 1) m vorgerückt ist, wo also in der bezeichneten Fachmitte die beiderlei Kurven $\mathfrak{M}_x$, sowie die beiderlei Kurven $\mathfrak{V}_x$ sich schneiden.

Nach dem in N$^{0.}$ **125.** entwickelten Verfahren sind für die angenommene Länge der Last die Fachwerkskurven eingezeichnet; die Fachwerkskurve $\mathfrak{V}$ fällt mit der gleichzeitigen Kurve $\mathfrak{V}_x$ stets in der Fachmitte zusammen, mit Ausnahme des halb belasteten Faches, woselbst entsprechend der Figur 130^a die dem Fachwerk entsprechende Horizontale um die Grösse $\frac{dk}{8}$ näher gegen die Abscissenaxe zu rücken wäre, falls man nicht — wie in Folgendem geschieht — den Abzug der Grösse $\frac{dk}{8}$ aus den in N$^{0.}$ **127.** angegebenen Gründen unterlässt und somit auch für diese Fachmitte $\Delta\mathfrak{V}$ gleich Null setzt. Die Fachwerkkurve $\mathfrak{M}$ fällt an den Knotenpunkten mit der Kurve $\mathfrak{M}_x$ zusammen, wie schon mehrfach bemerkt.

Indem wir nunmehr die Last bis zu irgend einer Fachmitte vorgerückt denken, und mit m einen beliebigen Knotenpunkt links vom Endpunkte der Last, mit m^1 einen beliebigen Knotenpunkt rechts bezeichnen, wie diess in beistehender Fig. 132 dargestellt ist, wenden wir zunächst die in N$^{0.}$ **59.** bis **62.** entwickelten Formeln auf das Fachwerk an; nennen wir daher

Fig. 132.



p das Eigengewicht der Brücke per Geleise- und Längeneinheit,

k ebenso die per Längeneinheit ausgedrückte Ueberlast,
$q = p + k$ die Maximallast,
so erhalten wir, indem wir im Uebrigen auf die Bezeichnungen beistehender Fig. 132 verweisen, für Bewegung der Last von A nach B:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{p\,l}{2} + \lambda k \frac{2\,l - \lambda}{2\,l} \ldots\ldots \\ B &= \frac{p\,l}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2\,l} \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad 175)$$

und ist somit für das zunächst A gelegene belastete Stück:

$$\mathfrak{V}_x = A - (k + p)\,x \ldots\ldots\ldots \quad 176)$$

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - (k + p)\frac{x^2}{2} \ldots\ldots \quad 177)$$

und für das zunächst B gelegene unbelastete Stück:

$$\mathfrak{V}_x = B - p\,(l - x) \ldots\ldots\ldots \quad 178)$$

$$\mathfrak{M}_x = B\,(l - x) - p\frac{(l - x)^2}{2} \ldots\ldots \quad 179).$$

Diese Werthe $\mathfrak{V}_x$ und $\mathfrak{M}_x$ fallen in der Fachmitte, beziehungsweise in den Knotenpunkten, mit den Fachwerkswerthen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ zusammen (erstere genau dann, wenn man sich, wie oben bemerkt, die im halbbelasteten Felde befindliche variable Last im anstossenden belasteten Knotenpunkte concentrirt denkt) und erhält man für das zunächst A gelegene belastete Stück:

$$\mathfrak{V}_m = A - (k + p)\,x_{m - 1/2} \ldots\ldots\ldots \quad 176^a)$$

$$\mathfrak{M}_m = A\,x_m - (k + p)\frac{x_m^{\,2}}{2} \ldots\ldots\ldots \quad 177^a)$$

und für das zunächst B gelegene unbelastete Stück:

$$\mathfrak{V}_{m'} = B - p\,(l - x_{m' - 1/2}) \ldots\ldots\ldots \quad 178^a)$$

$$\mathfrak{M}_{m'} = B\,(l - x_{m'}) - \frac{p\,(l - x_{m'})^2}{2} \ldots\ldots \quad 179^a)$$

Man kann nach den Gleichungen 176ᵃ) und 179ᵃ) sämmtliche Fachwerkgrössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ berechnen, wobei eine gleichförmig vertheilte Last von A nach B zu einer beliebigen Fachmitte vorgerückt gedacht ist.

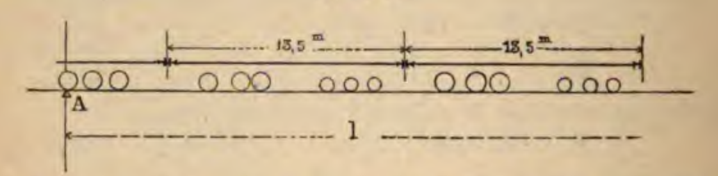
Wenn die Last von B nach A rückt, sind in den Gleichungen 176)—179) beziehungsweise 176ᵃ)—179ᵃ) die Grössen A und B zu vertauschen und ist ausserdem daselbst für x stets der Werth $l - x$, für $l - x$ der Werth x einzusetzen.

129. Bei den vorhergehenden Entwicklungen ist zunächst angenommen, dass die Ueberlast k dieselbe sei, ob sie auf einen grössern oder kleinern Theil λ der Brücke vertheilt ist; wir haben indess schon in N⁰· **64** für die Belastung der einen Brückenhälfte eine Grösse k^1 eingeführt, deren Werthe in den Tafeln XVII. und XVIIᵃ. den Werthen k gegenübergestellt sind. Diese Ge-

wichte k^1 sind nicht mehr genau, wenn die Länge der Ueberlast die Brückenhälfte überschreitet oder unterhalb derselben bleibt, und wird es daher in vielen Fällen nothwendig, für jede Länge λ der variablen Last die zugehörige Belastung k_λ näher zu bestimmen.

Indem wir die der Tabelle XVII^a. zu Grunde liegende Lokomotive als Beispiel annehmen, ist zunächst für den Fall, dass die ganze Brücke einseitig belastet ist, in Fig. 133 diejenige

Fig. 133.



Aufstellung der Lokomotiven dargestellt, für welche der Auflagerdruck bei A und somit auch die Vertikalkraft zunächst diesem Auflager den höchsten Werth erreicht (indem zunächst A sich 6 Triebaxen befinden). Durch wiederholte Anwendung des Hebelgesetzes findet man, dass hiebei für alle Spannweiten der von der variabeln Last herrührende Auflagerdruck A_k ziemlich genau durch den Werth $\frac{k + k^1}{2} \cdot \frac{l}{2}$ ausgedrückt ist, wenn k und k^1 dem gewählten Beispiele entsprechend aus Tabelle XVII^a entnommen werden; der Werth k_λ hat somit für die Endauflager, d. h. für den Fall, dass die ganze Brücke nach Figur 133 belastet ist, den Werth $\frac{k + k^1}{2}$ und dürfen wir annehmen, dass k vom Endauflager bis zur Brückenmitte und von da auch weiterhin gleichförmig zunimmt, während beim Beginn der Bewegung (d. h. wenn nur die Spitze des Eisenbahnzuges sich auf der Brücke befindet) für die Aenderung der Grösse k_λ sich ein anderes Gesetz geltend macht, welches letztere durch folgende einfache Betrachtung sich ergiebt. — Wenn man sich das Gewicht der Locomotive, deren Gesammtradstand 3^m beträgt, auf die ersten 4, 5 und 6 Meter der Brücke gleichförmig vertheilt denkt, so zeigt eine einfache Rechnung, dass diese gleichförmige Last bei jeder beliebigen Spannweite (nahezu) dieselben Auflagerdrücke und mit geringer Modification auch dieselben Momente ergiebt, wie wenn man jeweils die 3 Axgewichte an den zugehörigen Hebelsarmen gerechnet hätte; die stellvertretende Belastung k_λ ist also bei einer Länge der Ueberlast von 4, 5 und 6 Meter durch die Werthe $\frac{36000}{4}$, $\frac{36000}{5}$ und $\frac{36000}{6}$ ausgedrückt, und man kann nunmehr die

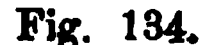
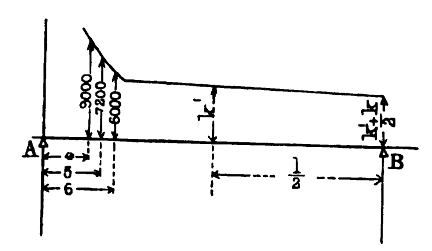


Fig. 134.



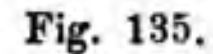
im Vorstehenden gewonnenen Resultate durch die nachstehende Figur 134 zur Anschauung bringen.

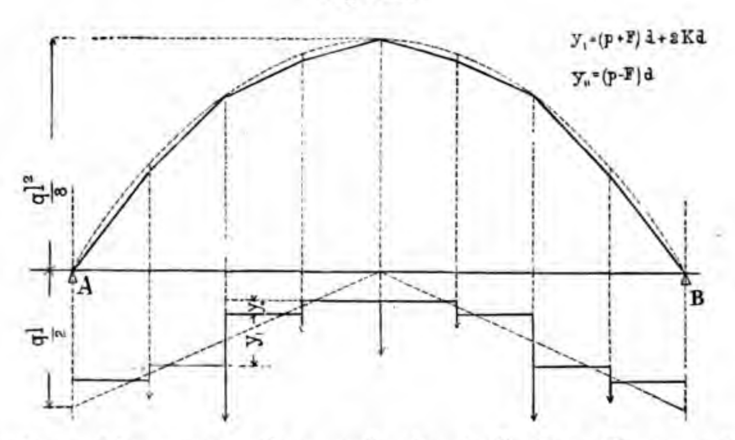
Bei kleineren Spannweiten fällt die geradlinige Fortsetzung des rechten Kurvenzweigs höher aus als die Werthe 6000, 7200 oder auch 9000 Kilo; man hat alsdann diese ersteren Werthe zu nehmen und zwar insoweit als sie grösser ausfallen als die constanten linkseitigen Werthe.

Die Güterlokomotive, welche der Figur 134, sowie der Tabelle XVII[a] zu Grunde liegt, kann für die Brücken gewöhnlicher Hauptbahnen als ganz geeignete Normalbelastung angenommen werden; hat man jedoch für eine bestimmte Bahn oder eine bestimmte Brücke eine andere Locomotive zu Grunde gelegt, so müssen k und k^1 je nach dem gegebenen Falle gerechnet werden, die Figur 134 bleibt aber insofern gültig, als bei Anwendung von besondern Tendern k_λ am Auflager B stets $= \frac{k + k^1}{2}$ gesetzt werden darf, während die constanten Grössen auf der linken Seite der Fig. 134 sehr rasch nach vorstehender Anleitung hergestellt werden können. — Letzteres ist auch bei Tenderlocomotiven gültig, doch darf bei diesen in Rücksicht auf die starke Belastung sämmtlicher Räder $k^1 = k$ gesetzt werden.

130. Bei den Entwicklungen der Nummern **125**—**128** ist zunächst zwischen belasteten und unbelasteten Knotenpunkten zu unterscheiden, wobei erstere durch die Ausdehnung λ der Ueberlast bezeichnet sind; es können jedoch auch innerhalb der Länge λ unbelastete Knotenpunkte sich befinden, nämlich insbesondere in dem Falle, wenn nur die oberen oder nur die unteren Knotenpunkte belastet sind; unbelastete Knotenpunkte können daher auch bei gleichförmiger Belastung der ganzen Brücke vorhanden sein; stets jedoch sind die als unbelastet aufgeführten Knotenpunkte wenigstens mit dem auf sie treffenden Eigengewicht behaftet.

Figur 135 stellt ein einfaches derartiges Beispiel dar; die sogenannten unbelasteten Knotenpunkte haben nur das auf die Fachlänge d antreffende Hauptträgergewicht $(p - F)\,d$ zu tragen (F bedeutet Gewicht der Fahrbahn, welches stets von den belasteten Knotenpunkten getragen wird), während die belasteten


Fig. 135.

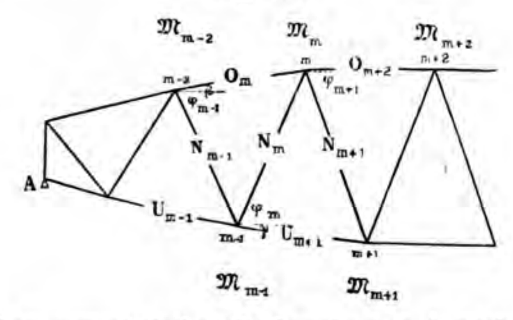


Knotenpunkte ausser dem auf sie treffenden Eigengewichte $(p + F)\,d$ auch noch das variable Gewicht aufzunehmen haben.

131. Uebergehend zu der Darstellung der e i n f a c h e n F a c h w e r k e nennen wir e i n f a c h s y m m e t r i s c h e S y s t e m e solche, deren sämmtliche Streben schiefe Richtung haben; symmetrisch desshalb, weil ebensoviele nach links als nach rechts gerichtete Streben vorhanden sind, welche auch ziemlich gleiche Neigungswinkel, zur Hälfte von entgegengesetztem Vorzeichen haben. (s. Fig. 136.)

Indem wir voraussetzen, dass für die jeweils stattfindende Belastungsart eines Fachwerkträgers das Polygon $\mathfrak{M}$ und die treppenförmige Kurve $\mathfrak{V}$ auf irgend eine Weise bestimmt worden seien — z. B. nach den Gleichungen 170)—172) oder nach den Gleichungen 176)—179) — so denken wir uns die einzelnen Knotenpunkte

Fig. 136.



eines einfachen symmetrischen Fachwerks von A nach B vorschreitend numerirt, wie solches in Fig. 136 gleichfalls ersichtlich; wir nennen:

$\mathfrak{M}'_{m-1}$, $\mathfrak{M}'_m$, $\mathfrak{M}'_{m+1}$ .... die Angriffsmomente in den Punkten $m-1$, m, $m+1$ ..... und zwar bezogen auf einen Hauptträger;

Anmerk. Die auf die Längeneinheit bezogenen Belastungen p, k und q, desgleichen die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ werden in der Regel zunächst für ein Geleise berechnet, müssen aber bei Berechnung der Fachwerkkräfte auf einen Hauptträger reduzirt werden, und werden letztere reduzirte Werthe mit $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{V}'$ bezeichnet; in der Regel sind hiebei die Werthe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zu halbiren, doch finden sehr häufig auch andere Vertheilungen der Verkehrslast statt.

$\mathfrak{V}'_{m-1}$, $\mathfrak{V}'_m$, $\mathfrak{V}'_{m+1}$ ... die Vertikalkräfte in den Feldern unmittelbar links von den Knotenpunkten $m-1$, m, $m+1$ .... und zwar ebenfalls bezogen auf einen Hauptträger;

O_m, O_{m+2} .... die Kräfte in der obern Gurtung und zwar in den Gliedern unmittelbar links von den Knotenpunkten m, $m+2$ ....;

β_m, β_{m+2} .... die zugehörigen Winkel der obern Gurtung mit dem Horizont;

U_{m-1}, U_{m+1} .... die Kräfte in der untern Gurtung und zwar in Gliedern unmittelbar links von den Knotenpunkten $m-1$, $m+1$ ....;

γ_{m-1}, γ_{m+1} .... die zugehörigen Winkel der untern Gurtung;

ferner:

N_m, N_{m+1} ..... die Kräfte in den Streben unmittelbar links von den Knotenpunkten m, $m+1$ ....;

φ_m, φ_{m+1} .... die zugehörigen Winkel der Streben mit dem Horizont;

endlich:

$\mathfrak{H}_m$, $\mathfrak{H}_{m+1}$ .... die Vertikaldistanz der Gurtungsschwerpunkte an den Knotenpunkten m, $m+1$ ....

Betrachten wir eine Strebe N_m (die einzelnen Fachwerksglieder können stets mit denselben Bezeichnungen aufgeführt werden wie die Kräfte in fraglichen Gliedern) und denken uns zwei Vertikalschnitte unmittelbar links, beziehungsweise rechts von den Endpunkten m und $m-1$ der betrachteten Strebe gelegt, so erhalten wir:

für den Schnitt unmittelbar links vom Knotenpunkt m

$$U_{m+1} \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad \ldots\ldots \quad 180)$$

Anmerk. Wo die Winkel denselben Index haben, wie die zugehörigen, nebenstehenden Kräfte, bleibt der Index bei ersteren in der Regel weg.

für den Schnitt unmittelbar rechts vom Knotenpunkt $m-1$

$$O_m \cos \beta = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad \ldots\ldots \quad 181)$$

Da die Gurtungs- und Strebenkräfte zwischen zweien Knotenpunkten constant sind, so giebt jeder der beiden vorgenannten Vertikalschnitte die Relation:

$$N_m \cos\varphi + U_{m+1}\cos\beta - O_m \cos\gamma = o,$$

woraus nach Wertheinsetzung aus den Gleichungen 180) und 181)

$$N_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad . \quad . \quad 182)$$

Die Gleichungen 180)—182) genügen zur Bestimmung sämmtlicher Kräfte im einfachen symmetrischen Fachwerkträger; als weitere und oft einfachere Gleichung zu Bestimmung der Strebenkräfte dient, dass die algebraische Summe der vertikalen Composanten sämmtlicher durch denselben Vertikalschnitt getroffenen Kräfte gleich der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ sein muss:

$$\mathfrak{V}'_m = U_{m+1}\sin\gamma + O_m \sin\beta \pm N_m \sin\varphi$$

woraus durch Wertheinsetzung aus den Gleichungen 180) und 181)

$$\pm N \sin\varphi = \mathfrak{V}'_m + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}\,\mathrm{tg}\,\gamma_{m+1} + \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\,\mathrm{tg}\,\beta_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 183)$$

In vielen Fällen, insbesondere wenn die Fachweite im Verhältniss zur Spannweite geringer ist, kann man die Gleichung 183) durch Einführung eines mittleren Werthes $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ in folgende einfachere Form bringen:

$$\pm N_m \sin\varphi = \mathfrak{V}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}}(\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 184)$$

wo $\mathfrak{M}'_{m-1/2}$ und $\mathfrak{H}'_{m-1/2}$ auf N⁰· **128.** in der Mitte des Faches $(m-1)\,m$ genommen sind.

132. Ob eine Strebe gedrückt oder gezogen ist, kann aus den Gleichungen 182) und 183) stets mit Hilfe der Betrachtungen am Schlusse der N⁰· **124.** bestimmt werden; wir kommen jedoch schneller zum Ziel durch die nachfolgenden besondern Regeln.

Indem wir zunächst einen frei aufliegenden Träger betrachten, so überzeugt man sich leicht, dass die obere Gurtung stets gedrückt, die untere Gurtung stets gezogen ist, wie sich auch schon aus der allgemeinen Gestalt eines solchen Trägers in Folge der durch Belastung hervorgerufenen Biegung ergiebt.

Zur Untersuchung der Strebenkräfte denken wir uns für sämmtliche Knotenpunkte die Werthe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ gebildet und zwar soll im Punkte m die Grösse $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ ein Maximum erreichen und von da ab nach rechts und nach links abnehmen (vergl. Fig. 137).

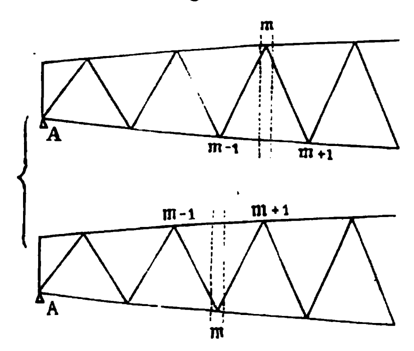
Ein Schnitt links vom Punkte $m = \max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ zeigt bei Betrachtung des linkseitigen Trägerfragments:

wenn Punkt m in der obern Gurtung ist, dass weil nach der Voraussetzung $U_{m+1} \cos\gamma > O_m \cos\beta$, die Strebe N_m nothwendig in demselben Sinne, wie das Gurtungsstück O_m wirken, somit gedrückt sein muss;

wenn Punkt m in der untern Gurtung ist, $O_{m+1} > O_m$ und nunmehr N_m nothwendig in demselben Sinne, wie die untere Gurtung wirken, also auf Zug in Anspruch genommen sein muss.

Durch dieselbe Betrachtung findet man unter Annahme eines Schnitts rechts von m, bei Betrachtung des rechtseitigen Trägerfragments, dass die Strebe N_{m+1} gedrückt oder gezogen sein muss,

Fig. 137.



wenn der Punkt m = max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ in der obern, beziehungsweise in der untern Gurtung sich befindet.

Da nach diesen Betrachtungen die Streben links und rechts vom Punkte m = max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, obgleich verschieden gerichtet, doch in gleichem Sinne in Anspruch genommen sind, so schliessen wir hieraus, dass am Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ Wechsel von Druck und Zug in gleichgerichteten Streben stattfindet.

Durch eine ganz gleiche Betrachtung ergiebt sich aber, dass auch am Punkte min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ Wechsel von Druck und Zug in gleichnamigen Streben stattfindet, und indem wir nunmehr den ganzen Träger in einzelne Fragmente theilen, welche theils durch die Endauflager, theils durch die Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ und min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ begränzt sind, können wir die nachfolgenden allgemeinen Regeln zunächst für freiaufliegende Träger aufstellen:

1) an den Punkten max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ und min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ ändern gleichge-

richtete Streben ihr Vorzeichen, d. h. es tritt daselbst Wechsel von Druck und Zug in gleichgerichteten Streben ein;

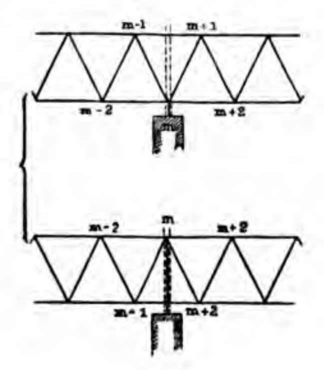
2) jede Strebe ist gezogen, deren Fussende dem Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ näher liegt, als das Kopfende; jede Strebe ist gedrückt, deren Kopfende dem Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ näher liegt als das Fussende;

3) jede Strebe ist gedrückt (beziehungsweise gezogen) deren Kopfende dem Punkte min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ entfernter (beziehungsweise näher) liegt als das Fussende.

Anmerk. Die Sätze 2) und 3) geben selbstverständlich für die zwischen max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ und min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ befindlichen Streben dasselbe Resultat.

Diese Regeln, welche zunächst nur für frei aufliegende Träger gegeben sind, lassen sich sofort auf continuirliche Träger übertragen, sofern man die negativen Werthe von $\mathfrak{M}$ als um so kleiner betrachtet, je mehr der Werth $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ unter die Null herabsteigt; denn alsdann entsteht an den Zwischenstützpunkten, wo $\mathfrak{M}$ einen grössten negativen Werth erreicht, ein Werth min $\mathfrak{M}$, der in der Regel zugleich auch min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ darstellt (weil die Zunahme von $\mathfrak{H}$ wohl immer kleiner ist als die Zunahme von $\mathfrak{M}$), während wir schon oben darauf hingedeutet haben, dass daselbst die untere Gurtung gedrückt, die obere Gurtung gezogen ist; zwei Schnitte links und rechts von min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ (zunächst oder am Zwischenstützpunkt gelegen) ergeben, dass beide getroffenen Streben gedrückt sind, wenn das negative O_m absolut grösser als U_{m-1} und U_{m+1} ist, dagegen gezogen sein müssen, wenn $U_m > O_m$ und $> O_{m+1}$ ist (s. Fig. 138).

Fig. 138.



Der obige Satz 3) passt also auch bei continuirlichen Trägern und muss nun auch Satz 2) für die Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ richtig bleiben; alle drei oben angeführten Sätze gelten also unverändert auch für continuirliche Träger, sobald man die numerisch grössten negativen Werthe als Minima ansieht.

134. Das einfache unsymmetrische System, dessen Streben theilweise vertikal sind, hat stets für zwei in derselben Vertikalen befindliche Knotenpunkte dasselbe $\mathfrak{M}$; ebenso finden die Aenderungen der Kurven $\mathfrak{V}$ stets an den durch je zwei Knotenpunkte gehenden Vertikalen statt und bleiben dieselben, ob die oberen oder unteren Knotenpunkte belastet sind. Es ist daher beim einfachen, un- symmetrischen System zweckmässig, die zwei denselben Vertikalen angehörigen Knotenpunkte je mit denselben Buchstaben m, m + 1 .... zu bezeichnen, indem diess nicht nur für die Formeln wesentlich vereinfachend ist, sondern auch der durch die Aenderungen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ gegebenen Facheinheit entspricht.

Entsprechend den beim einfachen, symmetrischen Fachwerk gebrauchten Bezeichnungen sind:

$\mathfrak{M}'_m$, $\mathfrak{M}'_{m+1}$ .... die Angriffsmomente in den Knotenpunkten m, m + 1 .... (beziehungsweise an den betreffenden Vertikalen) und zwar bezogen auf einen Hauptträger;

$\mathfrak{V}'_m$, $\mathfrak{V}'_{m+1}$ .... die Vertikalkräfte in den Feldern unmittelbar links von den Vertikalen m, m + 1 .... gleichfalls bezogen auf einen Hauptträger;

O_m, O_{m+1} .... die Kräfte in der obern Gurtung unmittelbar links von den Knotenpunkten m, m + 1 ....;

β_m, β_{m+1} .... die zugehörigen Winkel gegen den Horizont;

U_m, U_{m+1} .... die Kräfte in der untern Gurtung unmittelbar links von den Vertikalen m, m + 1 ....;

γ_m, γ_{m+1} .... die zugehörigen Winkel gegen den Horizont;

N_m, N_{m+1} .... die Kräfte in die schiefen Streben unmittelbar links von den Vertikalen m, m + 1 ....;

φ_m, φ_{m+1} .... die zugehörigen Winkel gegen den Horizont;

V_m, V_{m+1} .... die Kräfte in den Vertikalen m, m + 1 ....;

$\mathfrak{H}_m$, $\mathfrak{H}_{m+1}$ .... die Vertikaldistanz der Gurtungsschwerpunkte an den Knotenpunkten m, m + 1 ....

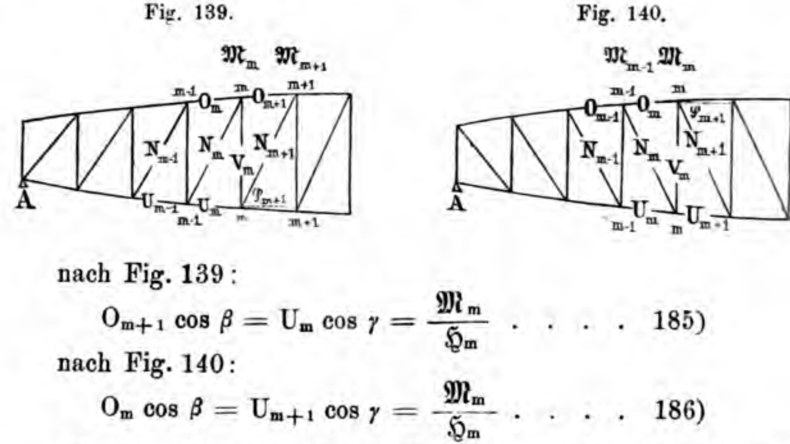
Da wo in demselben Träger schiefe Streben verschiedener Richtung vorkommen, bezeichnen:

T_m, T_{m+1} .... die Kräfte in den schiefen Streben in der den N entgegengesetzten Richtung;

ψ_m, ψ_{m+1} .... die zugehörigen Winkel gegen den Horizont.

Betrachten wir nun in den Fig. 139 und 140 zwei Schnitte unmittelbar links und unmittelbar rechts von den Knotenpunk-

ten m und denken wir uns Drehung um denjenigen Knotenpunkt m, in welchem je eine von demselben Vertikalschnitt getroffene Strebe ihren Endpunkt findet, so folgt.



nach Fig. 139:

$$O_{m+1} \cos \beta = U_m \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 185)$$

nach Fig. 140:

$$O_m \cos \beta = U_{m+1} \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 186)$$

Wir bemerken bei Einsicht der Figuren 139 und 140, dass diejenigen zwei Gurtungskräfte, welche in derselben Gleichung erscheinen (indem deren horizontale Composanten gleichwerthig sind) durch gerade Linien parallel der Strebenrichtung getroffen werden, was zum bessern Verständniss der Gleichungen 185) und 186) dienen kann.

Wenn man nach Massgabe der Gleichungen 186) und 187) auch die Werthe $\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$ und hienach die Grössen O_{m-1} und U_{m-1} bestimmt — wenn man sodann für irgend einen Vertikalschnitt durch die Strebe N_m die Summe der horizontalen Composanten anschreibt:

nämlich nach Fig. 139:

$$N_m \cos \varphi = U_m \cos \gamma - O_m \cos \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

und nach Fig. 140:

$$N_m \cos \varphi = O_m \cos \beta - U_m \cos \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad II.$$

so folgt aus den Gleichungen I. und II. nach Wertheinsetzung aus den Gleichungen 186), beziehungsweise 187) je derselbe Werth:

$$N_m \cos \varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 188)$$

Die Gleichung 188) kann ganz allgemein zur Bestimmung der Strebenkraft unsymmetrischer einfacher Systeme gelten; die Bedeutung des Vorzeichens wird in folgender Weise entschieden:

Die Strebe N_m ist **gedrückt**, wenn die horizontale Composante $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ der gezogenen Gurtung grösser ist, als die gedrückte Gurtung, **gezogen**, wenn umgekehrt die horizontale Composante der gedrückten Gurtung grösser ist. — Da zu verschiedenen Seiten des Punkts max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ die Differenz der Gurtungscomposanten verschiedenes Vorzeichen hat, so müssen am genannten Punkte gleichgerichtete Streben ihr Vorzeichen ändern und findet dieser Wechsel von Druck und Zug aus demselben Grunde auch am Punkte min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ statt und ist — wenn man wieder zunächst einen frei aufliegenden Träger ins Auge fasst, jede Strebe **gezogen**, deren Fussende dem Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ näher oder vom Punkte min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ entfernter als das Kopfende ist; jede Strebe ist **gedrückt**, deren Fussende dem Punkte min $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ näher oder vom Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ entfernter ist, als das Kopfende — und finden wir in weiterer Verfolgung dieser Betrachtung, dass die in N^{o}. **134.** für symmetrische Systeme aufgestellten **drei Sätze** auch für unsymmetrische Systeme sowohl beim frei aufliegenden, als auch beim continuirlichen Träger gleichfalls vollständige Geltung haben.

Die Gleichungen 186)—188) genügen zwar zur Bestimmung der Kräfte in den Gurtungen und schiefen Streben, doch wird die Strebenkraft häufig rascher durch Bestimmung ihrer vertikalen Composanten gefunden. — Ein Schnitt links von den Knotenpunkten m ergiebt:

$$\mathfrak{V}'_m = O_m \sin\beta - U_m \sin\gamma + N_m \sin\varphi,$$

woraus nach Fig. 139:

$$N_m \sin\varphi = -\mathfrak{V}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}\,\mathrm{tg}\,\gamma - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\,\mathrm{tg}\,\beta_m \quad . \quad . \quad . \quad 189)$$

und nach Fig. 140:

$$N_m \sin\varphi = \mathfrak{V}'_m + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}\,\mathrm{tg}\,\beta_m + \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\,\mathrm{tg}\,\gamma_m \quad . \quad . \quad . \quad 190)$$

positive N Zug bedeuten und $\mathfrak{V}'$ zunächst A negativ ist.

In vielen Fällen, insbesondere bei grösserer Anzahl von Fachwerksfeldern genügt es, einen mittlern Werth $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ einzuführen und erhält man alsdann als Näherungsformel:

$$N_m \sin\varphi = -\mathfrak{V}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}}\,(\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 191)$$

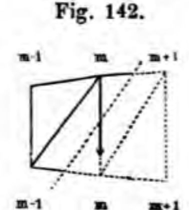
wo $\mathfrak{M}'_{m-1/2}$ und $\mathfrak{H}_{m-1/2}$ in der Mitte zwischen m und m — 1 genommen sind.

135. Bei Bestimmung der Kräfte in den vertikalen Streben kommt wesentlich in Betracht, wie die daselbt eintretende Belastung sich auf die obern oder die untern Knotenpunkte vertheilt; denn an jedem Knotenpunkte muss Gleichgewicht zwischen den daselbst angreifenden Kräften herrschen und da die Kräfte in den Gurtungen und schiefen Streben nach N^0. **134** bereits bekannt sind, so bedingt jede Aenderung im gegenseitigen Belastungsverhältniss der obern und untern Knotenpunkte eine Aenderung im Werthe der Kräfte V in den vertikalen Streben oder Ständern.

Zur Bestimmung der Kraft V_m denken wir uns die Vertikale m m durch einen schiefen Schnitt ungefähr parallel der Rich-

Fig. 141.

Fig. 142.



tung der schiefen Streben geschnitten (vergl. Fig. 141 und Fig. 142) und nennen ferner:

P'_o die im obern Knotenpunkt,

P'_u die im untern Knotenpunkt eintretende Belastung.

Nach Fig. 141 ist die Summe der vertikalen Composanten der links vom fraglichen Schnitt wirkenden äussern Kräfte ausgedrückt durch den Werth $\mathfrak{V}'_m + P'_o$, indem der Coordinatenursprung in A und die Richtung der Schwere als die positive angenommen ist (so dass $\mathfrak{V}$ zunächst A negativ ist) und folgt hieraus nachErtheinsetzung aus Gleichung 185) sofort:

$$\mathfrak{V}'_m + P'_o = -\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}(\operatorname{tg}\beta_{m+1} + \operatorname{tg}\gamma_m) + V_m$$

$$V_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}(\operatorname{tg}\beta_{m+1} + \operatorname{tg}\gamma_m) + \mathfrak{V}'_m + P'_o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 192)$$

Ebenso folgt aus Fig. 142 nach Wertheinsetzung aus Gleichung 186):

$$V_m = -\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}(\operatorname{tg}\beta_m + \operatorname{tg}\gamma_{m+1}) - \mathfrak{V}'_m - P'_u \quad . \quad . \quad 193)$$

Zu bemerken ist hiebei noch, dass

$\mathfrak{V}'_m + P'_o = \mathfrak{V}'_{m+1} - P'_u$ und

$\mathfrak{V}'_m + P'_u = \mathfrak{V}'_{m+1} - P'_o$ gesetzt werden darf.

An denjenigen Vertikalen, wo $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht, findet keiner der beiden in den Fig. 141 und 142

gezeichneten Fälle statt, vielmehr wechselt hier die Richtung der gezogenen, beziehungsweise der gedrückten Streben (zu vergleichen die vorhergehende Nummer und die Regeln der Nummer **132**).

Fig. 142a.

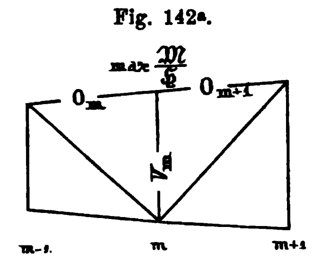
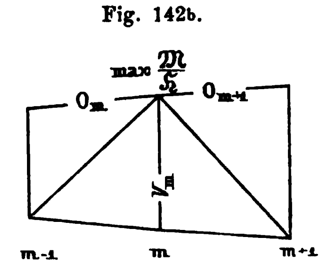


Fig. 142b.



Sind die Diagonalen sämmtlich gezogen, so ist ihr Fusspunkt gegen max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ gerichtet, es treten also in letzterer Vertikalen die Diagonalen beiderseits im untern Knotenpunkt ein, während der obere Knotenpunkt gar keine Strebenkräfte aufnimmt; es ist desshalb sehr leicht, an letzterem Punkte das Gleichgewicht der Kräfte anzuschreiben und erhalten wir hieraus:

$$V_m = P'_o \pm \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) \quad . \quad . \quad 194)$$

Das Vorzeichen auf der rechten Seite dieser Gleichung richtet sich nach der Neigung der Gurtungswinkel, welche rechts von der Brückenmitte anderes Vorzeichen haben, als links.

Sind die Diagonalen sämmtlich gedrückt, so sind ihre oberen Endpunkte gegen max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ gerichtet und ist also in letzterer Vertikalen der untere Knotenpunkt frei von schiefen Strebenkräften; es ist daher, wenn man sich Gleichgewicht um letztern Punkt denkt:

$$V_m = P'_u \pm \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg} \gamma_m - \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) \quad . \quad . \quad 194^a)$$

In den Gleichungen 192)—194a) bedeuten positive V Druck, negative V Zug, vorausgesetzt dass sämmtliche Vorzeichen richtig angewendet und die Richtung der Schwere stets als die positive angenommen ist. — Insbesondere sind aber die Vorzeichen der trigonometrischen Grössen zu beachten und ändern dieselben bei frei aufliegenden Trägern in der Regel jenseits der Brückenmitte ihr Vorzeichen (insofern die Träger meist symmetrisch gegen die Brückenmitte construirt sind).

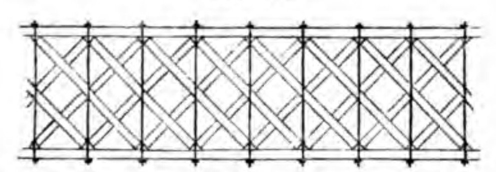
136. Wir haben beim unsymmetrischen Sytem (ebenso wie beim symmetrischen) die allgemeine Regel gefunden, dass eine schiefe

Strebe dann gezogen ist, wenn ihr Fussende der Vertikalen $\max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ näher ist, als ihr Kopfende.

Da nun in Folge von Aenderungen in der Belastung $\max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ seine Lage ändert, so folgt nothwendig, dass ein Theil der Streben bald gezogen, bald gedrückt sein muss. Man wendet aber beim unsymmetrischen System häufig Streben an, welche blos Druck oder blos Zug aushalten können, woraus mit Nothwendigkeit folgt, dass in denjenigen Feldern (Fachen), wo die Strebenkraft ihr Vorzeichen ändert, Streben von entgegengesetzter Richtung angebracht sein müssen, von denen stets nur diejenige zur Wirkung kommt, deren Kopf- oder Fussende dem Punkte $\max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ näher ist — je nachdem diese Streben blos Druck oder blos Zug aushalten können.

Eine blos auf Zug construirte Strebe kommt in der Regel dadurch ausser Wirkung, dass sie sich in Folge des beginnenden Drucks ausbiegt, wiewohl auch eine solche Verbindung gedacht werden kann, welche beim Aufhören des Zugs gleichfalls aufgehoben wird; bei gedrückten Streben, welche ohne Bolzenverbindung stumpf aufgesetzt sind, hört die Verbindung und ebendamit die Strebenkraft auf, sobald die Strebe einem Zug unterworfen werden soll, z. B. bei dem Howe'schen System, welches in Fig. 143 skizzirt ist.

Fig. 143.



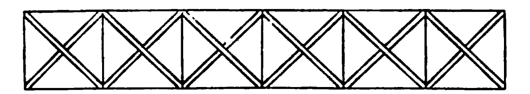
Diejenigen Streben, welche hauptsächlich in Folge der einseitigen Belastung zur Wirkung kommen, nennt man G e g e n s t r e b e n; bei solchen gekrümmten Trägern, deren Diagonalstreben bei gleichförmiger Belastung ganz oder nahezu ausser Wirkung sind, werden daher alle Streben zugleich als Gegenstreben wirken, während bei allen andern Systemen als H a u p t s t r e b e n diejenigen Streben betrachtet werden, welche bei gleichförmiger Belastung des Trägers in Wirksamkeit sind.

137. Bei vorstehender Betrachtung ist zunächst Umgang genommen von derjenigen Spannung oder Pressung, welche im Fachwerk vor Beginn der Belastung bereits vorhanden war.

Wenn nämlich die Gegenstreben bei Aenderungen der Belastung sofort anstatt der Hauptstreben zur Wirkung kommen

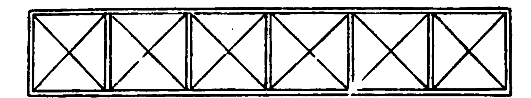
sollen, so ist nicht wohl zu umgehen, dass eine ursprüngliche in allen Streben wirkende Spannung (Pressung) schon vor der Belastung vorhanden ist, sind z. B. — jede Belastung hinweggedacht — alle Diagonalen nach bestehender Figur 144 gleichförmig gedrückt

Fig. 144.



(indem die gedrückten Glieder durch Doppellinien dargestellt sind), so müssen nothwendig alle Vertikalen und ebenso beide Gurtungen gleichförmig gezogen sein; anderseits wenn alle Diagonalen gleichförmig gezogen sind (s. Fig. 144ª), so müssen alle Vertikalen gleichförmig gedrückt sein.

Fig. 144ª.

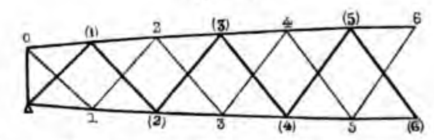


Wird nun ein solcher Träger zunächst wenig belastet, so bleiben die Haupt- und Gegenstreben sämmtlich gedrückt, beziehungsweise gezogen; bei zunehmender Belastung können Haupt- und Gegenstreben allmählig ausser Wirkung kommen, und zwar wird vollständige Entlastung einer Strebe insbesondere dann stattfinden, wenn die entgegengesetzt gerichtete Strebe desselben Faches ihre grösste Anstrengung erleidet und schliessen wir hieraus, dass — so lange die ursprüngliche Spannung der Pressung keine übermässige war, die Dimensionen der Hauptstreben berechnet werden dürfen, wie wenn im fraglichen Fache bei der betrachteten ungünstigsten Belastung gar keine Gegenstreben vorhanden gewesen wären.

Bezüglich der Querschnittdimensionen der Gegenstreben unterscheiden wir zunächst gerade und gekrümmte Träger. — Bei letztern können Hauptstreben und Gegenstreben so zu sagen in einander übergehen (wie diess in N°. **136**. erläutert ist) und werden meist sämmtliche Diagonalen nach der grössten Anstrengung, die sie in Folge der Belastung erleiden können, berechnet werden müssen. — Bei geradlinig begränzten Trägern sind die Gegenstreben häufig auf einem erheblichen Theil der Länge bei jeder Art Belastung ausser Wirkung (wie diess z. B. bei der Howe'schen Holzconstruction der Fall ist); die Dimensionen der Gegenstreben richten sich dann nach der ursprünglichen Pressung, die man im System anzubringen für zweckmässig erachtet hatte oder die auch unbeabsichteter Weise eintreten kann.

138. Ein doppeltes Fachwerk entsteht, wenn jede Hauptstrebe der einen Richtung sich mit einer Hauptstrebe der andern Richtung kreuzt. Die Figur 145 stellt ein doppeltes

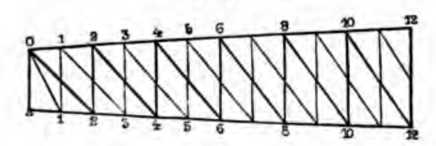
Fig. 145.



symmetrisches Fachwerk dar, wo die Streben des einen Systems durch stärkere Linien bezeichnet sind; dem einen System gehören die Knotenpunkte 1, 2, 3, 4, 5 . . . ., dem andern die Knotenpunkte (1), (2), (3), (4) . . . .

In ähnlicher Weise stellt Fig. 146 ein doppeltes unsymmetrisches Fachwerk dar, wo die Knotenpunkte des einen Systems mit den ungeraden Ziffern 1, 3, 5 . . . . die des andern Systems mit den geraden Ziffern 2, 4, 6 . . . . bezeichnet sind.

Fig. 146.



Die Berechnung kann nun ganz wie beim einfachen Fachwerk geschehen, indem man die sämmtlichen Lasten auf die Knotenpunkte vertheilt und hieraus für jedes der beiden Systeme besondere $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{M}$ bildet. Sind z. B. die obern Knotenpunkte belastet, so haben wir im obigen symmetrischen Fachwerk für das eine System die Knotenpunkte (1), (3), (5) . . . ., für das andere System die Punkte 2, 4, 6 . . . . als Lastpunkte zu betrachten und hienach die Figuren 129—131 zu construiren, beziehungsweise die Formeln 170)—172) oder 176—179) anzusetzen.

Es sind nach dem Vorstehenden im Allgemeinen die demselben Abstand x entsprechenden $\mathfrak{M}_x$ für die beiderlei Systeme verschieden, nur wenn die obern und untern Knotenpunkte gleich belastet sind, hat beim doppelten symmetrischen Fachwerk (Fig. 145) $\mathfrak{M}_x$ für beide Systeme denselben Werth und haben in Folge dessen die Strebenkräfte desselben Faches gleiche horizontale Composanten.

Die Zerlegung eines doppelten Fachwerks in zwei getrennte Systeme ist in der angegebenen Weise bei Berechnung von grösseren Fachwerkbrücken schon mehrfach in Anwendung gekommen, so z. B. bei der bekannten, nach Schwedler'schem System erbauten

Weserbrücke bei Höxter und bei der ganz ähnlich construirten Elbbrücke bei Tangermünde.

Dieselbe Berechnungsweise kann nun auch bei mehrfachen Systemen angewendet werden; wir geben jedoch im Folgenden ein etwas vereinfachtes Verfahren an, welches letztere in gleicher Weise auch für doppelte Systeme angewendet werden kann.

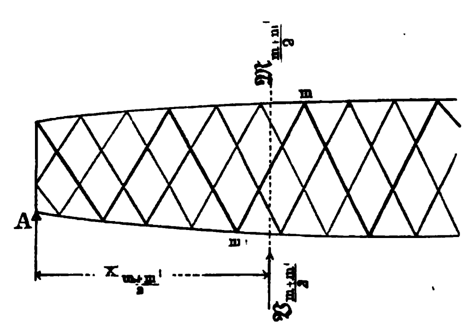
139. Wenn man im mehrfachen Systeme für jedes der einzelnen Systeme besondere $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ nach den in N⁰· **138** angegebenen Grundsätzen bildet, so wird man finden, dass für denselben Abstand x die Werthe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ der einzelnen Systeme verhältnissmässig wenig von einander abweichen und zwar um so weniger, je höher die Nummernzahl des Systems ist. Wir dürfen daher beim nfachen System für jedes der n Systeme

$$(\mathfrak{M}_x) = \frac{1}{n}\,\mathfrak{M}_x$$

$$(\mathfrak{V}_x) = \frac{1}{n}\,\mathfrak{V}_x$$

annehmen, wo $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{V}_x$ die Angriffsmomente des ganzen Systems, die eingeklammerten Grössen diejenigen eines einzelnen Systems bezeichnen.

Fig. 146a.



Hieraus findet man nun sofort für eine schiefe Strebe N_m, deren Endpunkte mit den Buchstaben m und m′ bezeichnet sind (s. Fig. 146ᵃ), nach den Gleichungen 182) und 188) (somit sowohl für symmetrische als unsymmetrische Systeme):

$$N_m \cos\varphi = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m'}}{\mathfrak{H}'_m}\right) \quad . \; . \; . \quad 195)$$

und ebenso aus den Gleichungen 184) und 191):

$$N_m \sin\varphi = \frac{1}{n}\left\{\mathfrak{V}'_{1/2(m+m')} - \frac{\mathfrak{M}'_{1/2(m+m')}}{\mathfrak{H}_{1/2(m+m')}}(\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma)\right\} \quad . \; . \quad 196)$$

wobei der Index $_{1/2(m+m')}$ sich auf die Mitte der betrachteten

Strebe bezieht, für welchen Punkt die Vertikalkraft des ganzen Systems mit $\mathfrak{V}_{1/2(m+m')}$ bezeichnet ist.

Bei unsymmetrischen mehrfachen Systemen sind die Formeln für die vertikalen Streben (Ständer, Pfosten) besonders zu entwickeln und hat man nach Analogie die Gleichungen 192) und 193) nach Fig. 139:

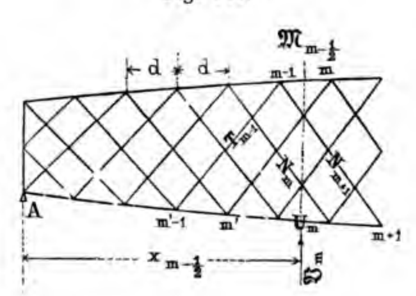
$$V_m = \frac{1}{n} \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg} \beta_{m+1} + \operatorname{tg} \gamma_m) + \frac{1}{n} \mathfrak{V}'_{1/2(m+m')} + P'_o \quad . \quad . \quad 197)$$

wo $\mathfrak{V}_m$ die Vertikalkraft unmittelbar links vom Punkt m bezeichnet und nach Fig. 140:

$$V_m = -\frac{1}{n} \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) - \frac{1}{n} \mathfrak{V}'_{1/2(m+m')} - P'_u \quad 197^a)$$

140. Nachdem die Strebenkräfte bekannt sind, werden die Gurtungskräfte für die verschiedenen Constructionssysteme in nachfolgender Weise bestimmt:

Fig. 147.



A) für das mehrfach symmetrische Fachwerk mit gerader Nummerzahl.

Man bringt einen Vertikalschnitt an durch die über einander befindlichen Kreuzungspunkte je zweier Streben und unmittelbar links vom Punkt m, so dass die Abscisse des fraglichen Schnittpunkts mit $x_{m-1/2}$ bezeichnet ist; wir sehen nun ab von der verhältnissmässig kleinen Differenz der von demselben Schnitt getroffenen Strebenkräfte und erhalten durch besagte Vernachlässigung der Differenz der horizontalen Composanten der Strebenkräfte:

$$O_m \cos \beta = U_m \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}'_{m-1/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 198)$$

wobei O_m und U_m wie seither die Gurtungskräfte unmittelbar links vom Knotenpunkt m bezeichnen.

B) für das mehrfach symmetrische Fachwerk mit ungerader Nummerzahl (vergl. Fig. 148).

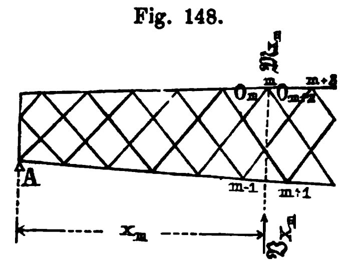


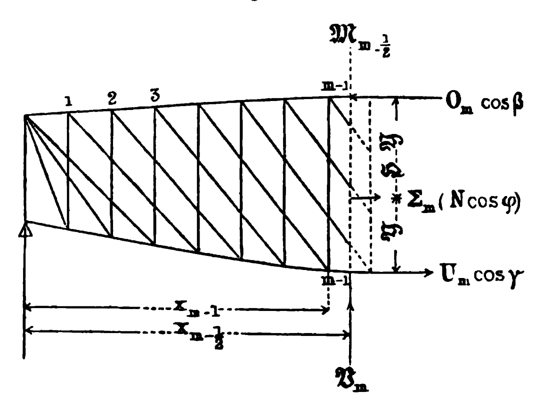
Fig. 148.

Man bringt einen Vertikalschnitt durch einen obern oder untern Knotenpunkt an, welcher Schnitt zugleich den Knotenpunkt zweier anderen Streben (ganz oder nahezu) schneidet; indem man auch hier wieder von der Differenz der horizontalen Composanten der sich kreuzenden Streben absieht und den Drehungspunkt an dem durch den fraglichen Schnitt getroffenen Knotenpunkt der obern, beziehungsweise untern Gurtung anbringt, so erhält man:

$$O_m \cos \beta \text{ oder } U_m \cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 199)$$

wobei man die Schnitte der Reihe nach und abwechslungsweise an den obern und untern Knotenpunkten anbringt.

Fig. 149.



C) für das mehrfache unsymmetrische Fachwerk:

Man bringt einen Schnitt in der Mitte des Faches $(m - 1)m$ und denkt sich, da nach N$^{0.}$ **140.** alle Strebenkräfte bekannt sind, die Resultante der horizontalen Composanten sämmtlicher durch fraglichen Schnitt getroffenen Streben gebildet, welche Summe mit $\Sigma_m (N \cos \varphi)$ bezeichnet werden soll; der Vertikalabstand dieser Resultante vom untern Gurtungsschwerpunkt wird mit $\mathfrak{Y}$ bezeichnet, so dass $\mathfrak{H} - \mathfrak{Y}$ den Abstand vom obern Gurtungsschwerpunkt angiebt.

Hiernach erhält man:

$$O_m \cos \beta = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \pm \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \Sigma_m (N \cos \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 200)$$

und:

$$U_m \cos\gamma = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \mp \frac{\mathfrak{H}_{m-1/2} - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} \Sigma_{m_1}(N \cos\varphi) \quad . \quad . \quad 201)$$

Ueber das Vorzeichen des zweiten Gliedes der Gleichungen 200) und 201) kann kein Zweifel sein, da sämmtliche Strebenkräfte als bekannt vorausgesetzt sind.

Mit Ausnahme der Endfelder, wo die Strebenrichtungen wesentlich verschieden sind, ist $\mathfrak{Y}$ nahezu gleich $\frac{1}{2}\,\mathfrak{H}$; eine bezügliche Vereinfachung der Formeln 200) und 201) wurde aber unterlassen, weil sonst für die Endfelder besondere Formeln aufgestellt werden müssten.

141. In den Fig. 147 und 148 sind die Streben in den Endfeldern parallel denen der andern Felder gezeichnet, was zur Folge hat, dass einzelne der das Fachwerk bildenden Systeme an den Enden unvollständig sind und dass z. B. bei Fig. 148 die relative Festigkeit der Endständer durch die Differenz der horizontalen Composanten der Strebenkräfte in Anspruch genommen wird; letzteres findet auch bei nebenstehender Fig. 150 statt, falls die Vertikalkräfte zu beiden Seiten des gezeichneten Mittelpfeilers verschiedene Werthe haben; in letzterem Falle ist daher der Endständer, welcher auch den grössten Theil der Auflagerreaction aufzunehmen hat, bei einseitiger Belastung sehr stark in Anspruch genommen.

Fig. 150.

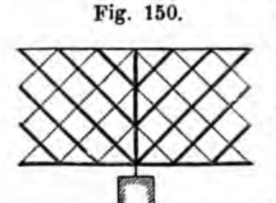


Fig. 151.

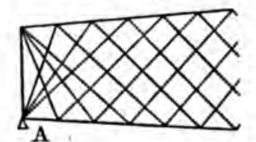
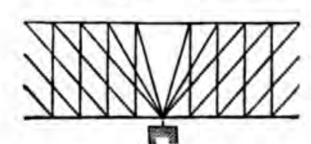


Fig. 152.



Man kann die Endständer wesentlich entlasten und insbesondere deren relative Inanspruchnahme vermeiden, indem man die in Fig. 151 skizzirte Anordnung anwendet, wie solches bei den unsymmetrischen Trägern in Fig. 149 gleichfalls angenommen ist.

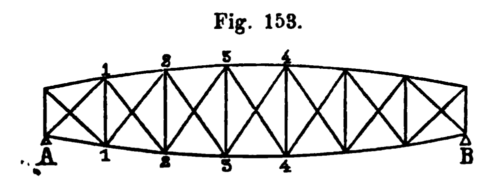
Während in Fig. 151 der Endständer die Hälfte des Auflagerdrucks zu übertragen hat, ist in Fig. 152 eine Anordnung gezeichnet, wo im Falle blos die untern Knotenpunkte belastet werden, ein Endständer gar nicht nothwendig ist.

142. Combinirte Fachwerke nennen wir solche, welche wie die unsymmetrischen Fachwerke mit Vertikalen versehen sind, dabei aber doch in jedem Felde Hauptdiagonalen verschiedener Richtung haben; man kann eine solche Construction als ein dop-

peltes, unsymmetrisches Fachwerk ansehen, wo die beiden Systeme verschieden gerichtete Diagonalen zeigen, wie solches in Fig. 153 und 154 dargestellt ist.

Es entsteht hiebei sofort die Ungewissheit, wieviel jedes der beiden Systeme von der Belastung aufzunehmen hat, da sämmtliche Knotenpunkte beiden Systemen gemeinsam sind.

Fig. 153.



Die Aufgabe wird dadurch am vollständigsten gelöst, dass man mit Berücksichtigung sämmtlicher Querschnittdimensionen die Formänderung des ganzen Fachwerks genau verfolgt und hieraus bestimmt, welchen Bruchtheil der Gesammtlast jedes der beiden Systeme aufzunehmen hat, eine Aufgabe, welche meist sehr schwierig sein wird.

Fig. 154.

Zum Voraus lässt sich übrigens abnehmen, dass wenn beide Gurtungen gleiche Form und Belastung haben und wenn die beiderlei Streben gleich stark und insbesondere gegen Druck zweckmässig construirt sind — dass alsdann die in demselben Felde befindlichen Streben auch gleich grosse Kräfte zu übertragen haben, wodurch dann allerdings sich ergiebt, dass die Vertikalen gar keine Kraft zu übertragen hätten, sie wären also in diesem Falle jedenfalls leicht zu halten.

In weiterer Verfolgung dieser Betrachtung ergiebt sich, dass eine übermässige Stärke der Vertikalen auf die gleichmässige Wirkung der beiden Strebensyteme ungünstig wirkt, indem die der Formänderung der ganzen Träger sich widersetzenden Vertikalen einen Theil der Fachwerkkräfte aufnehmen. — In viel höherem Grade kommen aber die Vertikalen zur Wirkung, wenn die beiderlei Streben verschiedene Stärke haben.

Wir haben nämlich schon oben bei den Gegenstreben erwähnt, dass dünne, unausgestreifte Gegenstreben nahezu ausser Wirkung kommen, sobald sie einem Druck widerstehen sollen; die Kraft, welche von den schwachen Gegenstreben nicht aufgenommen werden kann, geht sofort in die gegen Druck construirten Vertikalen über, während die Gegenstrebe nur soviel Druck behält, als sie ohne Biegung aufnehmen kann. — Aehnlich verhält es sich nun, wenn in combinirten Fachwerken die Streben verschiedene Stärke haben. Die Streben müssten bei gleich grossen Kräften verschiedene Ausdehnung, beziehungsweise Zusammenziehung erleiden und da der geometrische Zusammenhang dem entgegenarbeitet, so müssen die Vertikalen in Mitleidenschaft gezogen werden, während die Streben ungleich in Anspruch genommen sind. Es wird nun theilweise auf die Stärke der Vertikalen ankommen, wieviel dieselben von der Strebenkraft aufnehmen; angenommen jedoch, dass die Vertikalen weder zu schwach, noch auch übermässig stark seien, so wird man das Verhältniss, nach welchem die beiderlei Streben wirken, nach der Widerstandsfähigkeit dieser letzteren bemessen können; bezeichnet nämlich:

N_m und T_m die Kräfte in den beiden Streben desselben Feldes links vom Knotenpunkt m,

ω_u den Querschnitt der Strebe N_m,

ω_t den Querschnitt der Strebe T_m.

so darf, falls N_m gezogen ist, für das Verhältniss der Kräfte N und T angenommen werden:

$$\frac{N_m}{\omega_n} = \frac{T_m}{\omega_t}\left(1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 202)$$

und falls N_m gedrückt ist:

$$\frac{T_m}{\omega_t} = \frac{N_m}{\omega_u}\left(1 + K\frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 203)$$

In diesen beiden Gleichungen ist die Bedeutung der eingeklammerten Grösse aus N⁰. **36.** und der dortigen Gleichung 76) zu entnehmen; letztere Gleichung ist in N⁰. **122.** als Gleichung 169) recapitulirt.

Fig. 155.

143. Bei Aufstellung der Formeln für die combinirten Fachwerke wenden wir dieselben Bezeichnungen an, welche in N⁰. **135.** für die unsymmetrischen Fachwerke gewählt wurden, wie durch die Fig. 155 näher erläutert ist.

Indem wir nun einen Schnitt unmittelbar links von der Vertikale m anbringen und Drehung um den untern und sodann um den obern Knotenpunkt m annehmen, erhalten wir:

$$O_m \cos\beta + N_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 204)$$

$$U_m \cos\gamma + T_m \cos\psi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 205)$$

und indem sodann ein Schnitt unmittelbar rechts von der Vertikalen (m — 1) angebracht und Drehung um den untern Knotenpunkt (m — 1) angenommen wird:

$$O_m \cos\beta + T_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 206)$$

In den Gleichungen 204)—206) sind 4 Unbekannte O, U, T und N und können letztere aus genannten 3 Gleichungen nur dann bestimmt werden, wenn über das gegenseitige Verhältniss dieser Grössen, z. B. zweier derselben, eine weitere Bedingungsgleichung gegeben ist.

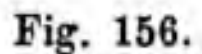
Eine solche 4. Gleichung ist durch die in N°· **143.** angeschriebene Gleichung 202), beziehungsweise 203) gegeben, welche Gleichungen wesentlich genauer sind, wenn die Vertikalen weder zu schwach, noch übermässig stark sind — noch besser, wenn sie genau die ihnen zukommende Stärke besitzen.

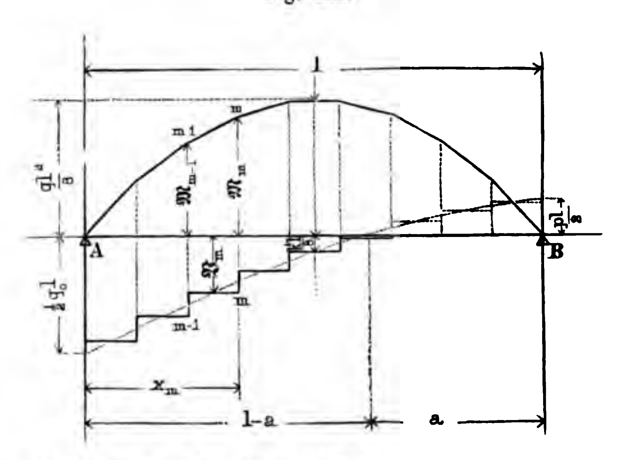
Man findet aber die von den Vertikalen aufzunehmende Kraft, wenn man die Bedingungen des Gleichgewichsts um einen der beiden Knotenpunkte anschreibt, nachdem vorher die Gurtungs- und Strebenkräfte nach den Gleichungen 202)—206) bestimmt worden waren.

§. 16. Fachwerke mit geradlinig horizontalen Gurtungen.

144. Bei geraden horizontalen Gurtungen vereinfachen sich die Formeln, indem die Gurtungswinkel gleich Null werden, wonach insbesondere in den Gleichungen 183), 184), 189) bis 193), sowie 195)—197) die Glieder mit $\mathfrak{M}$ ausfallen, und die Strebenkräfte nur noch von der Vertikalkraft $\mathfrak{V}$ abhängig sind; man wird daher bei horizontalen Gurtungen die vorgenannten Gleichungen vorzugsweise zur Bestimmung der Strebenkräfte anwenden, wonach für letztere die Kurve max $\mathfrak{V}$, beziehungsweise min $\mathfrak{V}$, massgebend sein wird.

Die Gurtungskräfte sind beim einfachen System, sowie beim mehrfachen symmetrischen System nur vom Werthe max $\mathfrak{M}$ abhängig (vergl. die Gl. 180, 181, 185, 186, 198, und 199) und ist daher die umstehende Fig. 156, in welcher die Maximalwerthe $\mathfrak{M}_m$ und $\mathfrak{V}_m$ verzeichnet sind, bei den geradlinigen Trägern für die vorgenannten Systeme ausreichend und besonders geeignet, diejenigen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ zu bestimmen, welche zur Entwicklung der grössten Gurtungs- und Strebenkräfte nothwendig sind.


Fig. 156.



(Eine Modification der Fig. 156 tritt bei ungleicher Belastung der untern und obern Knotenpunkte ein, wofern nicht die ganze Belastung auf den Knotenpunkten der einen Gurtung concentrirt gedacht werden kann; diese Modification ist in N°. **130.** behandelt und in Fig. 135 dargestellt).

Beim mehrfachen unsymmetrischen System ist die grösste Gurtungskraft auch von $\mathfrak{V}$ abhängig, so dass gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ in Betracht gezogen werden müssen; da jedoch bei den Gurtungskräften stets die über die ganze Spannweite gleichförmig vertheilte Maximallast massgebend ist, so lassen sich hiefür die gleichzeitigen $\mathfrak{V}$ stets sehr einfach bestimmen (zu vergleichen Fig. 129).

In Figur 156 ist die Kurve der max $\mathfrak{M}$ entsprechend der Fig. 129, und werden die einzelnen $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 174) erhalten, woselbst $x_t = \frac{l}{2} - x_m$ zu setzen ist. — Für die Kurve der max $\mathfrak{V}$ sind in Fig. 156 drei Werthe eingetragen ($q_0 = p + k_0$ ist in N°. **129.** erläutert) und für einen vierten Werth $\mathfrak{V} = o$ findet sich die Abscisse $l - a$ nach Gleichung 99). — Diese vier Werthe $\mathfrak{V}$ genügen zur Construction der Kurve max $\mathfrak{V}$.

In N°. **133.** (symmetrisches System) sowohl wie in N°. **134.** (unsymmetrisches System) ist nachgewiesen, dass gleichgerichtete Streben ihr Vorzeichen am Punkte max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ ändern; bei horizontalen Gurtungen, somit constanter Höhe $\mathfrak{H}$, findet diese Aenderung im Punkte max $\mathfrak{M}$ oder was dasselbe ist, im Punkte $\mathfrak{V} = o$ statt, welcher Punkt in Folge der Veränderung der Last seine Stellung wechselt; die äusserste, d. h. die von der Trägermitte entfernteste

Lage des Punktes $\mathfrak{V} = o$ ist, wie soeben erwähnt, durch Gleichung 99) bestimmt; bezeichnet nämlich a die Abscisse der äussersten, zunächst dem Auflager A gelegenen Stellung des Punktes max $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V} = o$, so ist:

$$a = l\left\{-\frac{p}{k} \pm \sqrt{\frac{p}{k} + \left(\frac{p}{k}\right)^2}\right\} \quad . \quad . \quad 207)$$

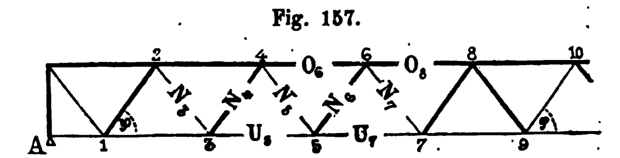
Für Eisenbahnbrücken können die Verhältnisse $\frac{p}{k}$ aus den Tabellen XVII. entnommen werden, indem hiebei die für einseitige Belastung gegebenen Werthe k^1 annähernd gültig sind; genauer werden die Werthe k mit Hülfe der Fig. 134 erhalten. — Für Strassenbrücken findet man die Verhältnisse $\frac{p}{k}$ aus den Angaben der Nummern **66.** und **67.**

Zwischen den Auflagern und den soeben bestimmten Grenzpunkten a ist bei geradlinigen Trägern jede Strebe bloss auf Zug oder bloss auf Druck in Anspruch genommen; zwischen der Mitte und den genannten Punkten a findet in jeder Strebe in Folge Bewegung der Last Wechsel von Druck und Zug statt, sofern nicht Gegenstreben angebracht sind (vergl. N°. **137.**).

Im Vorstehenden sind zunächst frei aufliegende Träger ins Auge gefasst; bei continuirlichen Trägern werden für mehrere besondere Belastungsarten graphische Darstellungen hergestellt, wie solche in Tafel IV. und V. ersichtlich sind und sind in letzteren für jedes $\mathfrak{M}$ stets die gleichzeitigen $\mathfrak{V}$ eingetragen, auch sind die äussersten Lagen der Punkte $\mathfrak{V} = o$ daselbst ersichtlich.

145. Das einfache symmetrische System mit horizontalen Gurtungen ist in England bekannt unter dem Namen der „Warrenträger".

Fig. 157.



Unter Beibehaltung der in N°. **133.** angenommenen Bezeichnungen erhalten wir aus den Gleichungen 180) bis 183) für geradlinige Träger folgende einfache Formeln:

a) für die Gurtungen:

$$O_m \text{ oder } U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 208)$$

und indem Ω den Querschnitt der betrachteten Gurtungen bezeichnet:

$$\text{mittlere Pressung } \mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad 209)$$

$$\text{Spannung } \mathfrak{A} = \frac{U_m}{\Omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 210)$$

Anmerk. Es ist im Vorstehenden ein frei aufliegender Träger vorausgesetzt, wo die obere Gurtung immer gedrückt ist; bei continuirlichen Trägern kann durch Gleichung 209) eine Spannung, durch Gleichung 210) eine Pressung bezeichnet sein.

b) für die Streben:

$$N_m \sin\varphi = \mathfrak{V}'_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 211)$$

und indem ω den Querschnitt der betrachteten Strebe bezeichnet

$$\left.\begin{array}{l}\text{mittlere Pressung } \mathfrak{B}_m \\ \text{oder Spannung } \mathfrak{A}_m\end{array}\right\} = \frac{N_m}{\omega} \quad . \; . \; . \; . \quad 212)$$

Die grösste Pressung $\mathfrak{B}$ findet sich aus der mittleren Pressung $\mathfrak{B}_m$ durch Multiplication mit dem Coefficienten $\left(1 + K\,\frac{\omega L^2}{\Theta}\right)$ wo L die freie Länge des gepressten Gliedes, ω den Querschnitt desselben und Θ das Trägheitsmoment dieses Querschnitts bezeichnet (siehe Gleichung 169).

146. Die bekannteste unter den Brücken nach Warren's System ist der Crumlinviaduct; derselbe ist in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 1858, von Herrn Baurath Malberg beschrieben, welcher Mittheilung die nachstehenden Angaben entnommen sind.

Der Crumlinviaduct liegt in der Newport-Abergavenny-Hereford-Eisenbahn bei Crumlin nahe bei Newport (South Wales) und wurde im Jahre 1853 nach den Plänen der Ingenieure Lidell und Gordon begonnen. — Der Viaduct hat 10 Oeffnungen, welche bei einer Pfeilerdistanz von 150 Fuss englisch eine Spannweite von $147^3/_4$ Fuss oder 45 Metres erhalten haben; die Pfeiler, welche sehr verschiedene Höhen zeigen, bestehen aus gusseisernen Säulen, welche durch schmiedeiserne Stangen und gusseiserne Rahmen verspannt sind; es ist diess aus Tafel IX, wo eine der Oeffnungen dargestellt ist, näher ersichtlich; es ist hier die Geleiseaxe nicht im Mittel der betreffenden zwei Träger angebracht, so dass der äussere Träger weniger zu tragen hätte; in der folgenden Berechnung ist auf diesen Umstand keine Rücksicht genommen, sondern es sind beide Träger gleich stark belastet angenommen (wobei sich übrigens die ungleiche Belastung jederzeit nach dem Hebelverhältniss nachträglich berücksichtigen lässt).

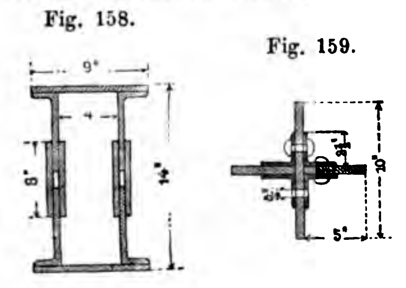
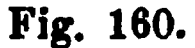
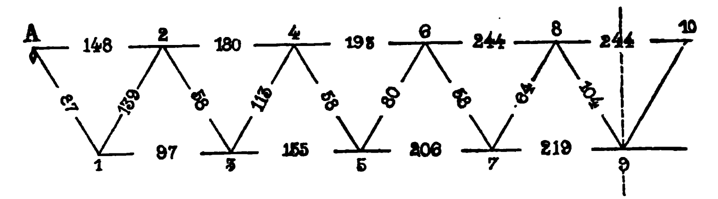


Fig. 158. Fig. 159.

Die obere gedrückte Gurtung hat einen kastenförmigen Querschnitt erhalten, wie nebenstehende Figur 158 zeigt; die untere Gurtung und die gezogenen Streben sind flache Bänder, während die gedrückten Streben einen kreuzförmigen Querschnitt erhalten haben (siehe Figur 159).


Fig. 160.



Die Querschnittdimensionen der Gurtungen und Streben sind nach den Angaben des Herrn Malberg, aber in Quadratcentimeter übertragen, in der folgenden Figur 160 verzeichnet; hiebei ist zu bemerken, dass bei den Flacheisen kein Abzug für Nietlöcher nothwendig war, weil der Querschnitt an den Knotenpunkten durch Deckplatten verstärkt ist; die der Brückenmitte zunächst gelegenen Streben haben einen verhältnissmässig stärkeren Querschnitt erhalten, bei welchem indessen Abzüge nothwendig sein dürften.

147. Wir haben in N°. **65.** für das Eigengewicht einer schmiedeisernen Brücke in Gleichung 103ᵃ) die Gleichung aufgestellt:

$$p = C\,l + F \quad . \; . \; . \; . \quad 213)$$

wo F das Gewicht der Fahrbahn (per meter) und zwar inclusive Schienen, Schotter und Bedielung, C dagegen einen der betreffenden Hauptträgerconstruction eigenthümlichen Coefficienten bezeichnet; wenn wir dagegen im Folgenden das blosse Eisengewicht, exclusive Oberbau und Bedielung, bezeichnen wollen, wenden wir hiefür die Relation an:

$$p' = C l + F' \quad . \; . \; . \; . \quad 214)$$

Der Coefficient C ist für beide Gleichungen derselbe, da für dieselbe Brücke — ganz eiserne Hauptträger vorausgesetzt — p und p′ sich nur durch das Gewicht der Fahrbahn unterscheiden (zu vergleichen der Schluss von N°. **65.**).

Wir haben für den Crumlinviaduct keine Angaben über das Gesammteisengewicht p′; dagegen ist für jede Oeffnung das Gewicht zweier zu demselben Geleise gehörigen Hauptträger zu 50 tons, das Gewicht der zugehörigen Fahrbahn zu 21 tons angegeben; hieraus folgt:

$$F = \frac{21000}{45} = 466 \text{ oder rund } = 480 \text{ Kilo},$$

ferner:

$$p - F = C.l = \frac{50000}{45} = 1111 \text{ Kilo oder rund } 1120 \text{ Kilo},$$

woraus

$$C = \frac{1120}{45} = 24{,}9$$

und

$$p = 24{,}9\; l + 480 = 1600^{k}$$

148. Bei der Berechnung des Crumlinviaducts wurde für jedes Geleise eine zufällige Last von 150 tons für jede Oeffnung angenommen; da wir nun die per meter Geleise antreffende Verkehrslast mit k bezeichnen, so folgt aus vorstehender Angabe:

$$k = \frac{150000}{45} = 3333 \text{ Kilo},$$

es ist aber nach der vorhergehenden Nummer

$$p = 1600 \text{ Kilo},$$

somit

$$q = p + k = 4933 \text{ Kilo}$$
$$\text{oder rund} = 5000 \text{ Kilo};$$

ferner folgt aus Vergleichung mit den Tabellen XVII und XVII[a] für l = 45 Meter:

$$k^1 = {}^5/_4\, k = \text{rund } 4200 \text{ Kilo},$$

woraus

$$q^1 = p + k^1 = 5800 \text{ Kilo}$$
$$q_0 = \frac{q + q^1}{2} = \frac{5800 + 5000}{2} = 5400 \text{ Kilo}$$

und hieraus folgt endlich:

für das grösste Angriffsmoment in der Trägermitte:

$$\text{I.} \;\ldots\ldots\; \text{Max } \mathfrak{M} = \frac{ql^2}{8} = 5000 \; \frac{45^2}{8} = 1265{,}6 \text{ KM.}$$

für die grösste Vertikalkraft in der Trägermitte:

$$\text{II.} \;\ldots\ldots\; \text{Max } \mathfrak{V}_0 = \frac{k^1 l}{8} = \frac{4200 \,.\, 45}{8} = 23{,}6 \text{ tons},$$

für die grösste Vertikalkraft an den Auflagern:

$$\text{III.} \;\ldots\ldots\; \text{Max } \mathfrak{V} = \frac{q + q^1}{2} \, \frac{l}{2} = \frac{5400 \,.\, 45}{2} = 121{,}5 \text{ tons},$$

für die kleinste Vertikalkraft an den Auflagern:

$$\text{IV.} \;\ldots\ldots\; \text{min } \mathfrak{V}_1 = \;\ldots\ldots\; \frac{p\,l}{2} = 36{,}0 \text{ tons},$$

für die äusserste Lage des Punktes $\mathfrak{V} = o$ nach Gleichung 207):

$$\text{V.} \left\{ \begin{array}{l} a = l \left\{ \dfrac{1600}{4200} \pm \sqrt{\dfrac{1600}{4200} + \left(\dfrac{1600}{4200}\right)^2} \right\} = 15{,}5^{m} \\ l - a = 29{,}5^{m} \end{array} \right.$$

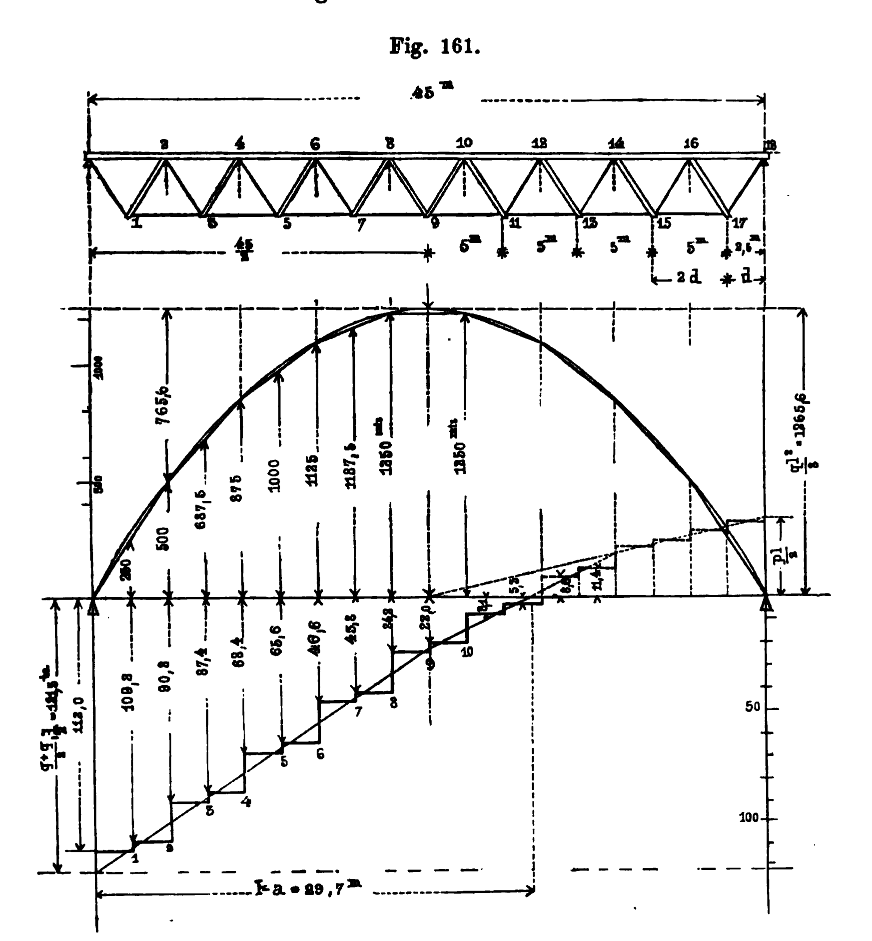
Die Maximalwerthe $\mathfrak{M}$ finden sich aus obiger Gleichung I. mittelst der Gleichung 174), welche hier wiederholt angeschrieben wird:

$$\text{max } \mathfrak{M}_x = \frac{ql^2}{8} - \frac{q x_1^{\,2}}{2} \quad \ldots \quad 174)$$

wo $\mathfrak{M}_x$ das Angriffsmoment im Abstand x von Auflager A, x_1 aber den Abstand desselben Angriffsmoments von der Trägermitte bezeichnet.

Die Maximalwerthe von $\mathfrak{V}$ werden graphisch bestimmt, indem die 4 unter II — V aufgeführten Werthe zur Herstellung der betreffenden graphischen Darstellung hinreichen, wie aus der folgenden Fig. 161 näher ersichtlich ist. — Zu bemerken ist hiebei, dass nur die obern Knotenpunkte durch die Fahrbahn belastet werden, wesshalb mit Rücksicht auf die grosse Fachweite das in N°. **130.** erläuterte Verfahren angewendet wurde.

Fig. 161.



Das auf die untern Knotenpunkte vertheilte halbe Gewicht zweier Hauptträger ist auf 5 M. Länge $= 5 \,.\, \frac{1120}{2} = 2800$ Kilo; um diese letztere Grösse ändert sich $\mathfrak{V}$ an den untern Knotenpunkten und wurde je die Hälfte von dem betreffenden Punkte der Kurve max $\mathfrak{V}$ aufwärts und je die Hälfte abwärts aufgetragen.

Tabelle

$p = 1600^k, \quad k = 3400^k, \quad q = p + k = 5000^k,$

Index m =	1	2	3	4	5	6
					für die	
$\max \mathfrak{M}_m = \frac{ql^2}{8} - \frac{qx_r^2}{2}$	mts 250	mts 250	687,5	875	1000	1125
$O_m = \frac{\max \mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}}$		29762		81845		119048
$U_m = \frac{\max \mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}}$			59524		104166	
Ω_m		148	97	180	155	193
$\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\Omega}$		201		455		616
$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\Omega}$			614		672	
	für die Streben bei Bewegung					
$\mathfrak{B}_m$ in tons:	112,0	109,2	90,2	87,4	68,4	65,6
$N_m = \frac{\mathfrak{B}'_m}{\sin\varphi} = \frac{\mathfrak{B}_m}{1{,}72}$ in Kilogr.	65116	63488	52442	50814	39767	38140
ω_m	87	139	58	112	58	80
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	748		904		685	
$\mathfrak{B}_m = \frac{N_m}{\omega}$		456		450		477
	für die Streben bei Bewegung					
$\mathfrak{B}_m$ in tons:	33,4	30,6	25,2	22,4	11,8	8,0
$N_m = \frac{\mathfrak{B}'_m}{\sin\varphi} = \frac{\mathfrak{B}_m}{1{,}72}$	19400	17790	14650	13023	6860	4651
ω_m	87	139	58	112	58	80
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	223		252		118	
$\mathfrak{B}_m = \frac{N_m}{\omega}$		128		116		58

XLV.

$k^1 = 4200^k$, $q^1 = 5800^k$, $l = 45,0^m$ $\mathfrak{H} = 4,2^m$

7	8	9	10	11	12	Anmerkungen.
Gurtungen:						
1187,5	1250	1250	1250	1187,5	1125	**Zur Bestimmung der Spannungen und Pressungen der Streben genügt es, die Last nur von einer Richtung, z. B. von B gegen A, vorgerückt zu denken, indem der Träger symmetrisch gegen die Mitte angelegt ist; es ist hier auch die Bewegung von A nach B verzeichnet, damit die in denselben Streben wirkenden, mit der Richtung der Last-Bewegung wechselnden Kräfte zur Anschauung kommen.**
	141369		148801		141369	
133929		148801		148801		
206	244	219	244	219	244	
	579		610		579	
650		680		680		
der Last von B nach A:						
46,6	48,8	24,8	22,0	5,0	2,2	
27693	25465	14430	12790	2907	1279	
58	64	104	104	64	58	
477		138		45		
	398		123		22*)	***) Das Band N_{12} ist zwar nur auf Zug construirt; doch genügend steif, weil der fragliche Druck verhältnissmässig gering ist.**
der Last von A nach B:						
— 2,2	— 5,0	— 22,0	— 24,0	— 48,8	— 46,6	
— 1279	— 2907	— 12790	— 14430	— 25465	— 27693	
58	64	104	104	64	58	
	45		138		477	
22		123		398		

Die in Fig. 161 eingetragenen Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ bedürfen nun keiner weiteren Erläuterung; es müssen aber diese Werthe bei der Reduction auf einen einzelnen Hauptträger sämmtlich halbirt werden, indem man die halbirten Werthe mit $\mathfrak{M}'$, beziehungsweise $\mathfrak{V}'$ bezeichnet; das ganze Rechnungsverfahren ist in vorstehender Tabelle XLV. zusammengestellt, wobei zu bemerken, dass die Werthe für die einzelnen Querschnitte aus Fig. 160 direct entnommen werden konnten.

Die Spannungen $\mathfrak{A}$ sind grösser als die mittlern Pressungen $\mathfrak{B}_m$; man findet aber aus letztern die grössten Pressungen nach Gleichung 169) oder annähernd aus Tabelle XIV; für die obern Gurtungen ist nämlich L = 5 Meter, H = 0,23 Meter, somit $\frac{L}{\mathfrak{H}} = \frac{500}{23} = 22$, so dass $\mathfrak{B} = 1{,}25\ \mathfrak{B}_m$ angenommen werden darf $\left(\text{für } \frac{L}{H} = 20\right.$ findet man in der Tabelle für kastenförmigen Querschnitt $\left.\mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{B}}{1{,}2}\right)$; für die gedrückten kreuzförmigen Streben haben wir $L = \frac{4{,}2}{0{,}68} = 4{,}9$ Meter, H = 0,25 Meter, somit $\frac{L}{H} = \frac{490}{25} = 17{,}6$, wonach $\mathfrak{B} = 1{,}30\ \mathfrak{B}_m$ anzunehmen ist.

Es wären also die Werthe $\mathfrak{B}_m$ für die Gurtungen mit 1,25, für die Streben mit 1,30 zu multipliziren, um die grössten im betreffenden Querschnitt herrschenden Pressungen zu erhalten.

148. Bei dem Crumlinviaduct ist für die Verbindung der einzelnen Fachwerksglieder eine eigenthümliche aus Tafel IX. ersichtliche Construction angewendet, indem durch die mit Deckplatten verstärkten Enden der einzelnen Glieder grosse Bolzen gesteckt sind, welche ähnlich wie bei den Kettenbrücken die einzelnen Kräfte zu übertragen haben, aber weil die Abscheerung eine mehrfache ist, mit einem Querschnitt von 64 Quadratcentimetern ($3^1/_2$'' englisch im Durchmesser) genügend stark sind. — Die Verstärkungsplatten an den Enden der einzelnen Fachwerksglieder haben dieselbe Bestimmung, wie die Enderbreitungen an den Gliedern einer Kettenbrücke, indem die durch den Querbolzen hervorgebrachte Verschwächung dadurch ausgeglichen werden soll.

Nach neuern Mittheilungen hat sich die fragliche Anordnung bei dem Crumlinviaduct nicht bewährt; da die erwähnten starken Bolzen lose geworden waren, so mussten die Strebenenden durch aufgenietete Platten verstärkt werden. Die hannöverische Bauzeitung, welche diese Mittheilung macht (Jahrgang 1868, S. 344) bemerkt hiezu, dass die einzelnen Hauptbolzen zu grosse lokale Drücke auszuhalten hatten, was durch die erwähnte Verstärkung

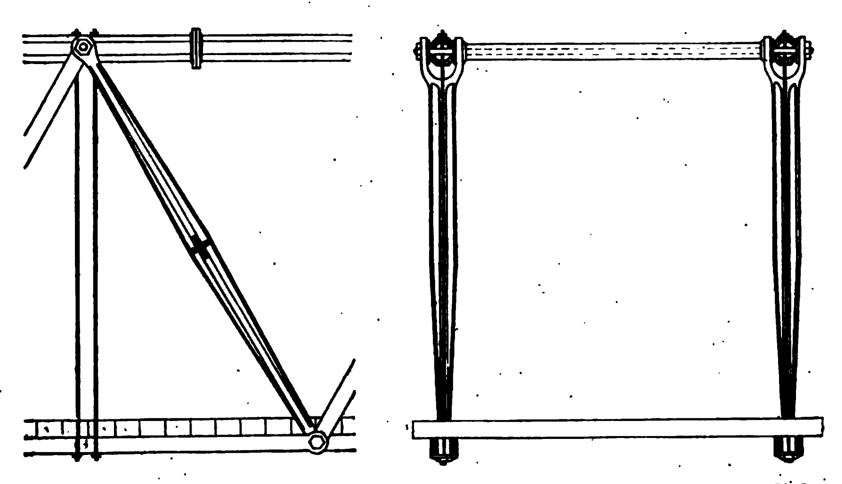
der Enden corrigirt ist. — (Vgl. N°. **52.** über das Verhältniss des Bolzendurchmessers zur Plattendicke.)

Es scheint aber beim Crumlinviaduct noch der weitere Missstand obgewaltet zu haben, dass die Querabsteifung, nur aus einer hölzernen Plattform bestehend, ganz ungenügend war, wesshalb nunmehr eiserne Querträger von 12″ Höhe und 28 Fuss Länge und dazwischen eben solche Längsträger angewendet sind; ferner wurde statt der hölzernen Bebohlung eine Bedeckung aus schmiedeisernen, zusammengesetzten Platten gemacht, und die seitliche Steifigkeit wiederum erheblich vermehrt. — In Folge der angewendeten Verstärkungen werden bei schweren Zügen nur noch $^5/_8$ Zoll Durchbiegung beobachtet, anstatt $1\,^1/_2$ Zoll, welche früher gemessen worden waren.

149. Nahezu gleichzeitig mit dem Crumlinviaduct ist die Trentbrücke bei Newark erbaut worden, welche von Herrn Lohse im Jahrgang 1857 der berliner Zeitschrift beschrieben ist.

Diese Brücke ist schief, hat nur eine einzige Spannweite von 240 Fuss englisch (75,15 M.) und hat für 2 Geleise 4 Träger erhalten, von denen je 2 eine für sich abgesonderte Brücke bilden; die Fahrbahn befindet sich unterhalb und die Höhe der Träger gestattete, oberhalb eine zweite Querverbindung anzubringen, wie aus der folgenden Skizze ersichtlich ist.

Fig. 162. Fig. 162a.



Sämmtliche gedrückte Theile sind von Gusseisen, sämmtliche gezogene Theile von Schmiedeisen; die obere Gurtung besteht aus einer gusseisernen Röhre, die am Endauflager 13″ Durchmesser und $1\,^1/_2$″ Metalldicke hat und gegen die Mitte hin auf

18″ Durchmesser zunimmt; die einzelnen Stücke sind an den Enden genau abgedreht, behobelt und mittelst Flantschen zusammengebolzt. — Die untere Gurtung besteht aus schmiedeisernen Flachstäben von 7—8 Zoll Breite und $^5/_8$—$^3/_4$ Zoll Höhe, deren Anzahl gegen die Mitte hin zunimmt.

Die Fahrbahn hat keine Querträger erhalten, sondern es sind starke, eichene Bohlen unmittelbar auf der untern Gurtung aufgelegt; es ist jedoch unten und oben ausserdem ein vollständiger Horizontalverband angebracht, indem an jedem Knotenpunkt nach der Quere gusseiserne Röhren mit innen liegenden schmiedeisernen Stangen und ausserdem in jedem Felde horizontale schmiedeiserne Diagonalen angebracht sind.

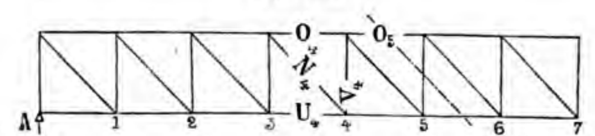
Das Eisengewicht der Brücke soll für ein Geleise 295 tons, für jeden Träger 122,5 tons betragen; wenn man die ganze Trägerlänge zu 79 M. rechnet und die Gewichte der festen Portale (gusseiserne Ständer mit gusseisernen Bögen) in Abzug bringt, so erhält man für das Eisengewicht nach Massgabe der Gleichung 214)

$$p' = 500 + 40 \,.\, l$$

wo l die Spannweite = 73,15 m. bezeichnet.

150. Beim einfachen unsymmetrischen System mit horizontalen Gurtungen gehen bei constantem $\mathfrak{H}$ die Formeln 185) bis 195) in folgende einfache Form über:

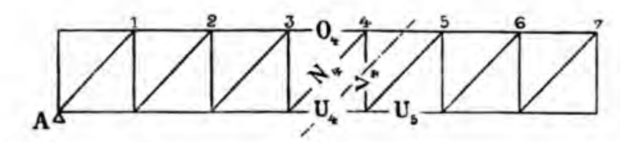
Fig. 163.



Für die Gurtungen ist:
entweder nach Fig. 163:

$$O_m = U_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots \quad 216)$$

Fig. 164.



oder nach Fig. 164:

$$O_{m+1} = U_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots \quad 217)$$

für die schiefen Streben ist für Fig. 163 und Fig. 164 gleichmässig:

$$N_m = \frac{1}{\sin\varphi} \mathfrak{V}'_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 218)$$

endlich für die Vertikalständer, wenn P'_o die im obern, P'_u die im untern Knotenpunkt eintretende Last bezeichnet:
entweder nach Fig. 163)

$$V_m = -\mathfrak{V}'_m - P'_u = -\mathfrak{V}'_{m+1} + P'_o \quad . \quad . \quad . \quad 219)$$

oder nach Fig. 164)

$$V_m = \mathfrak{V}'_m + P'_o = \mathfrak{V}'_{m+1} - P'_u \quad . \quad . \quad . \quad 220)$$

Die Spannungen und die Pressungen in den Gurtungen und in den Streben findet man, wenn die betreffenden Querschnitte bekannt sind, nach den Gleichungen 166)—168); bei ansehnlicher Länge der gepressten Glieder ist zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$ die Gleichung 169) beizuziehen.

In einer Strebe herrscht Zug, wenn ihr Fussende näher beim Punkte $\mathfrak{V} = o$ ist, Druck wenn ihr Kopfende näher bei genanntem Punkte ist (vergl. N⁰. **135.**). Die Abscisse a, welche die von der Trägermitte entfernteste Lage des Punktes $\mathfrak{V} = o$ angiebt, findet sich nach Gleichung 207); zwischen den Abscissen a und $l - a$ sind die Hauptstreben in Folge Bewegung der Last abwechselnd auf Zug und Druck in Anspruch genommen, beziehungsweise sind auf diese Länge Gegenstreben nothwendig.

151. Wie in N⁰. **144.** erläutert, sind beim geraden einfachen Fachwerk die Gurtungskräfte nur von $\mathfrak{M}$, die Kräfte in den schiefen Streben nur von $\mathfrak{V}$ abhängig und sind die grössten Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ in Fig. 156 zusammengestellt.

Bei den Kräften in den Vertikalen kommt wesentlich die Grösse der Lasten P_o und P_u in Betracht; doch ist kein Zweifel, dass in den durch Fig. 163 dargestellten Fällen bei oberhalb belasteten Trägern, wo sämmtliche P_u nur kleine Werthe zeigen, die Kräfte V_m dann den grössten Druck auszuhalten haben, wenn die Kräfte $\mathfrak{V}_m$ ihren grössten negativen Werth erreichen, wie diess aus Gleichung 219) deutlich hervorgeht. — Anders ist es, wenn solche Träger unterhalb belastet sind, indem es sich dann fragt, ob V_m nicht grösser wird, wenn die Last von B nur bis $m + \frac{1}{2}$ vorgerückt ist; in letzterem Falle ist nämlich, wenn wir der Einfachheit halber P_o = Null, $k_{m+1} = k_{m-1} = k$ setzen, und die Fachweite = d annehmen:

$$V_m = -\max \mathfrak{V}'_{m+1} + P_o$$

$$V_m = \frac{kl}{8} + \left(\frac{1}{2} - x_{m+\frac{1}{2}}\right)\left(p + \frac{3}{4}k\right) \quad . \quad I.$$

während bei der von B bis $m - \frac{1}{2}$ vorgerückten Last

$$V_m = -\max \mathfrak{V}'_m - P_u$$

$$V_m = \frac{kl}{8} + \left(\frac{1}{2} - x_{m+1/2} + d\right)\left(p + \tfrac{3}{4}k\right) - \left(p + k\right)d \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Der Werth von V_m ist nun nach Gleichung II. kleiner als nach Gleichung I. um die Grösse:

$$(p + k)\, d - (p + {}^3/_4\, k)\, d = {}^1/_4\, k\, d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Die durch Gleichung III. angegebene Differenz wäre ganz dieselbe gewesen, wenn irgend ein Theil des Eigengewichts im obern Knotenpunkte angebracht gedacht werden kann, da die Summe $P_u + P_o$ dennoch denselben Werth $(k + p)\, d$ gehabt hätte.

In dem durch Fig. 164 dargestellten Falle findet die Differenz in umgekehrtem Sinne statt, d. h. V_m hat bei unterhalb belastetem Träger ganz entschieden seinen grössten Werth, wenn die Last von B bis $x_{m+1/2}$ vorgerückt ist (vergl. Gleichung 220); dagegen findet bei oberhalb belasteten Trägern wieder die durch obige Gleichung III. dargestellte Differenz zu Gunsten der nur bis $m + {}^1/_2$ vorgerückten Last statt.

Bei dem geringen Betrage der durch obige Gleichung III. dargestellten Differenz $\frac{kd}{4}$ würde in den betreffenden Fällen die Stärke der Vertikalständer V_m wenig alterirt, wenn man die Last von B bis $m - {}^1/_2$ anstatt nur bis $m + {}^1/_2$ vorgerückt angenommen hätte; anders ist es bei Trägern mit gekrümmten Gurtungen, wo die Zunahme von $\mathfrak{V}$ theilweise durch die Gurtungen aufgenommen wird, wo also die Entlastung durch P_u beziehungsweise P_o in erhöhtem Masse wirkt; die bezügliche Regel, welche nach obiger Entwicklung auch für gerade Träger gültig, bei gekrümmten Trägern aber besonders wichtig ist, lautet: bei allen unsymmetrischen Fachwerken findet die **grösste Kraft in den Vertikalständern** statt:

a) Bei Anwendung von gezogenen schiefen Streben und gedrückten Vertikalen;
  bei oben aufliegender Fahrbahn für die von B bis $m - {}^1/_2$ vorgerückte Last;
  bei unten aufliegender Fahrbahn für die von B bis $m + {}^1/_2$ vorgerückte Last;

b) bei Anwendung von gedrückten Streben und gezogenen Vertikalen;
  bei oben aufliegender Fahrbahn für die von B bis $m + {}^1/_2$ vorgerückte Verkehrslast;
  bei unten aufliegender Fahrbahn für die von B bis $m - {}^1/_2$ vorgerückte Last.

Rückt die Last von A nach B ein, so findet in allen vorstehend aufgeführten Fällen je das umgekehrte Verhältniss statt d. h. es muss für $m + {}^1/_2$ gesetzt werden $m - {}^1/_2$, für $m - {}^1/_2$ aber $m + {}^1/_2$.

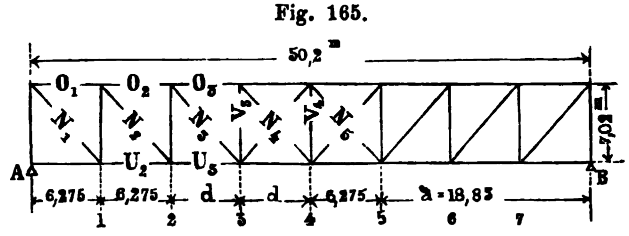
152. Eine Fachwerkbrücke nach vorstehend beschriebenem System wurde von der k. bayrischen Eisenbahnverwaltung über die Isar bei München hergestellt.

Die Brücke hat 2 Mittelpfeiler und 3 Oeffnungen erhalten, deren jede für sich durch frei aufliegende Träger von je 50,2 M. Spannweite überbrückt wird.

Die Eisenconstruction dieser Brücke war der Maschinenfabrik von Klett und Comp. in Nürnberg übertragen, deren Ingenieur Herrn Gerber wir die gefällige Mittheilung der Werkzeichnungen verdanken. Ansicht und Grundriss eines Trägers nebst einigen Details sind in Tafel X. wiedergegeben.

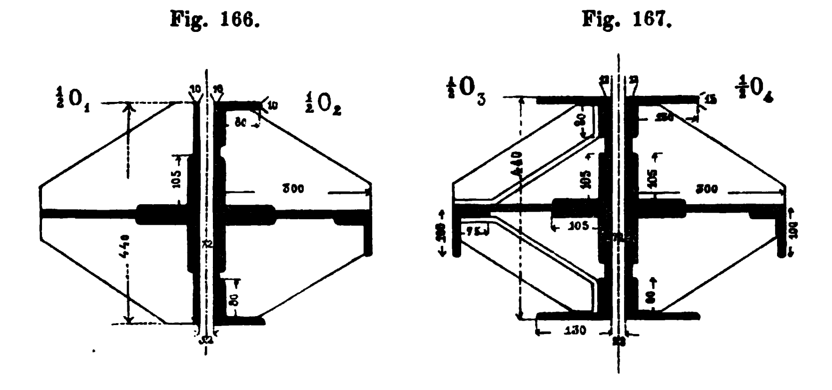
Die Hauptträger dieser Brücke, deren zwei für jedes Geleise dienen, haben eine geometrische Gurtungsdistanz (Höhe) von 7,02 M. und eine Fachweite von 6,275 M. erhalten; die ganze Länge jedes Hauptträgers ist somit in 8 Felder getheilt; die Fahrbahn ist unmittelbar über der untern Gurtung angebracht, so dass oberhalb eine zweite Querverspannung hergestellt werden konnte.

Fig. 165.



Die Gurtungen bestehen je aus 2 Theilen, welche durch einen Zwischenraum von 28 Mm. getrennt sind; in Fig. 166 ist links

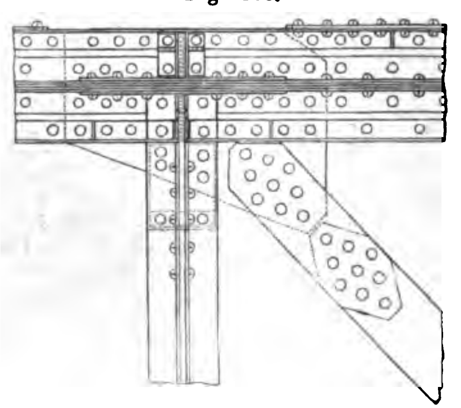
Fig. 166. Fig. 167.



die halbe obere Gurtung des ersten Feldes, rechts die des zweiten Feldes dargestellt (wobei zu bemerken, dass in Fig. 166 und 169 anstatt 32^{mm} als Zwischenraum gleichfalls 28^{mm} einzusetzen ist); ebenso zeigt Fig. 167 die Gurtungen des dritten und des vierten

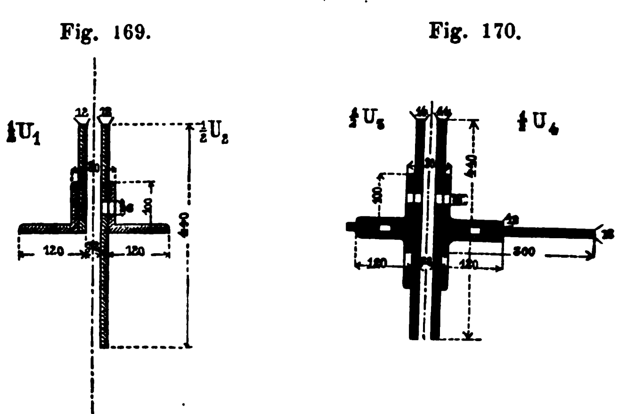
Feldes und ist aus diesen Figuren ersichtlich, wie die Verstärkung der Gurtungen gegen die Mitte durch Hinzufügung weiterer Winkel oder Platten erzielt wird; die Mehrzahl der Winkel und Platten ist je am Knotenpunkte selbst gestossen und dient nun ein 28 Mm.

Fig. 168.



starkes, polygonales Stossblech — welches den erwähnten Zwischenraum zwischen den beiden Gurtungshälften ausfüllt, sowohl zur Verbindung der gestossenen Gurtungsglieder als zur Befestigung der Diagonalen und Vertikalständer, wie solches aus bestehender Fig. 168 näher ersichtlich ist. Soweit der Querschnitt durch besagtes polygonales Stossblech nicht ersetzt ist, sind weitere Stossplatten hinzugefügt.

Fig. 169. Fig. 170.

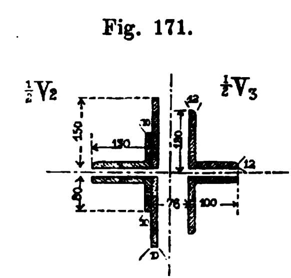


Die untere Gurtung ist in ähnlicher Weise construirt, mit dem Unterschied jedoch, dass diese Gurtung, weil durchaus auf Zug in Anspruch genommen, verhältnissmässig stärkere Flacheisen und weniger Winkel erhalten hat; die Figuren 169 und 170 stellen

die untern Gurtungen für die Felder (1) bis (4) dar, indem in jeder Figur wieder zwei verschiedene Gurtungshälften erscheinen. Die untere Gurtung hat, wie auch die obere, im allgemeinen eine Höhe von 44 Cent. erhalten; im ersten Felde ist dieselbe jedoch nur halb so hoch, und ist damit schon in der äussern Ansicht angezeigt, dass die untere Gurtung im ersten Felde gar keine Fachwerkskräfte aufzunehmen hat, sondern nur zur gegenseitigen Fixirung des ersten untern Knotenpunkts und des Endständers, sowie ebendamit zur Consolidirung der Fahrbahn dient.

Die schiefen Streben oder Diagonalen bestehen aus Flacheisen von 26—50 Cent. Breite, 28—30 Mm. Dicke, welche in den beiden Endfeldern durch aufgenietete weitere Flacheisen verstärkt sind; in Fig. 168 ist die Verbindung der Diagonalen mit den Gurtungen und Vertikalen ersichtlich.

Fig. 171.



Die Vertikalständer bestehen je aus 4 Winkeln, welche gegen die Auflager hin an Stärke zunehmen, und ausserdem an den Knotenpunkten (1) und (2) mit Flacheisen verstärkt sind, wie solches beistehende Fig. 171 angiebt.

Die Endständer bestehen je aus 12 Winkeln und 2 hinzugefügten Flacheisen und ist deren Stärke danach bemessen, dass nicht nur die vertikale Resultante der anstossenden Strebenkraft auf die Auflager übertragen, sondern auch alle seitlichen Kräfte, insbesondere die vom Winddruck in der obern Horizontalverspannung hervorgerufenen, durch die relative Festigkeit der Endständer aufgenommen werden können.

Die Fahrbahntafel zeigt Schwellenträger von 6,275 M. Länge, welche als Blechwandträger construirt sind, aufruhend auf Querträgern, welche aus einem einfachen Fachwerk bestehen und an den Vertikalständern der Hauptträger befestigt sind. Man ersieht hieraus, dass das Gewicht der Fahrbahntafel, beziehungsweise die Verkehrslast in keiner Weise die relative Festigkeit der Fachwerksglieder in Anspruch nimmt, dass vielmehr sämmtliche Lasten in den Knotenpunkten eintreten.

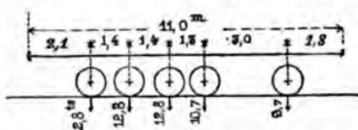
152. Für die Berechnung der Hauptträger dienen folgende Gewichtsangaben:

Das Eigengewicht der Brücke beträgt für ein Geleise per laufenden Meter:

zwei Hauptträger, zusammen . .	1786 Kilo
Verspannung	114 „
	1900 Kilo

	Uebertrag		1900 Kilo	
Plattform:				
	Querträger . . .	200		
	Schwellenträger .	434		
	Diverse	34		
			668 „	
Geländer	. . . .		66 „	
	zus. Eisengewicht $p' =$		. . .	2634 Kilo
ferner	Querschwellen		272 Kilo	
	Saumschwellen		40 „	
	Diehlenbelag		160 „	
	Schienen		74 „	
	zus. Oberbau $p'' =$		. . .	546 „
	total $p = p' + p'' =$		. . .	3180 Kilo

Fig. 172.



Als Verkehrslast ist eine Reihe von 3 Tenderlocomotiven mit nachfolgenden Waggons von 16 tons Gewicht und 5,2^m Länge angenommen, deren Axbelastung und Axendistanz aus Fig. 172 ersichtlich ist; hiernach wurde als grösstes durch die variable Last in der Trägermitte hervorgerufenes Angriffsmoment

$$\max \mathfrak{M}_k = 1711{,}2 \text{ Mtons}$$

berechnet, woraus sich als gleichförmige stellvertretende Ueberlast k = 5440 k per Meter und Geleise ergiebt.

Es folgt aus Vorstehendem, dass als Gesammtlast

$$q = p + k = 3180 + 5440 = 8620 \text{ k}$$

per Meter und Geleise angenommen werden darf.

Bei der beschriebenen Belastungsweise mit aufeinanderfolgenden Tenderlocomotiven darf auch bei einseitiger Belastung das per Meter wirkende Gewicht der gleichförmig vertheilten Last q gleichgesetzt werden, und folgt hieraus:

$$k^1 = k = 5440 \text{ Kilo}$$
$$q_0 = q = 8620 \text{ „}$$

und ist endlich

$$\frac{p}{k^1} = \frac{p}{k} = \frac{3180}{5440} = 0{,}585$$

Aus vorstehenden Gewichts- und Belastungsangaben folgt für jeden der beiden Hauptträger:

Grösstes Angriffsmoment in der Trägermitte:

$$\text{I.} \quad \max \mathfrak{M}' = {}^1/_2 \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{8620 \cdot 50{;}2^2}{2 \cdot 8} = 1357{,}85 \text{ Mtons.}$$

Grösste Vertikalkraft am Auflager:

$$\text{II.}\quad \max \mathfrak{V}' = {}^1/_2\ \frac{ql}{2} = \frac{8620 \times 50{,}2}{2 \times 2} = 108{,}18 \text{ ts.}$$

Grösste Vertikalkraft in der Trägermitte:

$$\text{III.}\quad \max \mathfrak{V}'_{{}^1/_2 l}\ \frac{1}{2}\ \frac{kl}{8} = \frac{5440 \times 50{,}2}{2 \times 2} = 17{,}0 \text{ ts.}$$

Grösste Vertikalkraft in Folge des Eigengewichts:

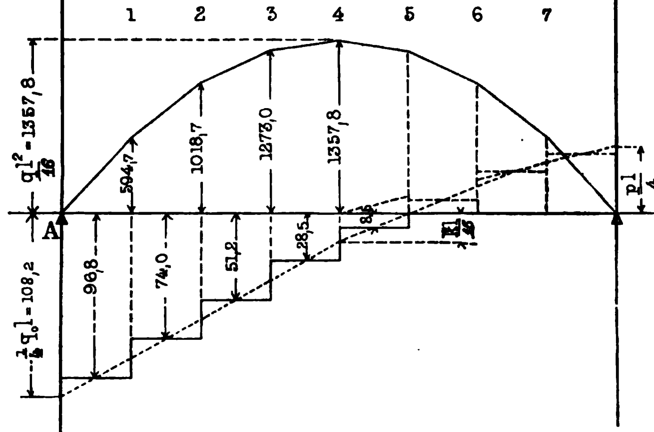
$$\text{IV.}\quad \min \mathfrak{V}'_1 = {}^1/_2\ \frac{ql}{2} = \frac{3180\ .\ 50{,}2}{4} = 30{,}9 \text{ ts.}$$

Grösste Annäherung des Punktes $\mathfrak{V} = 0$ an das Auflager A nach Gleichung 207):

$$\text{V.}\quad \begin{cases} a = \left\{-0{,}585 \pm \sqrt{0{,}585 + (0{,}585)^2}\right\} 50{,}2 = 18{,}925^m \\ l - a = 31{,}375^m \end{cases}$$

Indem man nun nach Anleitung von Fig. 156 für den vorliegenden Fall die nachfolgende Fig. 173 construirt hat, so er-

Fig. 173.



hielt man nach den bekannten Eigenschaften der Geraden und der Parabel (welche letztere nach Gleichung 174) berechnet wurde) nachstehende Tabelle, welche sämmtliche zur Bestimmung der Fachwerksdimensionen nothwendigen Angriffsmomente $\mathfrak{M}'$ und Vertikalkräfte $\mathfrak{V}'$ enthält:

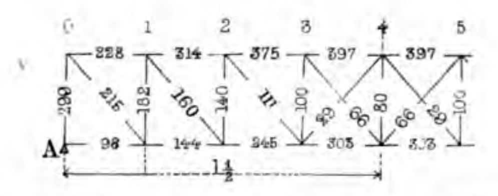
Tabelle XLVI.

$\mathfrak{M}'_1$ =	594,7	Mtons.	$\mathfrak{V}'_1$ =	96,80	ts.
$\mathfrak{M}'_2$ =	1018,7	„	$\mathfrak{V}'_2$ =	74,0	„
$\mathfrak{M}'_3$ =	1273,0	„	$\mathfrak{V}'_3$ =	51,4	„
$\mathfrak{M}'_4$ =	2357,8	„	$\mathfrak{V}'_4$ =	20,5	„
			$\mathfrak{V}'_5$ =	8,5	„

Ausser den Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ sind auch noch die Belastungen der Knotenpunkte zu bestimmen. — Die obern Knotenpunkte sind nur durch das halbe Gewicht der Hauptträger belastet, welches auf die Fachträger 1900 . 6,275 = 11922 Kilo antrifft, so dass $P_0 = 5961$; $P'_0 = 2980$ Kilo beträgt; die untern Knotenpunkte haben im Minimum, d. h. wenn die Brücke gar nicht belastet ist, ausserdem noch das Gewicht der Fahrbahn aufzunehmen, welches letztere auf Fachlänge 1280 . 6,275 = 8032^k beträgt, wonach min $P_u = 14000^k$, min $P'_u = 7000^k$ ist; hiezu kommt die Verkehrslast, welche für den Knotenpunkt m bei Belastung von B bis (m—½) den Werth k d hat; für diesen Fall ist:

$$P'_u = 7000 + 17068 = 24068 \text{ Kilo.}$$

Fig. 174.



Die Querschnittdimensionen der Fachwerksglieder sind in Fig. 174 zusammengestellt, wie solche von Herrn Gerber angegeben sind; es sind bei den gezogenen Theilen die Nietlöcher in Abzug gebracht, während bei den gedrückten Gliedern dieser Abzug nicht stattfand, wohl hauptsächlich desshalb, weil bei letztern in Folge der ansehnlichen Länge die mittlere Pressung wesentlich geringer ist als die Pressung in den äussersten Fasern.

Es ist nämlich das Verhältniss $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ nach der Formel 169) berechnet worden

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 169)$$

wobei indess K = 0,0001 gesetzt wurde, während wir in Tabelle XI. für Schmiedeisen K = 0,00008 angegeben haben; nach vorstehender Formel hatten sich für den vorliegenden Fall (unter der Annahme

K = 0,0001) die in der folgenden Tabelle XLVII. enthaltenen Werthe ergeben.

Nachdem nunmehr alle Elemente der Berechnung entwickelt sind, werden zunächst die Fachwerkskräfte O, U, N und V nach den Gleichungen 216—220) unter Einführung der durch Tabelle XLVI. gegebenen Werthe $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{V}'$ bestimmt, und erhält man schliesslich die in jedem Glied herrschende grösste Spannung $\mathfrak{A}$ oder Pressung $\mathfrak{B}$ mittelst der Gleichungen 166—168, wobei die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ aus Tabelle XLVII. entnommen werden.

Tabelle XLVII.

Gurtungsglieder	O_1	O_2	O_4	O_4
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,54	1,34	1,26	1,24
Pfosten	V_1	V_2	V_3	V_4
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,56	1.80	2,0	2,6

Das ganze Verfahren ist in nachstehender Tabelle XLVIII. enthalten.

Wir ersehen aus dieser Tabelle, dass die grössten Spannungen und Pressungen in den Gurtungen, sowie in den Diagonalen (schiefen Streben) der Spannung von 600 Kilo per □ Cent. sehr nahe kommen; bei den Vertikalständern finden grössere Differenzen statt, wohl desshalb, weil bei der der Ausführung zu Grunde gelegten Berechnung nicht die gleichmässigen Lasten, sondern die Gewichte der einzelnen Locomotiven und Tenderaxen in Berechnung gekommen sind.

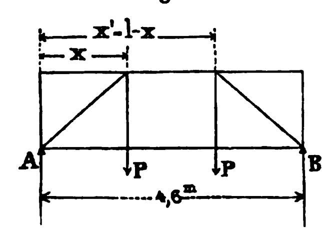
153. Die Querträger zeigen ein Fachwerk, dessen Endfelder durch volle Blechwandungen gebildet und durch aufgenietete diagonale Winkeleisen verstärkt sind; die untere Gurtung dieser Querträger besteht aus vier Winkeleisen, welche zugleich ein rückwirkendes Element für die untere Windverstrebung bilden; ihr Querschnitt beträgt nach Abzug der Nietlöcher 70 □ Cent.; die obere Gurtung besteht aus zwei Winkeln und einem Flacheisen und hält ohne Nietenabzug 74 □ Cent.

Tabelle XLVIII.

$p = 3180^k$, $k = 5440$, $l = 50,2$, $\mathfrak{H} = 7,02_m$, $\sin\varphi = 0,745$

Index m =	1	2	3	4	5
$\max \mathfrak{M}'_m$	594,7 mts	1018,7	1273,0	1357,8	1273,0
$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}}$	84,86 ts	145,52	181,86	193,98	181,86
Ω in □ Cent.	228	314	375	397	375
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,54	1,30	1,26	1,24	1,26
$\mathfrak{B} = \frac{O_m}{\Omega} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	573 k	602	611	606	611
$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}}$		84,86 ts	145,32	181,86	145,52
Ω in □ Cent.		144	245	303	245
$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\Omega}$		589	594	600	594
$\mathfrak{V}'_m$	96,8 ts	74,0	51,2	28,5	8,0
$N_m = \mathfrak{V}'_m \frac{1}{\sin\varphi}$	130,0 ts	99,36	68,64	38,2	10,74
ω_m in □ Cent.	215	160	111	66	29
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	605 k	620	616	579	370
$\max V_m = \max \mathfrak{V}'_{m+1} + P'_o$	74,0 + 3,0 = 77,0 ts	51,2 + 3,0 = 54,2	28,5 + 3,0 = 31,5	8,0 + 3,0 = 11,0	
ω_m in □ Cent.	182	140	100	80	
$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	1,56	1,80	2,00	2,60	
$\mathfrak{B} = \max V_m \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$	660 k	697	630	378	

Fig. 175.



Für die Berechnung der Querträger hat man zunächst die Last P zu bestimmen, welche an jedem der beiden Lastpunkte (Vertikalstützen) wirkend gedacht ist; diese Last P setzt sich aus dem Eigengewicht $P_{,}$ und der Verkehrslast $P_{,,}$ zusammen.

Das Eigengewicht beträgt per laufenden Meter:

Querträger	200
Schwellenträger . .	434
Oberbau	546
zus.	1180 Kilo.

somit ist bei 6,275 M. Querträger Distanz:

$$2 \,.\, P_{,} = 1180 \,.\, 6{,}275 = 7404^{k} \text{ und } P_{,} = 3702^{k}.$$

Die Verkehrslast $P_{,,}$ ist durch die ungünstigste Stellung einer Locomotive bestimmt, wie solches durch Fig. 176 dargestellt ist;

Fig. 176.

nach dem Hebelgesetz ist der Druck auf den mittleren der gezeichneten drei Querträger:

$$B = 12{,}8 \, \frac{3{,}475 + 4{,}875}{6{,}275} + 12{,}8 + 10{,}7 \, \frac{4{,}975}{6{,}275} + 9{,}7 \, \frac{1{,}975}{6{,}275}$$
$$= 41{,}4 \text{ tons},$$

woraus $P_{,,} = \frac{B}{2} = 20{,}7$ tons und schliesslich

$$P = P_{,} + P_{,,} = 3{,}7 + 20{,}7 = 24{,}4 \text{ tons sich ergiebt.}$$

Durch Anwendung des Hebelgesetzes, speziell der Gleichungen 170)—173) erhält man:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = P \,.\, x = 24{,}4 \times 1{,}55 = 37{,}82 \text{ tons}$$

und hieraus nach Gleichung 216):

$$U_2 = O_1 = O_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{H}} = \frac{37820}{1{,}37} = 27600 \text{ Kilo},$$

woraus endlich für die obere Gurtung:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{27600}{74} = 373 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

und für die untere Gurtung:

$$\mathfrak{A} = \frac{27600}{70} = 394 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Die Schwellenträger haben volle Blechwandungen auf ihre ganze Länge erhalten und werden nach Gleichung 158) berechnet, nachdem max $\mathfrak{M}$ wiederum durch die grösste Verkehrsbelastung bestimmt worden ist; das Verfahren ist in N⁰. **110**. eingehend dargestellt.

154. Die Berechnungsweise, welche von den Ingenieuren der k. bayr. Staatsbahn im vorliegenden Falle angewendet wurde, ist dieselbe, welche in der Zeitschrift des bayrischen Architecten- und Ingenieurvereins bei der Beschreibung der Ingolstadter Donaubrücke veröffentlicht wurde. (Jahrgang 1869.) Es wird nämlich eine ideelle Spannung von 1200 Kilo per □Centimeter zu Grunde gelegt, welche Spannung durch das 1,2fache Eigengewicht und die 2 ½ bis 3½fache Verkehrslast hervorgebracht würde; im vorliegenden Falle wurde die Verkehrslast bei den Hauptträgern 2½fach, bei der Fahrbahn 3½fach gerechnet.

Für die Hauptträger haben wir nach den obigen Gewichtsangaben:

$$\frac{p}{q} = 0{,}37 \qquad \frac{k}{q} = 0{,}63\,,$$

somit ist, wenn wir mit $\mathfrak{A}$ die wirklich vorhandene Totalspannung bezeichnen, bei gleichförmig vertheilter Maximallast:

die Spannung in Folge des Eigengewichts $\mathfrak{A}_p = 0{,}37\ \mathfrak{A}$,
" " " " der Verkehrslast $\mathfrak{A}_k = 0{,}63\ \mathfrak{A}$.

Als ideelle Summe der in obiger Weise vergrösserten Gurtungsspannungen $\mathfrak{A}_p$ und $\mathfrak{A}_k$ ergiebt sich:

$$1{,}2 \,.\, (0{,}37\ \mathfrak{A}) + 2{,}5\ (0{,}63\ \mathfrak{A}) = 1200 \text{ Kilo}\,,$$

woraus als wirklich vorhandene Spannung folgt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1200}{2{,}0} = 600 \text{ Kilo}\,,$$

welche Spannung hienach für die Gurtungen — deren grösste Anstrengung bei gleichförmig vertheilter Maximallast stattfindet — in Aussicht genommen ist.

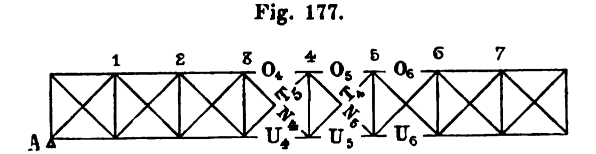
Unsere Berechnungsweise hat uns, wie aus Tabelle XLVIII. ersichtlich, für die Gurtungen und Diagonalen sehr annähernd die beabsichtigte Spannung von 600 Kilogramm gegeben, während bei den Vertikalen eine etwas grössere Differenz sich zeigt; der Umstand, dass wir im Allgemeinen stärkere Spannungen erhalten haben,

beweist, dass unser Verfahren die ungünstigsten einseitigen Belastungen gebührend berücksichtigt.

155. Das doppelte symmetrische System mit horizontalen Gurtungen wird meist in der Weise angewendet, dass die gleichnummerigen (in denselben Vertikalen befindlichen) Knotenpunkte mittelst leichter Vertikalständer verbunden sind, welch letztere nur zur gleichmässigen Vertheilung der Last auf die beiden Gurtungen dienen; nach N⁰. **142.** trifft diese Voraussetzung bei entsprechend geringer Stärke der Vertikalen zu, wenn die in demselben Fache befindlichen, gezogenen und gedrückten Streben annähernd gleiche Widerstandsfähigkeit haben (wobei der gedrückte Querschnitt im Verhältniss $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ grösser anzunehmen ist).

Anmerk. Wenn die gedrückten Streben übermässig stark construirt würden, oder aber umgekehrt wegen Mangels an Steifigkeit sich ausbiegen würden, so wäre die betreffende Construction als combinirtes Sytem zu betrachten, und zwar um so mehr, wenn die Vertikalständer vermöge zu übermässiger Querschnittdimensionen die Vertheilung der Strebenkräfte beeinflussten.

Fig. 177.



Indem wir die in N⁰. **135.** angenommenen Bezeichnungen beibehalten, erhalten wir durch Vereinfachung der in N⁰. **140.** gegebenen Formeln:

a) für die Gurtungen:

$$O_m = U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots \quad 221)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_m \text{ (oder } \mathfrak{A}) &= \frac{O_m}{\Omega} \\ \mathfrak{A} \text{ (oder } \mathfrak{B}_m) &= \frac{U_m}{\Omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 222)$$

und zwar ist beim frei aufliegenden Träger, wie mehrfach erwähnt, die untere Gurtung stets gezogen, die obere Gurtung stets gedrückt.

b) Für die Streben nach Gleichung 195):

$$\left.\begin{aligned} N_m &= \mathfrak{V}'_m \frac{1}{\sin\varphi} \\ T_m &= \mathfrak{V}'_m \frac{1}{\sin\psi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 223)$$

wo in Folge der Gleichheit der Winkel φ und ψ die Werthe N_m und T_m identisch sind. — Indem wir nun annehmen, dass mit N diejenigen Streben bezeichnet sind, deren Kopfende gegen das linke Auflager A gerichtet sind und sodann nur dasjenige Trägerstück betrachten, welches zwischen A und dem Punkte $\mathfrak{V} = o$ sich befindet, so ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{\mathfrak{V}'_m}{\sin \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 224)$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{T_m}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{\mathfrak{V}'_m}{\sin \psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 225)$$

Zur Bestimmung der zunächst beim Auflager A befindlichen äussersten Lage des Punktes $\mathfrak{V} = o$ müssen wir uns die Last von B gegen A bis zum genannten Punkte vorgerückt denken, welcher Punkt durch Gleichung 99), beziehungsweise 207) gegeben ist. — Damit jedoch das Fach, inner welches der genannte Punkt $\mathfrak{V} = o$ fällt, auch wirklich gezogene N und gedrückte T enthält, ist nothwendig, dass der zunächst rechts (gegen B) gelegene Knotenpunkt ein grösseres $\mathfrak{M}$ zeige, als der zunächst links gelegene (vergl. die Regeln in N°. **134**.).

156. Als Beispiel eines symmetrischen doppelten Fachwerks wählen wir die Brenzbrücke bei Königsbronn, welche im Jahre 1864 auf der Linie Aalen-Heidenheim erbaut wurde. Die Spannweite beträgt 19,25 M. und sind die übrigen Abmessungen für die Construction der Brücke auf Tafel XI. gegeben.

Hienach bestehen die beiden Gurtungen aus je zwei Winkeleisen und aus zwei Flacheisen von 8½ Zoll württembergisch. (24,3 Cent.) Breite und 4 Zoll (11,4 Cent.) Dicke; in denjenigen Fachen, in welchen Stösse der Flacheisen vorkommen, ist je eines der Flacheisen (welches als Stossplatte dient), in Abzug zu bringen (zu vergl. N°. **54**. und **55**.); die Winkeleisen haben an den Stössen besondere Stossplatten erhalten.

Die Gurtungswinkel umfassen polygonale Futterbleche, welche zu Befestigung der Streben und Vertikalen dienen.

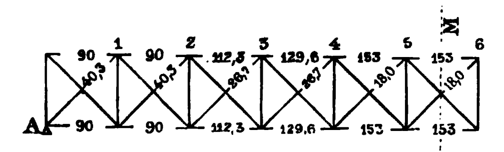
Die Diagonalstreben haben durchaus ⊥ förmigen Querschnitt, indem etwa die Hälfte der gezogenen Stäbe bei einseitiger Belastung auch auf Druck in Anspruch genommen werden kann; in den Endfeldern sind die ⊥ Eisen durch aufgenietete Flacheisen verstärkt; letztere sind insoweit gekröpft (d. h. aus der Vertikalebene gerückt), dass die Befestigung der Streben an die genannten Futterbleche mittelst doppelschnittiger Nieten geschehen konnte; der letztere Zweck ist bei den übrigen Diagonalen mittelst kurzer Beilagen erreicht.

Die Vertikalständer bestehen aus leichten doppelten Winkeleisen, welche zur Aufnahme der Fahrbahn dienen und das Ge-

wicht der letztern auf beide Gurtungen gleichmässig vertheilen sollen.

Die Fahrbahntafel konnte sehr leicht werden, da die Querdistanz der Hauptträger nur 9′ (oder 2,57 M.), der Längenabstand der Querträger nur 6,1′ (oder 1,74 M.) beträgt.

Fig. 178.



Die Fig. 178 giebt für sämmtliche Fachwerksglieder diejenigen Querschnittsdimensionen an, welche in die Rechnung einzuführen sind, und zwar angegeben in □Centimetern.

157. Die Verkehrsbelastung kann für die vorstehend beschriebene Brücke direct nach den in Tab. XVII^a. gegebenen Angaben bestimmt werden, indem bei den Brücken der württembergischen Staatsbahn die in genannter Tabelle angenommene Güterlokomotive massgebend ist.

Bei einer Spannweite von 19,25^m finden wir aus Tab. XVII^a

$$p = 1450 \text{ k} \qquad k = 4660 \text{ k}$$

$$q = 6110 \text{ k} \qquad k^1 = 6600 \text{ k}$$

$$\frac{k + k^1}{2} = 5630 \text{ k}$$

$$q_0 = p + \frac{k + k^1}{2} = 7080 \text{ k},$$

woraus die hauptsächlichsten Grössen wie folgt bestimmt werden: Grösstes Angriffsmoment in der Trägermitte:

$$\text{M max } \mathfrak{M} = \frac{q\,l^2}{8} = 282{,}6 \text{ mts.} \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Grösste Vertikalkraft am Auflager:

$$\text{M max } \mathfrak{V} = \frac{q_0\,l}{2} = 68{,}14 \text{ tons} \quad \ldots\ldots \quad \text{II.}$$

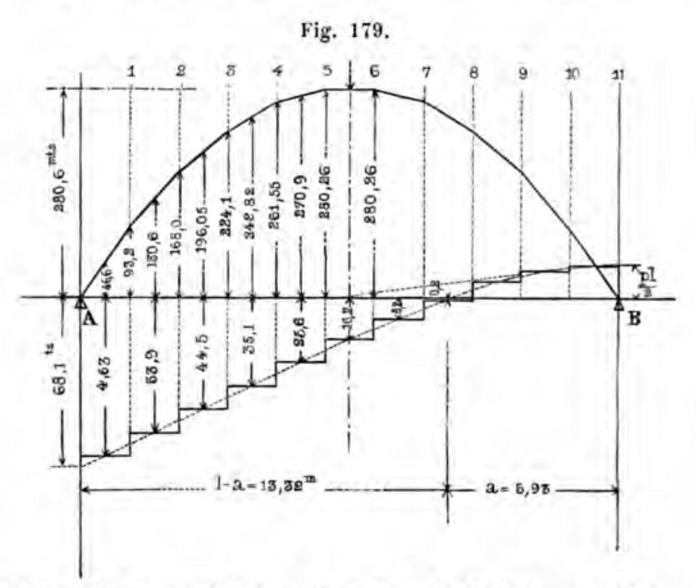
Grösste Vertikalkraft in der Trägermitte:

$$\text{max } \mathfrak{V}_{1/2\,l} = \frac{k^1\,l}{8} = 16{,}156 \text{ tons} \quad \ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Kleinste Vertikalkraft am Auflager:

$$\text{min } \mathfrak{V}_l = \frac{p\,l}{2} = 13{,}95 \text{ tons} \quad \ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Fig. 179.



Aeusserste Lage des Punkts $\mathfrak{V} = o$ nach Gleichung 207:

$$\left.\begin{array}{l} a = l \left\{ 0{,}22 \pm \sqrt{0{,}22 + 0{,}22^2} \right\} = 5{,}93^m \\ l - a = 13{,}32^m \end{array}\right\} \text{V.}$$

Mittelst vorstehend berechneter Grössen ist die Figur 179) nach Anleitung des in N⁰. **144**. gegebenen Verfahrens construirt worden und erhalten wir aus genannter Figur 179 nachstehende Werthe:

a) für die grössten Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ mit Hilfe von Gleichung 215):

$\mathfrak{M}_1$	$\mathfrak{M}_2$	$\mathfrak{M}_3$	$\mathfrak{M}_4$	$\mathfrak{M}_5$	$\mathfrak{M}_6$
93,2^{mts}	168,0	224,1	261,55	280,3	280,3

$\mathfrak{M}_{1/2}$	$\mathfrak{M}_{3/2}$	$\mathfrak{M}_{5/2}$	$\mathfrak{M}_{7/2}$	$\mathfrak{M}_{9/2}$	$\mathfrak{M}_{11/2}$
46,6^{mts}	130,6	196,05	242,8	270,9	28,3

b) für die grössten Vertikalkräfte:

$\mathfrak{V}_1$	$\mathfrak{V}_2$	$\mathfrak{V}_3$	$\mathfrak{V}_4$	$\mathfrak{V}_5$	$\mathfrak{V}_6$
63,4^{ts}	53,9	44,5	35,1	25,6	16,2.

Vorstehende Werthe in Verbindung mit den Gleichungen 221) — 225) und der Fig. 178, welche letztere die Querschnittdimensionen der einzelnen Fachwerksglieder enthält, geben uns in Tabelle XLIX. die grössten Spannungen, beziehungsweise Pressungen in den Gurtungen, sowie in den Streben.

Die Gurtungs-Spannungen und Pressungen sind in dieser Tabelle ziemlich niedrig, indem bei der der Ausführung zu Grunde gelegten Rechnung etwas ungünstigere Axendistanzen für die damals noch nicht genau festgestellte Güterlokomotive angenommen worden waren.

Tabelle XLIX.

$l = 19.25^m \quad \mathfrak{H} = 1{,}8^m \quad \sin\varphi = 0{,}745$

Index m =	1	2	3	4	5	6
Angriffsmoment $\mathfrak{M}'_{m-1/2}$	23,3 mts	65,3	98,02	121,40	135,45	140,15
$O_m = U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}}$	12,94 ts	36,28	54,46	67,45	75,25	77,85
Gurtungsquerschnitt $\mathfrak{Q}$ in □Cent.	90,0	90,0	112,3	129,6	153,0	153,0
$\mathfrak{A}$ od. $\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\mathfrak{Q}}$ od. $\frac{U_m}{\mathfrak{Q}}$	144	403	482	523	492	509
Vertikalkraft $\mathfrak{V}'_m$	31,7 ts	26,95	22,25	17,55	12,80	8,05
$N_m = T_m = 1/2\ \frac{\mathfrak{V}'_m}{\sin\varphi}$	22,42 ts	19,06	15,73	12,41	9,05	5,69
Strebenquerschnitt ω in □Cent.	40,3	40,3	26,7	26,7	18,0	18,0
$\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}_m = \frac{N_m}{\omega}$	556	472	589	465	503	316

Die Q u e r t r ä g e r sind zwar in der Mitte durch eine Querabsteifung gefasst (vergl. Tafel XI.), doch hat letztere keinen Einfluss auf das grösste Angriffsmoment, welches bei den gegebenen Hebelverhältnissen jedenfalls an den Lastpunkten der Querträger stattfindet und nach Fig. 95 (Fall 12 der Tabelle XXVIII.) durch die Gleichung

$$\max \mathfrak{M} = P\lambda$$

gegeben ist, wo P das in jedem der Lastpunkte eintretende Gewicht, λ den Abstand der Lastpunkte von den Auflagern bezeichnet.

Die grösste Verkehrsbelastung P_1 beträgt nach umstehender Skizze (Fig. 180) für jeden Lastpunkt:

$$(^3/_4 + {}^1/_2)\ 6000 = 7500 \text{ Kilo},$$

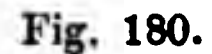
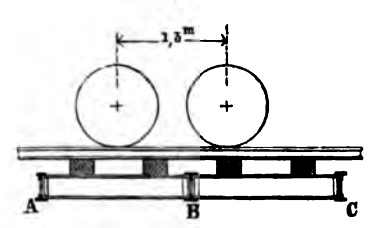


Fig. 180.



so dass P mit Berücksichtigung des Eigengewichts gleich 7800 K. gesetzt werden darf. — λ findet sich aus Tafel XI. gleich 0,5 m und erhält man hienach:

$$\max \mathfrak{M} = P\lambda = 0{,}5 \times 7800 = 3800 \text{ KM.}$$

Nach Gleichung 158) ist grösste Gurtungsspannung:

$$\mathfrak{A} = \frac{\max \mathfrak{M}}{\frac{\mathfrak{H}_0^{\,2}}{H}\left(\Omega + {}^1/_6\, \delta\, \mathfrak{H}_0\right)}$$

es ist aber:

$$\mathfrak{H}_0 = 26 \text{ Cent.} \quad \frac{\mathfrak{H}_0}{H} = \frac{26}{29} \quad \Omega = 26{,}0 \ \square\text{Cent.}, \ \delta = 1 \text{ Cent.},$$

woraus schliesslich:

$$\mathfrak{A} = \frac{3800}{0{,}91 \times 0{,}26 \times (26 + 4{,}33)} = 535 \text{ Kilo}$$

folgt.

Die grösste Belastung der Schwellenträger ist in Fig. 181 dargestellt und erhält man nach dem Hebelgesetz:

$$A = ({}^3/_4 + {}^1/_8)\ 6000 = 5250 \text{ K},$$

woraus das Angriffsmoment $\mathfrak{M}'$ an den zunächst A befindlichen Querschwellen gleich 5250 × 0,43 = 2257,3 KM. sich ergiebt. — Wenn die Spannung nicht über 500 K. betragen soll, so müssen wir in Tabelle XXIX., welche für 600 K. Spannung berechnet ist, ein Angriffsmoment von mindestens $^6/_5$. 2257 = 2708 KM. Widerstandsmoment aufsuchen, wobei uns noch die Höhe der Schwellenträger mit 26 Cent. gegeben ist. — Die grösste Annäherung wird bei dem in Fig. 104 gezeichneten Querschnitt erreicht, woselbst bei einem Trägergewicht von 50,7 K. per Meter und und einer Trägerhöhe von 25,7 C. ein Widerstandsmoment von 3088 KM. verzeichnet ist. — Der in der Ausführung gewählte Querschnitt hat ein dieser Berechnung entsprechendes Gewicht erhalten.

158. Die Eisenconstruction hat in der Ausführung folgende Gewichte ergeben:

Hauptträger	15270 K	
Hiezu Windkreuze und Absteifung der schiefen Enden	565 K	
		15835 K
Fahrbahn:		
Querträger	3162 K	
Schwellenträger:		
von I Eisen	1910 K	
Blechträger an den Enden. .	600 K	
Schrauben zur Befestigung der Fahrbahn.	253 K	
		5925 K
	Total	21760 K

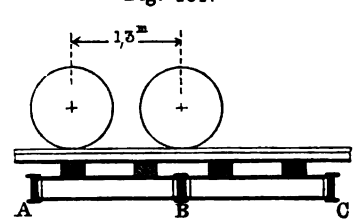
Es ist hienach das Eisengewicht per Meter bei 19,25 m Spannweite:

$$p_1 = 42,7\ l + 308 = 1130 \text{ Kilo} \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Für den Oberbau ist entsprechend der Tabelle XXXVI. per Meter 262 K. hinzuzufügen, woraus

$$p = 42,7\ l + 570 = 1392 \text{ Kilo} \quad \ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Fig. 181.



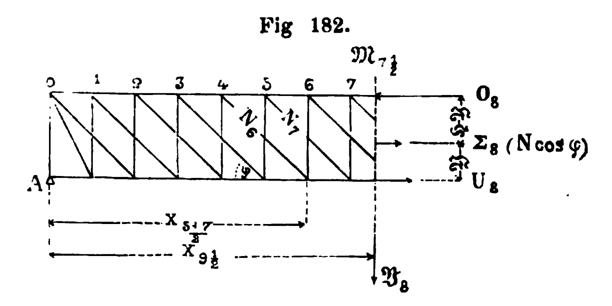
sich ergiebt, was mit der obigen Gewichtsannahme gut stimmt, obgleich die Hauptträger, wie schon oben erläutert, etwas stark construirt sind.

158. Das mehrfache unsymmetrische System mit horizontalen Gurtungen wird bei Eisenconstructionen meist in der Weise angewendet, dass die Diagonalstreben nur auf Zug in Anspruch genommen, also zunächst den Auflagern mit ihren Kopfenden gegen letztere gerichtet sind, wie in Fig. 182 dargestellt ist; die Vertikalen sind hiebei vorzugsweise auf Druck in Anspruch genommen.

Wenn wir die in N°. **135**. aufgeführten Bezeichnungen beibehalten, so erhalten wir beim nfachen System nach Anleitung von N°. **139**. und **140**.:

a) für eine schiefe Strebe, deren beiden Endpunkte mit m und m′ bezeichnet sind, nach Gleichung 196):

Fig 182.



$$N_m = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \mathfrak{B}'_{1/2\,(m+m')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 226)$$

b) für die Vertikalständer nach Gleichung 197^a):

$$V_m = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{B}'_{1/2\,(m+m')} - Pu'_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 227)$$

Nach N⁰. **151**. erleidet übrigens im Falle der von B bis zur Mitte von $(m + m')$ vorgerückten Last nicht V_m, sondern $V_{m'}$ die grösstmögliche Anstrengung; für diese Vertikale ist alsdann

$$V_m = \frac{1}{n}\, \mathfrak{B}'_{1/2\,(m+m')} + P'_{0m'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 227^a)$$

Bei constantem k sind die Werthe $V_{m'}$ grösser als die nach Gleichung 227) gefundenen Werthe V_{m-2} um die Grösse $^1/_4$ k d (vergl. N⁰. **151**).

Sind sämmtliche Strebenkräfte nach vorstehenden Gleichungen bestimmt, so erhalten wir:

c) für die Gurtungen:

$$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}} + \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}} \cdot \Sigma_m (N \cos\varphi) \quad . \quad . \quad 228)$$

$$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}} - \frac{\mathfrak{H} - \mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}}\, \Sigma_m (N \cos\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 229)$$

In den Gleichungen 226)—229) ist das in Fig. 182 dargestellte linkseitige freie Ende eines freiliegenden oder continuirlichen Trägers vorausgesetzt; in abweichendem Falle sind die betreffenden Vorzeichen zu berücksichtigen.

Die Gurtungen erleiden ihre grösste Anstrengung, wenn $\mathfrak{M}$ seinen grössten Werth erreicht; es folgt aber aus den Gleichungen 228) und 229), dass man bei Berechnung der Gurtungskräfte die gleichzeitigen Strebenkräfte kennen muss, d. h. es müssen zu diesem Zwecke die Strebenkräfte für den Fall der gleichförmig vertheilten Maximallast berechnet werden.

Für die Streben tritt max $\mathfrak{B}$ dann ein, wenn die Last von B je zur Mitte der betrachteten Strebe vorgerückt ist, in welchem Falle die Vertikalkraft durch max $\mathfrak{B}'_{1/2\,(m+m')}$ dargestellt ist; wenn z. B. eine Strebe vom Knotenpunkte (7) bis zum Knotenpunkte

(10) reicht, so ist für diese Strebe die grösste Vertikalkraft durch max $\mathfrak{B}_{1/2\,(7+10)}$ dargestellt. — Wie vorstehend entwickelt, dient dieselbe Vertikalkraft zur Bestimmung der grössten Kraft in den Vertikalen m und m′, was durch unmittelbare Einsetzung dieser Grösse in Gleichung 227) beziehungsweise 227^a) geschieht.

Die Grösse P_u ist hiebei, wenn wir das Eigengewicht $p = Cl + F$ (siehe Gleichung 213) und die Fachweite $= d$ setzen, ausgedrückt durch:

$$P_u = \left\{ k_m + \frac{Cl}{2} + F \right\} d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 230)$$

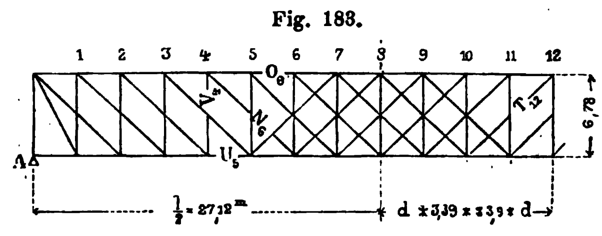
und wird P'_u durch Reduction auf einen Hauptträger hieraus erhalten; bei variabler Fachweite bezeichnet d den mittlern Werth der links und rechts stattfindenden Fachweiten.

159. Als Beispiel eines mehrfachen unsymmetrischen Systems mit horizontalen Trägern wählen wir die Eisenbahnbrücke über die Donau bei Ingolstadt, welche in der Zeitschrift des bayrischen Architecten- und Ingenieurvereins, Jahrgang 1869, veröffentlicht ist.

Diese Brücke hat 3 Oeffnungen von je 52,54^m Lichtweite, welche mit freiaufliegenden Trägern von 54,24^m Stützweite überspannt sind; Tafel XII. stellt eine dieser Oeffnungen dar; wir ersehen hieraus, dass die theoretische Trägerhöhe, d. h. die Distanz der Gurtungsschwerpunkte 6,78^m beträgt, welche Höhe die Anbringung einer zweiten obern Querverbindung gestattete, da die Fahrbahn mit Rücksicht auf das Hochwasser unterhalb angebracht ist.

Die einzelnen Fachwerksglieder sind ganz ähnlich construirt, wie bei der oben beschriebenen Münchner Isarbrücke, wesshalb wir bezüglich der Details der Gurtungen und Vertikalständer auf die Figuren 166, 167 und 169—171, soweit nicht Abweichungen aus Tafel XII. sich ergeben, verweisen. — Die beiden Brücken sind auch insofern zur Vergleichung geeignet, als dieselben nahezu dieselbe Spannweite haben nnd beide von Klett & Comp. in Nürnberg zur Anfertigung übernommen und unter Direction des Herrn H. Gerber ausgeführt wurden.

Fig. 183.



Der wesentliche Unterschied beider Brücken besteht darin, dass bei der Donaubrücke ein doppeltes System angewendet wurde (s. Fig. 183), welches die Distanz der Knotenpunkte auf die Hälfte

reduzirt; diese Reduction wirkt beim Hauptträger günstig bezüglich der rückwirkenden Festigkeit der obern Gurtung, ungünstig bezüglich des Gewichts der Vertikalständer, welche letzteren beim doppelten System ohne Beeinträchtigung der relativen Festigkeit nicht halb so stark sein können, als beim einfachen.

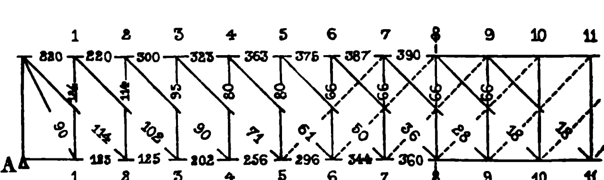
Aehnlich verhält es sich beim Gewichte der Fahrbahn; während nämlich die Schwellenträger beim doppelten System der Donaubrücke entschieden leichter sind, als die 6,275 m langen Schwellenträger der Isarbrücke, so ist anderseits dort das Gewicht der Querträger desshalb grösser, weil die Anzahl der Querträger doppelt, das Gewicht des einzelnen Querträgers aber nicht in demselben Verhältnisse geringer ist.

Eine Vergleichung des Gewichts dieser Brücken ist von um so grösserem Interesse, als beide Brücken in jeder Beziehung sorgfältigst construirt und ganz geeignet sind, der Anwendung der unsymmetrischen Systeme weitere Ausdehnung zu verschaffen. Hiebei können wir jedoch nicht umhin, auf einen wesentlichen Unterschied zwischen dem symmetrischen und unsymmetrischen System aufmerksam zu machen.

Vergleichen wir nämlich das doppelte symmetrische System, Fig. 177 und Gleichungen 221)—225), mit dem doppelten unsymmetrischen System, Fig. 128 und Gleichungen 226)—229), so finden wir, dass bei gleicher Spannweite, gleicher Trägerhöhe und übereinstimmenden Strebenwinkeln die Zahl und Länge sämmtlicher schiefen Streben, sowie die in denselben wirkenden Kräfte in beiden Fällen dieselben sind, wie auch die Formeln 223) und 226) (letztere für n = 2) dieselbe Stärke der Streben angeben; man erspart also beim symmetrischen System, entsprechende Steifigkeit der Streben gegen Druck vorausgesetzt, den grössten Theil des Gewichts der Vertikalständer, welche letztere bei diesem System blos zur Uebertragung des halben Fahrbahngewichts dienen, beziehungsweise durch eine demselben Zwecke dienende Verstärkung der schiefen Streben ersetzt sein können.

Es kommt nun lediglich auf die näheren Verhältnisse an, ob dieser entschiedene Vortheil der symmetrischen Systeme nicht etwa durch andere Umstände ganz oder theilweise aufgehoben oder ob

Fig. 184.



er nach Umständen vollständig erhalten werden kann; keinenfalls kann aber a priori dem unsymmetrischen System ein unbedingter, theoretischer Vortheil zugeschrieben werden.

160. Uebergehend zur Berechnung der Ingolstadter Donaubrücke stellen wir zunächst in Fig. 184 die Querschnittdimensionen sämmtlicher Fachwerksglieder zusammen, wie dieselben in der Mittheilung der Zeitschrift des bayrischen Architecten- und Ingenieurvereins gegeben sind.

Ebendaselbst finden wir das Eigengewicht der Brücke zu 3440 K., die variable Last zu 4840 K. per Meter und Geleise angegeben, woraus $q = p + k = 8280$ K. sich ergiebt; wir setzen $k_1 = k$ und $q_1 = q$, indem dieselbe Belastungsweise wie in N⁰. **152**. angenommen wurde. — Aus vorstehenden Gewichtsangaben folgt:

Grösstes Angriffsmoment in der Trägermitte:

$$\text{M max } \mathfrak{M} = \frac{q\,l^2}{8} = \frac{8280}{8}\;54{,}24^2 = 3040{,}5 \text{ mts.} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

Grösste Vertikalkraft am Auflager:

$$\max \mathfrak{V}_1 = \frac{q\,l}{2} = 8280\;\frac{54{,}24}{2} = 224{,}4 \text{ tons} \quad \ldots \quad \text{II.}$$

Grösste Vertikalkraft in der Trägermitte:

$$\max \mathfrak{V}_{1/2\,l} = \frac{k\,l}{8} = 4840\,.\,\frac{54{,}24}{8} = 32{,}8 \text{ tons} \quad \ldots \quad \text{III.}$$

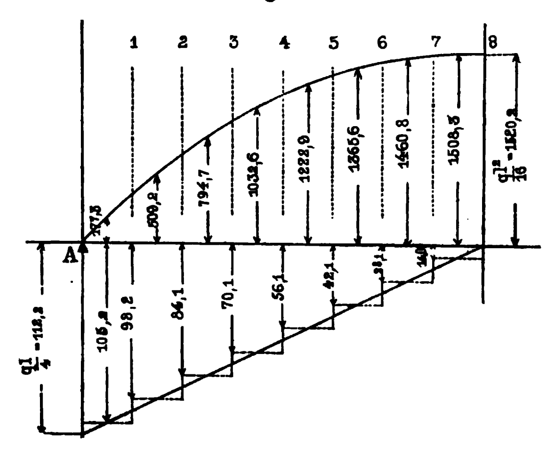
Kleinste Vertikalkraft am Auflager:

$$\min \mathfrak{V}_1 = \frac{p\,l}{2} = \frac{3440\,.\,54{,}24}{2} = 9{,}32 \text{ tons} \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

Aeusserste Lage des Punkts $\mathfrak{V} = o$:

$$\left.\begin{array}{l} a = 54{,}24\left\{\dfrac{3440}{7850} \pm \sqrt{0{,}711 + 0{,}711^2}\right\} = 21{,}31^{\text{m}} \\ l - a = 54{,}24 - 21{,}31 = 32{,}93^{\text{m}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{V.}$$

Fig. 185.



Tabelle

$q = 8280^k \qquad l = 54{,}24^m$

Index m =	1	2	3
$\max \mathfrak{V}'_{1/2(m+m')}$	$105{,}2^{ts}$	98,2	84,1
$\sin\varphi$	0,899	0,707	0,707
$N_m = \frac{1}{2}\mathfrak{V}'_{1/2(m+m')}\frac{1}{\sin\varphi}$	$58{,}5^{ts}$	69,4	59,5
$\cos\varphi$	0,448	0,707	0,707
$N_m \cos\varphi$	$26{,}3^{ts}$	49,1	42,05
$\Sigma_m (N\cos\varphi)$	26,3 49,1 75,4	49,1 42,05 91,15	42,05 35,05 77,10
$\mathfrak{Y}$	$4{,}50^m$	3,27	3,25
$\mathfrak{H} - \mathfrak{Y}$	$2{,}28^m$	3,51	3,53
$\mathfrak{M}'_{m-1/2}$	$177{,}3^{mts}$	509,2	794,7
$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}} + \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}}\Sigma_m(N\cos\varphi)$	$76{,}1^{ts}$	119,0	154,2
Ω	220	220	300
$\mathfrak{B}_m = O_m \frac{1}{\Omega}$	386^k	541	514
$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1/2}}{\mathfrak{H}} - \frac{\mathfrak{H}-\mathfrak{Y}}{\mathfrak{H}}\Sigma_m(\cos\varphi)$		$27{,}9^{ts}$	27,1
Ω		125	125
$\mathfrak{A} = U_m \frac{1}{\Omega}$		223^k	616

L.

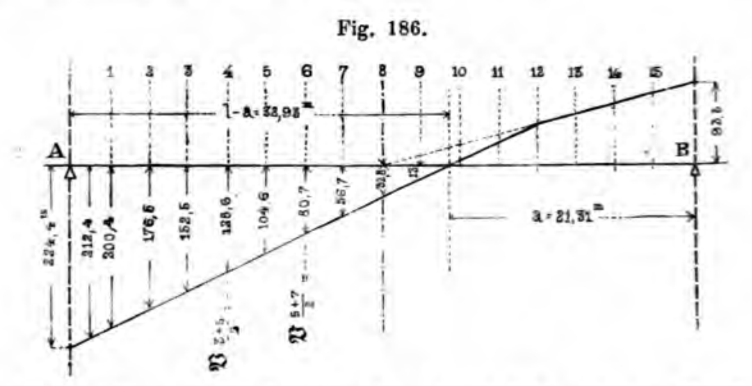
$\mathfrak{H} = 6{,}78^m$.

4	5	6	7	8
70,1	56,1	42,1	28,1	14,0
0,707	0,707	0,707	0,707	0,707
49,6	39,7	29,8	199,	9,9
0,707	0,707	0,707	0,707	0,707
35,05	28,05	21,05	14,05	7,00
35,05 28,05 63,1	28,05 21,05 49,1	21,05 14,05 35,1	14,05 7, 0 21,05	7,0
3,21	3,15	3,06	2,83	1,7
3,57	3,63	3,72	3.95	5,1
1082,6	1222,9	1365,6	1460,8	1508,8
182,2	203,1	217,2	224,2	224,2
323	363	375	387	390
564	560	579	579	574
119,0	154,0	182,1	203,2	220,7
202	256	296	364	360
589	602	612	591	613

Zur Bestimmung der grössten Gurtungskräfte hat man für jede Fachmitte 𝔐 für die gleichförmig vertheilte Maximallast zu bestimmen, was am beqeumsten nach Gleichung 174) geschieht; man bedarf aber nach den Gleichungen 228) und 229) zur Bestimmung der Gurtungskräfte auch die gleichzeitigen Strebenkräfte, welche durch die bei gleichförmiger Maximallast stattfindenden Vertikalkräfte bestimmt werden. Es sind daher in Figur 185 (s. Seite 67) für sämmtliche Fachmitten die einzelnen max 𝔐 und für sämmtliche Strebenmitten die gleichzeitigen 𝔙 eingetragen.

Das ganze weitere Rechnungsverfahren ist in Tabelle L. dargestellt, woselbst zunächst die Werthe 𝔐 und 𝔙 aus Figur 185 eingesetzt und sodann die einzelnen Gurtungskräfte nach den Gleichungen 228) und 229) bestimmt sind; indem man sodann die Gurtungsquerschnitte aus Fig. 184 entnommen, erhält man schliesslich die grössten Spannungen und Pressungen mittelst Anwendung der Gleichungen 166) und 167).

Fig. 186.



Zu Bestimmung der Strebenkräfte sind die grössten Vertikalkräfte 𝔙 nothwendig, welche unter Zugrundelegung der oben sub II. — V. aufgeführten hauptsächlichsten Werthe in beistehender Figur 186 verzeichnet sind, Bewegung der Last von B nach A vorausgesetzt. — Es ist hiebei angenommen, dass max 𝔙 vom Auflager A bis zur Mitte und von da bis zur Abscisse l — a (der äussersten Lage des Punkts 𝔙 = o) je gleichförmig abnimmt, so dass die zwischenliegenden Punkte durch eine einfache arithmetische Proportion sich ergeben. — Für jede Strebe ist nach N°. 139. das der betreffenden Strebenmitte entsprechende max $\mathfrak{V}_x$ massgebend und indem wir mit m und m′ die beiden Endpunkte der Strebe N_m bezeichnen, so ist für diese letztere die grösste Vertikalkraft durch den Ausdruck max $\mathfrak{V}_{1/2(m+m')}$ bestimmt (indem die Abscisse der Strebenmitte das arithmetische Mittel aus den Abscissen der beiden Endpunkte ist); die nähere Bestimmung der Strebenkraft geschieht nach Gleichung 226).

Dieselbe Vertikalkraft dient auch mittelst Gleichung 227) zur Bestimmung der Kräfte in den Vertikalen V_m und $V_{m'}$, wie des Näheren aus den Gleichungen 227) und 227ᵃ) ersichtlich. — Wegen Bestimmung der Kräfte P_o und P_u ist hier zu bemerken, dass das Eisengewicht der Brücke für die Hauptträger sammt Verspannungen per laufenden Meter 2224^k, für die Fahrbahntafel 685^k beträgt; für den Oberbau und Bedielung ist somit 431^k per Meter gerechnet.

Es sind nun in Tabelle LI. hienach die Kräfte in den schiefen Streben und Vertikalen zusammengestellt und die bezüglichen Querschnitte nach Massgabe von Fig. 184 beigesetzt; hieraus ergeben sich durch eine einfache Division die Spannungen $\mathfrak{A}$ und mittleren Pressungen $\mathfrak{B}_m$. — In den Vertikalen (9) und (10) herrscht bei Belastung bis (8) beziehungsweise (9) Zug, weil $P'u_m$ grösser als die Vertikalkraft $\mathfrak{B}'_m$ ist; weiterhin aber, das heisst in den Vertikalen 11 — 15 herrscht wieder Druck, indem jenseits der Abscisse 1 — a die Strebenrichtung sich ändert und negative V nunmehr Druck bedeuten.

Wir entnehmen den Tabellen L. und LI., dass die grösste Spannung $\mathfrak{A}$ in den schiefen Streben sowohl, wie in den untern Gurtungen je durchschnittlich 600 K. beträgt, während die obere gedrückte Gurtung mit 570 K., die Vertikalständer in den äussern Fachen mit 350 Kilo in Anspruch genommen sind. Es ist letzteres ganz in Uebereinstimmung mit den Bemerkungen in N⁰. **159.**, woselbst aufmerksam gemacht ist, dass die kleinere Entfernung der Knotenpunkte (gegenüber dem einfachen System) bei den obern Gurtungen vortheilhaft sei (weil das Verhältniss $\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$ nur wenig von der Einheit abweicht), während die Vertikalständer in Bezug auf relative Festigkeit ungünstiger sich verhalten und bei ihrer grösseren Anzahl um so mehr Material erfordern.

Wie schon in N⁰. **159.** angedeutet, sind die Münchner Isarbrücke und die Ingolstadtor Donaubrücke per Längeneinheit ziemlich gleich schwer geworden, und zwar ist letztere etwa in dem Maasse schwerer, als die Spannweite grösser ist.

Bei Berechnung der Brücke wurde nach der in N⁰. **154.** dargelegten Weise eine ideelle Maximalspannung von 1200 K. zu Grunde gelegt (indem bei den Hauptträgern das Eigengewicht 1,2mal, die variable Last 2,5mal gerechnet wurde); nach der Beschreibung in der Zeitschrift des bayrischen Architecten- und Ingenieurvereins soll die grösste Spannung bei einfach variabler Last 613 Kilo pro □Cent. betragen, was mit den Resultaten unserer Tabelle L. vollständig übereinstimmt.

Tabelle

$l = 54{,}24 \qquad p = C\,l + F = 41 \,.\, l + 1216 = 3440^{k}$

Index m oder m' =	1	2	3	4
$\max \mathfrak{V}_{1/2(m+m')}$ Nach Fig. 185.	212,4^{ts}	200,4	176,5	152,5
$\sin \varphi_m$	0,899	0,707	0,707	0,707
$N_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_m} \mathfrak{V}'_{1/2(m+m')}$ Nach Gleichung 226).	59,05^{ts}	70,85	62,40	53,93
ω_m in □Cent.	90	114	102	90
$\mathfrak{A} = N_m \frac{1}{\omega}$	656	622	611	599
$Pu_m = \left(k + \frac{C\,l}{2} + F\right) d$ Nach Gleichung 230).	18105^{k}	24300	24300	24300
$V_m = \frac{1}{2} \mathfrak{V}'_{1/2(m+m')} - P'u_m$ Nach Gleichung 227).	53100 — 9050 44050	50200 — 12150 38050	83125 — 12150 31975	38125 — 12150 25975
$P_{Om'} = \frac{C\,l}{2}\, d$	2827	3770	3770	3770
$V_{m'} = \frac{1}{2} \mathfrak{V}'_{1/2(m+m')} + P'_{Om'}$	44125 1413 45532	38125 1885 40010	32100 1885 33985	26150 1885 28035
$\omega_{m'}$	124	114	95	80
$\mathfrak{B}_m = V_{m'} \frac{1}{\omega}$	367	351	358	350

LI.

$k = 4840^k$ $q = p + k = 8280^k$ $d = 3{,}39^m$

5	6	7	8	9	10	Bemerkungen.
128,4	104,6	80,7	56,7	32,8	13,0	Die Werthe $V_{m'}$ sind durchweg grösser als die Werthe V_m, welche in dieser Tabelle für dieselbe Belastung, nämlich für eine von B bis $\frac{1}{2}(m+m')$ sich erstreckende Ueberlast berechnet sind.
0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	Die Werthe $V_{m'}$ sind grösser als die Werthe V_m um die Grösse $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ k d), wie in N⁰. 151. erläutert.
45,40	37,0	28,5	20,05	16,60	4.60	
71	61	50	36	28	18	
639	606	571	557	414	255	
24300	24300	24300	24300	24300	24300	
32100 − 17150 19950	26150 − 12150 14000	20175 − 12150 8025	14175 − 12150 2025	8200 − 12150 − 3940	3250 − 12150 − 8890	
3770	3770	3770	3770	3770	3770	
20175 1885 22060	14175 1885 16060	8200 1885 10085	3250 1885 5135	1400 1885 3285	6110 1885 8995	
80	66	66	66	66	66	
276	242	152	78	—	—	

§. 17. Die parabolischen Träger.

161. Wenn man sich bei Bestimmung der Gurtungsform die Bedingung stellt, dass im Falle der gleichförmig vertheilten Maximallast die Kräfte in den schiefen Streben gleich Null sein sollen, so dass die vertikalen Composanten der Gurtungskräfte die ganze Vertikalkraft aufnehmen müssen, so folgt aus den Gleichungen 182) beziehungsweise 188):

$$\frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{\mathfrak{H}_{m+1}} = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} = \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \ldots \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{H}_x} = R \quad . \quad . \quad 231)$$

wo $\mathfrak{M}_x$ das Angriffsmoment und $\mathfrak{H}_x$ die Distanz der Gurtungsschwerpunkte im Abstande x bezeichnen, während R eine constante Grösse, d. h. die auf die ganze Trägerlänge constante horizontale Composante der Gurtungskraft darstellt.

Es folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, dass parabolische Träger stets frei aufliegende Träger sind, deren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ in N⁰. **59.**—**63.** entwickelt wurden. Wenn wir für $\mathfrak{M}_x$ seinen Werth aus Gleichung 93^a, beziehungsweise 91^a einsetzen, ergiebt sich durch Wertheinsetzung in Gleichung 230):

$$R = \frac{1}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{q\,x}{2}\,(l - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 232)$$

wo q die Totalbelastung pro Längeneinheit und l die Spannweite (Stützweite) bezeichnet.

Nennen wir ferner f die Distanz der Gurtungsschwerpunkte in der Trägermitte, so folgt aus Gleichung 231) für $x = \frac{1}{2}\,l$:

$$R = \frac{q\,l^2}{8\,f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 232^a)$$

und hieraus für eine beliebige Abscisse x:

$$\mathfrak{H}_x = 4\,f\,\frac{x\,(l - x)}{l^2} \quad . \quad . \quad 233)$$

Anmerk. Da bei Fachwerken die Gurtungen zwischen den Knotenpunkten gerade sind, so ist bei ungerader Facheintheilung f nicht unmittelbar gegeben; bezeichnen wir alsdann mit f_1 die Gurtungsdistanz im Abstand $\frac{d}{2}$ von der Trägermitte, so ist:

$$\frac{q\,l^2}{4\,f} = q\,\frac{l^2 - d^2}{4\,f_1}$$

und ist letzterer Werth in den Gleichungen 232^a) und 233) einzusetzen.

Trägt man die einzelnen Werthe $\mathfrak{H}_x$ als Ordinaten der Abscissen x auf, so erhält man als Kurve der $\mathfrak{H}_x$ eine Parabel und werden daher Träger, deren aufeinanderfolgende Gurtungsdistanzen durch Gleichung 233) gegeben sind, **parabolische Träger** genannt.

Durch die Formelm 231)—233) ist die Gestalt der Gurtungen noch nicht vollständig gegeben; man kann nämlich stets eine der

beiden Gurtungen noch ganz willkührlich wählen, muss aber dann die andere Gurtung entsprechend der Gleichung 233) nehmen; ist eine der Gurtungen eine Gerade oder eine Parabel von senkrechter Axrichtung, so muss nothwendigerweise auch die andere Gurtung eine Parabel (oder nach Umständen eine Gerade) sein.

Die parabolischen Träger haben in der Regel eine, manchmal auch beide Gurtungen nach Form einer Parabel gekrümmt.

Die Kräfte in den Gurtungen sind im Falle der gleichförmigen Maximallast am grössten; für diesen Fall ist bei parabolischen Trägern, wie schon bemerkt, die horizontale Composante sämmtlicher Gurtungskräfte constant und durch die in Gleichung 232) bestimmte Grösse R gegeben; es folgt hieraus, indem mit R′ und $\mathfrak{M}'$ die auf einen Hauptträger reduzirten R und $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden:

Grösste Kraft in der obern Gurtung:

$$\max O_m = \frac{R^1}{\cos\beta_m} = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{1}{\cos\beta_m} \quad \ldots\ldots \quad 234)$$

Grösster Druck in der obern Gurtung:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{R'}{\cos\beta_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 235)$$

Ferner grösste Kraft in der untern Gurtung:

$$\max U_m = \frac{R^1}{\cos\gamma_m} = \frac{1}{\cos\gamma_m} \cdot \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \quad \ldots\ldots \quad 236)$$

Grösste Spannung in der untern Gurtung:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{R'}{\cos\gamma_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 237)$$

Die Gurtungswinkel β und γ nehmen bei gekrümmten Gurtungen gegen die Auflager hin an Werth zu und finden zunächst den letzteren die grössten Gurtungskräfte statt; ist beim parabolischen Träger eine der Gurtungen gerade, so bleibt in derselben die Gurtungskraft im Falle der gleichmässig vertheilten Belastung auf die ganze Trägerlänge constant.

162. Die vorstehend bestimmten Gurtungskräfte sind ganz unabhängig von der Wahl des Strebensystems; die Strebenkräfte, welche nur bei einseitiger Belastung in Wirkung kommen, werden beim einfach symmetrischen System nach Gleichung 182), beim einfach unsymmetrischen System nach Gleichung 188), beim mehrfachen System nach Gleichung 194) bestimmt; die Vertikalständer unsymmetrischer Systeme nach den Gleichungen 192)—194ᵃ), beziehungsweise 197) und 197ᵃ). — Für jede Art der Belastung können hienach die Strebenkräfte durch Anwendung der bezüglichen allgemeinen Formeln gefunden werden.

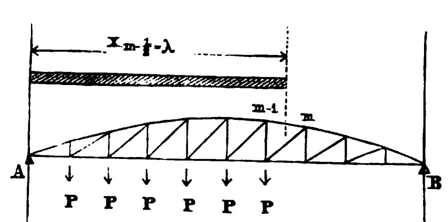
Um hiebei nicht eine sozusagen unbeschränkte Anzahl von Belastungsarten in Rechnung nehmen zu müssen, wird man in

möglichst allgemeiner Weise diejenige Stellung der Ueberlast bestimmen müssen, für welche die Strebenkraft ihren grössten Werth erreicht, und ist denn auch wiederholt bewiesen worden, dass die schiefen Streben (Diagonalen) parabolischer Träger dann am meisten in Anspruch genommen sind, wenn vom Auflager bis zu der betrachteten Strebe sämmtliche Knotenpunkte mit der Maximallast, die übrigen Knotenpunkte (beginnend mit dem jenseitigen Endpunkt der betrachteten Strebe) nur mit dem Eigengewicht behaftet sind; in diesem Falle findet in dem durch die betrachtete Strebe gegebenen Felde die grösste Vertikalkraft statt.

Ueber diejenige Belastung, welche die Vertikalständer am meisten in Anspruch nimmt, sind in N⁰. **151.** die bezüglichen Regeln gegeben.

Es ist in Fig. 187 diejenige Belastung dargestellt, durch welche die Diagonalstreben, sowie die links, beziehungsweise rechts befindlichen Vertikalständer am meisten in Anspruch genommen

Fig. 187.



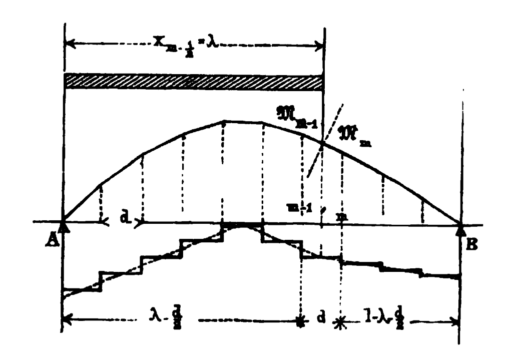
werden; eine gleichförmig vertheilte Last erfüllt diese Bedingung dann genau, wenn sie bis zur Mitte der betrachteten Strebe vorgerückt ist, während das im halbbelasteten Felde befindliche variable Gewicht im letzten der belasteten Knotenpunkte concentrirt gedacht wird. — Letztere Voraussetzung ist aber überhaupt nothwendig, wenn Fig. 130^b und Fig. 137, sowie die Gleichungen 176^a) und 178^a) ganz correct sein sollen, wie schon in N⁰. **127.** erläutert ist.

Da zur Bestimmung der Strebenkräfte gekrümmter Träger gemäss den oben citirten Gleichungen je mehrere gleichzeitige Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ nothwendig sind, so ist sehr wichtig, dass für die der grössten Strebenkraft entsprechende Stellung der variablen Last die betreffenden gleichzeitigen Werthe $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ sich schnell auffinden lassen. — Es geschieht diess, wie in N⁰. **128.** mittelst der Gleichungen 175) und 176^a) — 179^a), wobei zum bessern Verständniss und zur näheren Erläuterung der angewendeten Bezeichnungen in umstehender Fig. 188 die der fraglichen Belastung entsprechenden Kurven $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ gezeichnet sind. — Indem wir $x_{m-1/2} = \lambda$ setzen und die Fachweite d einführen, so

nehmen die Gleichungen 175) und 176ᵃ)—179ᵃ) folgende bestimmte Gestalt an:

Man erhält für Bewegung der Last von A bis zur Mitte des Faches (m — 1) m:

Fig. 188.



$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{p\,l}{2} + \lambda k \, \frac{2l - \lambda}{2l} \\ B &= \frac{p\,l}{2} + \lambda k \, \frac{\lambda}{2l} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad 238)$$

Grösste Vertikalkraft nach Gleichung 176):

$$\max \mathfrak{V}_m = A - q\,\lambda \quad \ldots\ldots \quad 239)$$

Anmerk. Wie in N°. **127.** angegeben, giebt Gleichung 239) die grösste Vertikalkraft im Fachwerk nur dann genau an, wenn man sich die im halbbelasteten Felde wirkende Last im letzten der belasteten Knotenpunkte concentrirt denkt, was eine Modification in den Auflagerdrücken zur Folge hat, indem die Gleichungen 238) in folgende Form übergehen:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{p\,l}{2} + \lambda k \frac{Ul - \lambda}{2\,l} + \frac{d^2 k}{8\,l} \\ B &= \frac{p\,l}{2} + \lambda k \, \frac{\lambda}{Ul} - \frac{d^2 k}{8\,l} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad 238^a)$$

Die gegenüber Gleichung 238) stattfindende Differenz ist für die Vertikalkräfte von verhältnissmässig kleinem Betrage, setzt sich aber auf die ganze Brückenlänge fort, so dass in der Brückenmitte $\max \mathfrak{V}_m$ nicht mehr $\frac{k\,l}{8}$, sondern $\frac{k\,l}{8} \times \left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)$ beträgt; die Momente $\mathfrak{M}$ werden durch diese Correction beim Einrücken der Belastung in die ersten Brückenfelder wesentlich beeinflusst, was bei zunehmender Länge nur in geringem Maasse der Fall ist.

Die Angriffsmomente, welche gleichzeitig mit $\max \mathfrak{V}_m$ stattfinden, werden nach den Gleichungen 176ᵃ) und 179ᵃ) bestimmt:

$$\mathfrak{M}_m = A\,(\lambda - {}^1/_2\, d) = \frac{q}{2}\,(\lambda - {}^1/_2\, d)^2 \quad \ldots\ldots \quad 240)$$

$$\mathfrak{M}_{m-1} = B\,(l - \lambda - {}^1/_2\, d) - \frac{p}{2}\,(l - \lambda - {}^1/_2\, d)^2 \quad \ldots\ldots \quad 241)$$

Ebenso können auch die gleichzeitigen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ für andere Fache bestimmt werden, indem wir beispielsweise, gleiche Fachweite vorausgesetzt, erhalten:

$$\mathfrak{V}_{m-1} = A - q\,(\lambda - d) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 242)$$

$$\mathfrak{M}_{m-2} = A\,(\lambda - {}^3\!/_2\,d) - \frac{q}{2}\,(\lambda - {}^3\!/_2\,d)^2 \quad \ldots \quad 243)$$

$$\mathfrak{M}_{m+1} = B\,(l - \lambda - {}^3\!/_2\,d) - \frac{p}{2}\,(l - \lambda - {}^3\!/_2\,d)^2 \ldots \quad 244)$$

Anmerk. Bei abweichender Weite d′ des anstossenden Faches wäre in vorstehenden Gleichungen für ${}^3\!/_2\,d$ zu setzen: $d' + {}^1\!/_2\,d$.

Diese Gleichungen 238)—244) erleiden, wenn die Last von B nach A geht, nur insoweit eine Aenderung, als für A stets B, für B stets A gesetzt werden muss.

163. Am häufigsten wird bei parabolischen Trägern das einfache unsymmetrische System angewendet, und zwar in der Weise, dass die schiefen Streben nur auf Zug, somit die vertikalen Streben (Vertikalständer) vorzugsweise auf Druck in Anspruch genommen sind; die Diagonalen sind hiebei in allen Fächern mit Ausnahme der dreieckigen Endfelder, doppelt vorhanden, wobei in Folge wechselnder Belastung die eine oder die andere dieser beiden Diagonalen in Wirkung ist.

Für dieses System sind die Gurtungskräfte in ganz allgemeiner Weise durch Gleichung 185) oder 186) bestimmt; indem hiebei die Fusspunkte der gezogenen Diagonalen stets gegen die Vertikale max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ gerichtet sein müssen, ist stets leicht zu erheben, welche der beiden genannten Gleichungen anzuwenden ist.

Bei rein parabolischen Trägern ist für den Fall der gleichförmigen Maximalbelastung $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ für alle Vertikalen constant, und werden ebendamit die beiden Gleichungen 185) und 186) identisch; hieraus folgt, wie schon oben als gemeinsame Eigenschaft sämmtlicher Parabelträger entwickelt wurde, durch Werth-einsetzung aus Gleichung 230) und 232)

$$O_m \cos\beta = U_m \cos\gamma = R' \quad \ldots \ldots \ldots \quad 245)$$

Die Kräfte in den schiefen Streben (Diagonalen), welche bei parabolischen Trägern, wie bemerkt, nur bei einseitiger Belastung auftreten, sind beim einfachen System stets durch die Gleichung ausgedrückt:

$$N_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad \ldots \ldots \quad 246)$$

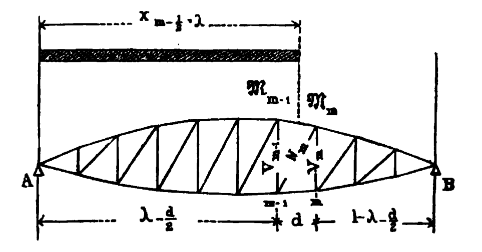
wobei jedoch noch eine nähere Bestimmung erforderlich ist, welche der beiden im Fache (m — 1)m befindlichen Streben bei der betrachteten Belastung in Wirkung ist; diese Bestimmung ist gegeben durch die Regel, wonach der Fusspunkt jeder gezogenen

Strebe gegen die Vertikale max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, somit in jedem Felde gegen den grösseren der beiden Werthe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ gerichtet ist.

Bei den parabolischen Trägern findet (wie man sich durch eine einfache Rechnung überzeugen kann) bei stetig vorschreitender gleichförmiger Belastung max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ stets im belasteten Theile statt und — was für die Bestimmung der Kräfte in den Vertikalen von Wichtigkeit ist — auch nicht im letzten der belasteten Punkte, sondern stets näher dem betrachteten Auflager.

Der Fusspunkt derjenigen Strebe N_m, bis zu welcher die Last vorgerückt ist, befindet sich daher (weil bei dem betrachteten System die Diagonalstreben stets auf Zug in Anspruch genommen sind), stets auf derjenigen Seite, von welcher die Last eingerückt ist, wie solches in Figur 189 dargestellt ist.

Fig. 189.



Zur Bestimmung der Kräfte in den Vertikalen ist vorherige Kenntniss der Strebenrichtung nothwendig und zwar für beide angrenzende Felder; nach vorstehenden Erläuterungen ist nun der Punkt max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ stets im belasteten Theil der Brücke und soweit von der Spitze der Ueberlast entfernt, dass nicht nur im Fache (m — 1) m, bis zu welchem die Last vorgerückt ist, sondern auch im vorhergehenden Fache die Fusspunkte der (gezogenen) Streben gegen die belastete Seite gerichtet sind, was in gleicher Weise für alle Felder im unbelasteten Theile der Brücke gilt; es ist daher bei den Vertikalen m und (m — 1) stets Gleichung 192) oder 193) anzuwenden, und zwar erstere stets, wenn die Last von A, letztere wenn sie von B einrückt.

Wenn wir das Feld (m — 1) m, in dessen Mitte die Last vorgerückt ist, und die beiden, dieses Feld begrenzenden Vertikalen V_{m-1} und V_m ins Auge fassen, so ist nach den Erläuterungen in N° **151.** bei oben aufliegender Fahrbahn stets die letzte der belasteten Vertikalen, bei unten aufliegender Fahrbahn stets

die erste der unbelasteten Vertikalen je mit ihrer Maximalanstrengung behaftet, und kann man daher für unsymmetrische Systeme mit gezogenen Diagonalen zur Berechnung der Kräfte in den Vertikalen folgende Regeln geben:

1) Bei oben aufliegender Fahrbahn findet statt,

a) wenn die Last von A bis m — ½ gerückt ist:

$$\max V_{m-1} = \mathfrak{V}'_m - P'_{u\,m-1} + \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} (\operatorname{tg}\beta_m + \operatorname{tg}\gamma_{m-1}) \quad 247)$$

b) wenn die Last von B bis m — ½ gerückt ist:

$$\max V_m = -\mathfrak{V}'_m - P_{u\,m} - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma_{m+1}) \quad . \quad . \quad 248)$$

2) Bei unterhalb angebrachter Last findet statt,

a) wenn die Last von Last von A bis m — ½ gerückt ist.

$$\max V_m = \mathfrak{V}'_m + P'_{o_m} + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg}\beta_{m-1} - \operatorname{tg}\gamma_m) \quad . \quad . \quad 249)$$

b) wenn die Last von B bis m — ½ gerückt ist:

$$\max V_{m-1} = -\mathfrak{V}'_m + P'_{o_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} (\operatorname{tg}\beta_{m-1} + \operatorname{tg}\gamma_m) \quad 250)$$

In den Gleichungen 247) bis 250) ist der Coordinatenursprung in A und und die Richtung der Schwere als die positive angenommen; wenn alle Vorzeichen richtig angewendet werden, bedeuten positive V Druck, negative V Zug.

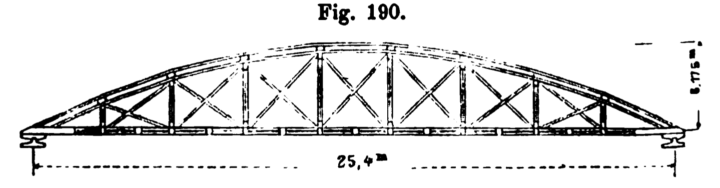
Eine Vereinfachung dieser Formeln tritt dann ein, wenn die untere Gurtung, wie dies meist der Fall, geradlinig horizontal ist, wo alsdann die Glieder mit γ wegfallen. — Man kann übrigens in diesen Fällen (wenn die untere Gurtung horizontal ist) V auch nach der Gleichung bestimmen:

$$V_m \text{ oder } V_{m-1} = N_m \sin\varphi - P'_u \quad . \quad . \quad . \quad 251)$$

wo stets die am Fusspunkt der Strebe N_n befindliche Vertikale gemeint ist, deren unterer Knotenpunkt mit P'_u belastet ist.

164. Eine der ersten Anwendungen parabolischer Träger in Deutschland zeigt die Brahebrücke bei Czerk, an der Thorn-

Fig. 190.



Bromberger Bahn, deren Eisenconstruction von Herrn J. W. Schwedler projectirt und in der „Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, Jahrgang 1861“, veröffentlicht wurde.

Die Brücke ist für ein einziges Geleise construirt und hat 81′ preussisch oder 25,4 m Spannweite (Stützweite), welche in 9 Fache von je 2,82^m Weite abgetheilt ist. Das Eigengewicht beträgt per laufenden Fuss 1000 alte Pfund oder 1490 Kilo per Meter und zwar ist annähernd $p = 750 + 26{,}3\ l$, wo $F = 750$ k. das Gewicht der Fahrbahn per Meter bedeutet; die grösste variable Last k wurde zu 3000 Pfund per laufenden Fuss oder 4470 Kilo per Meter gerechnet, welche Last auch für die einseitige Belastung beibehalten wurde. Die grösste Spannung wurde zu 10000 alte Pfund per □″ oder 684 Kilo per Quadratcentimeter angenommen.

Die Berechnung der Gurtungsstärke geschah entsprechend unsern Formeln 234, beziehungsweise 236, indem in letzterer Gleichung durchaus $\cos \gamma = 1$ zu setzen ist; es wurde auch in der obern Gurtung ein gleichmässiger Querschnitt beibehalten, indem in der Trägermitte die Gurtungskraft nur circa 10 % geringer ist; es wurden in der obern Gurtung 118 Quadratcentimeter, in der untern Gurtung 108 Quadratcentimeter nutzbarer Querschnitt angenommen (wobei die Nietlöcher in Abzug gebracht sind).

Für Berechnung der Diagonalen hat Herr Schwedler eine sehr einfache Formel entwickelt, welche unter Beibehaltung der von uns gewählten Bezeichnungen sich ausspricht:

$$\max N_m = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{kdl}{8f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 252)$$

welche Gleichung auch richtig sein muss, wenn ein mit der Länge der Ueberlast wechselndes k genommen wird; da im vorliegenden Falle $f = \frac{1}{8}\, l$ war, so vereinfachte obige Gleichung sich weiterhin:

$$\max N_m = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot kd \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 252^a)$$

Nach den Gleichungen 252) beziehungsweise 252^a) nimmt unter der Voraussetzung eines constanten k die Kraft in den Diagonalen von dem Ende gegen die Mitte, wo $\frac{1}{\cos \varphi}$ seinen grössten Werth hat, stetig zu, und zwar beim vorliegenden Beispiel im Verhältnisse von 1,09 bis zu 1,5.— Wenn man jedoch mit Rücksicht auf einseitige Belastung k_m ähnlich der in Figur 134 gegebenen Darstellung wechselnd annimmt, so sind von A ausgehend die mit ihrem Fusspunkte gegen A gerichteten Streben zwischen A und der Brückenmitte ziemlich gleich angegriffen, am Beginn der Bewegung sogar noch grösser als in der Mitte; in der zweiten Brückenhälfte nimmt die Anstrengung der Diagonalen stetig bis zum Auflager B ab.

In der Ausführung wurden alle Diagonalen gleich stark gehalten, was den Eigenschaften des Parabelträgers nach Vorstehendem ziemlich entsprechend ist.

Bei der Berechnung der Vertikalen ist die obige Gleichung 251) angewendet worden. Es ist hiebei für P_u kein Abzug gemacht worden, was insoweit begründet ist, als die Querträger nicht in den Knotenpunkten selbst, sondern etwas oberhalb befestigt sind; es ist hier wie in allen Fällen, wo die Last zwischen den Knotenpunkten eintritt, die Kraft in den Vertikalen eine verschiedene, d. h. es sind die Vertikalen unterhalb der Fahrbahnbefestigung mehr in Anspruch genommen als oberhalb. Da hier das stärker gepresste Stück sehr kurz ist, so darf für dasselbe $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$ angenommen werden, während für das längere Stück $\mathfrak{B}_m = \left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right) \mathfrak{B}$ zu setzen wäre; es soll aber noch bemerkt werden, dass nach N°. **151.** die Kraft im obern Theile der Vertikalen dann am grössten ist, wenn die Last bis zur Mitte des unmittelbar vorhergehenden Feldes vorgerückt ist, so dass also die erste der unbelasteten Vertikalen jeweils ihre Maximalanstrengung zu erleiden hat. (Gl. 249) und 250) zu vergleichen.)

165. Ueber die Befestigung der schiefen Streben sagt Herr Schwedler:

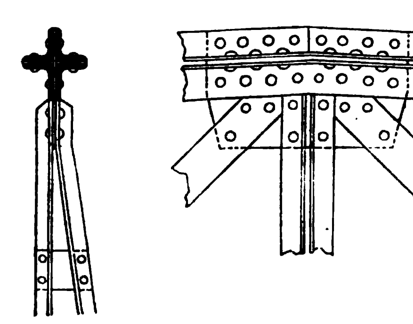
„Die Spannung der Diagonalen ändert sich bei der Passage eines Zuges bis auf Null, so dass immer abwechselnd die eine oder andere Diagonale ohne Spannung ist. Die dieser Spannungsänderung entsprechende elastische Längenänderung der Diagonalen beträgt, mit Rücksicht auf ihren wirklichen Querschnitt $\frac{1}{6000}$ der Länge oder $\frac{1}{3}$ Linie ($0{,}7^{mm}$); die dem entsprechende Verschiebung des Vierecks bewirkt eine relative Hebung oder Senkung der Hauptverbindungsbolzen des Systems von circa 1 Linie (2^{mm}), wobei vorausgesetzt ist, dass die Diagonalen bei leerer oder ganz belasteter Brücke wenigstens die Spannung Null haben. Eine vorherige Einspannung der Diagonalen kann jene Bewegung nicht mindern, sondern nur die Maximalspannung erhöhen. Sind indessen die Diagonalen nicht so straff eingesetzt, dass sie bei der geringsten Formänderung des Systems in Spannung gerathen, so wird jene relative Bewegung um so viel vermehrt als nöthig ist, um die Spannung anfangen zu lassen. Da die grössere Maximalspannung weniger schädlich ist, als die grössere Beweglichkeit des Systems, so ist vorgezogen, die Nietlöcher bei einer Anspannung der Stäbe von 5—10 Centner nachzubohren und mit Nieten zu versehen."

Zu dieser Darstellung ist hinzuzufügen, dass die Verbindung der Gurtungen mit den Diagonalen und Streben je mittelst eines 2 Zoll (52^{mm}) starken Bolzen geschah, so dass ein genauer geometrischer Zusammenhang besonders wichtig war. Uebrigens ist die Maximalanstrengung der Diagonalen im Falle vollständiger Entlastung der

Gegenstreben lediglich durch den Werth $\left(\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\right) \frac{1}{\cos\varphi}$ gegeben; eine grössere Maximalanstrengung der Hauptdiagonalen könnte nur dann stattfinden, wenn auch in der Gegenstrebe noch eine Kraft wirkte, d. h. wenn die ursprüngliche Anspannung des Systems so gross war, dass sämmtliche Diagonalen stets gespannt bleiben. (Zu vergl. N⁰ **137**.)

166. Herr J. W. Schwedler hat in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 1868, den Entwurf einer Parabelbrücke publizirt, welche für die kleinen Oeffnungen der Elbbrücke bei Meissen bestimmt war, aber an einem andern Orte zur Ausführung kam; die Spannweite beträgt 69′ preussisch oder 21,6^m, welche Weite in 6 Fache von 9′ (2,82^m) und 2 Endfelder von 7,5′ (2,35^m) abgetheilt ist.

Fig. 192.



Die Gurtungen, deren Querschnitt in beistehender Figur 192 skizzirt ist, bestehen je aus 4 Winkeleisen von je 4 Zoll (104^{mm}) Schenkellänge und $^1/_2$ Zoll (13^{mm}) Stärke und sind nach einem Polygon gebogen; ihre Verbindung mit den Vertikalen u. Diagonalstreben ist gleichfalls aus Figur 192 ersichtlich. Die Stossplatten in den Knotenpunkten, sowohl horizontale als vertikale, sind $^1/_2$ Zoll oder 13^{mm} stark, an denKnotenpunkten sind je zwei einander diagonal gegenüberstehende Winkeleisen gestossen, während die beiden andern durchgehen; hiedurch ist ermöglicht, dass der volle Querschnitt der Winkeleisen durch möglichst gleichmässig in Anspruch genommene Futterbleche (welche theilweise auch zur Befestigung der Diagonalen dienen) ersetzt werden konnte.

Das Eisengewicht dieser Brücke ist auf circa 390 Centner oder 19500 Kilo veranschlagt, wovon circa 140 Centner oder 7000 Kilo auf die Fahrbahn kommen; bei einer Spannweite von 21,6^m beträgt daher das per laufenden Meter ausgedrückte Eisengewicht

$$p' = 325 + 27\, l = 900 \text{ Kilo.}$$

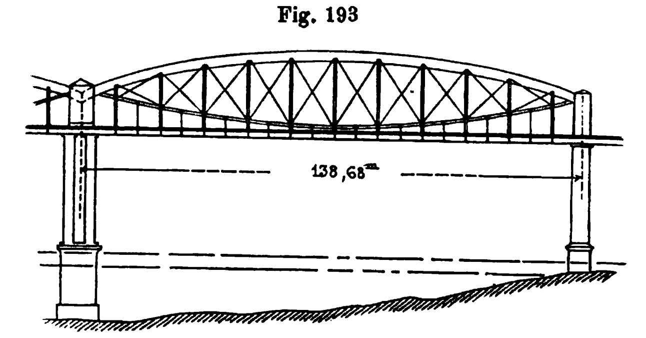
Hiebei soll die gröste Spannung jedenfalls unter 10000 Pfund per Quadratzoll sein, was circa 700 Kilo per Quadratcentimeter ergiebt. Die variable Last wurde zu 3400 Pfund per Fuss oder 5440 Kilo per Meter gerechnet.

Bei vorstehenden Angaben über Eigengewicht und Belastung ist vorausgesetzt, dass die Gewichtsangaben in der „Zeitschrift für

Bauwesen“ sich auf Zollpfund beziehen; sollten alte Pfunde gemeint sein, so müssten sämmtliche nach Kilogrammen angegebenen Gewichtsangaben im Verhältniss von 0,92 kleiner gesetzt werden.

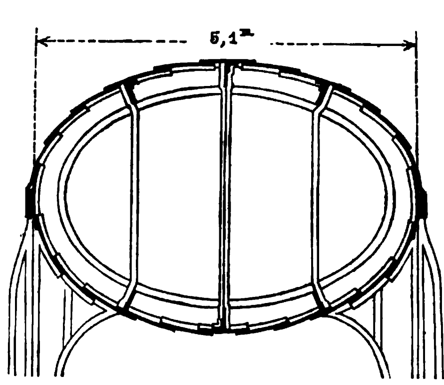
167. Die Royal-Albertbrücke bei **Saltash** hat zwei grosse Oeffnungen, welche mit Parabelträgern von 455′ englisch oder 138,68^{m} Spannweite überbrückt sind; diese Brücke ist durch Isambard Kingdom Brunel (den Sohn des Erbauers des Themsekanals) in den Jahren 1856 — 1858 projectirt und angefertigt worden; einer der Hauptträger ist in beistehender Figur 193

Fig. 193



in seiner Längenansicht dargestellt. Die obere gedrückte Gurtung besteht aus einer Röhre von Eisenblech, deren Breite

Fig. 194.



5,1^{m} und deren Höhe 3,66^{m} beträgt. Die Röhre, deren Querschnitt in Fig. 194 dargestellt ist, besteht aus 24 über einander geplatteten Flacheisen, welche durch 6 Längsrippen von 356^{mm} Höhe und 13^{mm} Dicke verstärkt sind; letztere dienen insbesondere zur Aussteifung der Röhre und sind hierin durch besondere Aussteif-

fungsringe von etwa 50 Cent. Höhe unterstützt, welche letztere in Längenabständen von je 6,1^m angebracht sind. Die Röhre geht an den Enden behufs besseren Aufliegens in viereckige Form über.

Die untern Bänder bestehen für jedes Geleise aus 4 Ketten, deren je zwei über einander angebracht und durch Vertikalanker verbunden sind (vergl. Fig. 193). Diese Ketten haben je 14 Glieder von 17,8^{mm} Breite und 25,4^{mm} Dicke, abwechselnd mit je 15 Gliedern von derselben Breite und 24,8^{mm} Dicke; jedes Kettenglied ist 6,096^m lang, welche Länge zugleich den Abstand der Aufhängepunkte der Kette angiebt. Die Vertikalständer des Fachwerks sind in der doppelten Distanz von 12,192^m angebracht, und bestehen je aus zwei Flacheisen und 10 Winkeleisen von zusammen 173 □Centimeter Querschnitt; es sind diese Vertikalständer zu beiden Seiten des Geleises und somit auf jeder Seite der obern Röhre angebracht.

Die Diagonalstreben sind auf jeder Seite des Geleises und zwar je als Kreuzstreben vorhanden; je zwei dieser Diagonalen haben somit die ganze auf ein Fachwerksfeld treffende Strebenkraft aufzunehmen; ihr Querschnitt wechselt, indem er bei einer Breite von 178^{mm} von den Auflagern gegen die Mitte von 45 bis zu 55 Quadratcentimeter zunimmt. Die Zunahme der Strebenkraft gegen die Mitte entspricht der für die Brahebrücke entwickelten Gleichung 252), für den Fall, dass die variable Belastung k für jede Länge der Ueberlast constant angenommen wird.

Die Fahrbahn zeigt Blechträger von 2,54^m Höhe, welche theils an den Vertikalständern befestigt, theils an den zwischenliegenden Kettenträgern aufgehängt sind; die Weite, welche diese Blechträger zu überspannen haben, beträgt somit 12,2^m. Zwischen diesen Fahrbahnträgern liegen Querträger von 356^{mm} Höhe, welche eine Bedielung und über derselben eine Beschotterung zur Aufnahme des Bahnoberbaues betragen.

Das Eisengewicht der Brücke beträgt nach annähernd übereinstimmenden Angaben 912 tons, wovon 156 tons auf die Fahrbahn, 756 tons auf die Hauptträger kommen; hienach beträgt das Eisengewicht per laufenden Meter

$$p' = 39{,}3\, l + 1125 = 6575 \text{ Kilo.}$$

Bei einer Belastung von 1 ton per laufenden Fuss englisch oder 3333 Kilo per Meter soll der Druck in der Röhre 660 Kilo per Quadratcentimeter betragen.

§. 18. Gekrümmte, nicht parabolische Träger.

168. Die Formeln für Träger, welche weder geradlinig horizontal, noch parabolisch sind, haben wir in den N°. **131.**—**143.** in der allgemeinsten Weise entwickelt und sind, je nachdem ein einfaches oder mehrfaches, ein symmetrisches oder unsymmetrisches System gewählt ist, die betreffenden Gleichungeen aus vorgenannten Nummern zu entnehmen.

Die speciellen Gesetze, welche für geradlinige und parabolische Träger aufgestellt wurden, können jedoch auch für die übrigen, zwischen beiden stehenden Trägerformen angewendet werden, insoweit diese Gesetze den geraden und den parabolischen Trägern gemeinsam sind.

Als ein solches gemeinsames Gesetz haben wir gefunden, dass bei frei aufliegenden Trägern die Streben in jedem Fache dann am meisten in Anspruch genommen sind, wenn die Last bis zur Mitte des betreffenden Feldes vorgerückt ist, in welchem Falle die Vertikalkraft ihren grössten positiven oder kleinsten negativen Werth erreicht (die Richtung der Schwere als die positive angenommen). — Wir verweisen hiebei auf die N°. **144.** für gerade Träger und auf die N°. **162.** für Parabelträger.

Zur Bestimmung der Strebenkräfte beliebig (auch nicht parabolisch) gekrümmter Träger dienen daher diejenigen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$, welche in N°. **162.** für parabolische Träger entwickelt und durch die Gleichungen 238)—244) ausgedrückt sind.

Man kann nach diesen Gleichungen (insbesondere Gleichung 242) — 244) für jede (zu irgend einer Fachmitte fortgesetzte) Belastung sämmtliche gleichzeitige Strebenkräfte bestimmen, was bei mehrfachen unsymmetrischen Systemen von Werth sein kann; in der Regel werden aber nur die Gleichungen 238) — 241) nothwendig, indem es sich meist nur um die zum betrachteten Fache vorgerückte Belastung handelt.

Bezüglich der grössten Anstrengung der vertikalen Streben (Vertikalständer) unsymmetrischer Systeme sind in N°. **151.** Regeln gegeben, welche nach den dortigen Erläuterungen für gerade und beliebig gekrümmte Träger ebenfalls gleichmässig gültig sind.

In solchen Fällen, wo die Gurtungen nicht stark gekrümmt sind, kann man sich häufig zu Bestimmung der Strebenkräfte der einfacheren Gleichungen N°. 184), 191) oder 195) bedienen, in welchem Falle sämmtliche $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ aus Fig. 130[b] entnommen werden können.

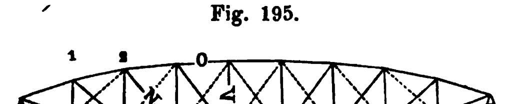
Insbesondere aber auch bei schwach gekrümmten continuirlichen Trägern wird man die Strebenkräfte nach den genannten Gleichungen 184), 191) oder 195) berechnen und hat man in diesen Fällen nur darauf zu achten, dass man stets diejenige Belastungsweise in

Rechnung nimmt, welche die grösste Vertikalkraft ergiebt (zu vergleichen die graphischen Darstellungen auf den Tafeln IV. und V.), sodann aber auch den mit max $\mathfrak{V}$ gleichzeitigen Werth $\mathfrak{M}$ in die betreffende Gleichung einsetzt.

169. Den Parabelträgern sehr nahe steht das System Pauli. Die Gestalt der nach diesem System gebauten Träger ist gegeben durch die Bedingung, dass bei gleichförmig vertheilter Maximalbelastung beide Gurtungen und zwar je auf ihre ganze Länge gleichen Druck, beziehungsweise Zug auszuhalten haben.

Das Pauli'sche System wird als einfaches unsymmetrisches System mit gezogenen, aus Flacheisen bestehenden Diagonalen construirt, und indem wir die in N°. **134**. zusammengestellten Bezeichnungen beibehalten, erhalten wir unter vorläufiger Annahme der in Fig. 195 dargestellten Anstrengung der Diagonalen für die

Fig. 195.



zunächst A befindliche Trägerhälfte nach der obigen Definition des Pauli'schen Trägers:

$$O_m = \frac{1}{\cos\beta_m}\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} = O_{m-1} = \frac{1}{\cos\beta_{m-1}}\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} = \text{Constans} \quad 253)$$

$$U_m = \frac{1}{\cos\gamma_m}\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} = U_{m+1} = \frac{1}{\cos\gamma_{m+1}}\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} = \text{Constans} \quad 254)$$

Wenn alle O einander gleich sein sollen, so müssen auch alle U denselben Werth haben, was nur dann möglich ist, wenn z. B. $\cos\beta = \cos\gamma_{m+1}$, $\cos\beta_{m-1} = \cos\gamma_m$ wäre; man sucht nun dieser Bestimmung dadurch zu genügen, dass man für O_m und U_m einen mittleren Werth einführt:

$$\left.\begin{aligned} O_m &= \frac{1}{\cos\beta_m}\frac{\mathfrak{M}_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} = \text{Constans} \\ U_m &= \frac{1}{\cos\gamma_m}\frac{\mathfrak{M}_{m-1/2}}{\mathfrak{H}_{m-1/2}} = \text{Constans} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 255)$$

Diese Gleichung wäre ganz dieselbe geworden, wenn man in Fig. 195 die punktirten Streben als wirkend gedacht und entsprechend die Indices der O und U geändert hätte. — Aus Gleichung 255) folgt unmittelbar die Gleichheit der Winkel β_m und γ_m, dem gemäss der Pauli'sche Träger stets symmetrisch gekrümmte Gurtungen erhält.

Die Construction der Gurtungslinie geschieht in der Weise, dass die Constante der Gleichung 255) für die Trägermitte be-

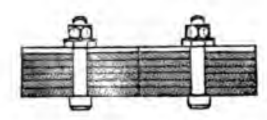
stimmt und nunmehr mit der Berechnung der Winkel vom Auflager an begonnen wird. — In der Regel erhalten die Pauli'schen Träger eine Höhe von $^1/_7$ der Spannweite.

Wir berechnen diese Träger genau nach denselben Regeln, welche in N°. **163**. für Parabelträger gewöhnlicher Construction angeschrieben sind, indem die verhältnissmässig kleine Abweichung in der Form der Gurtungen auf die dort aufgeführten Sätze keinen modifizirenden Einfluss übt. — Die einzelnen 𝔐 und 𝔙 werden (wie schon in N°. **168**. für derartige Fälle bemerkt ist nach den in N°. **162**. gegebenen Regeln bestimmt und werden wir eine Anwendung des durch besagte Nummern **162**. und **163**. gegebenen Verfahrens bei der im Folgenden näher beschriebenen Kitzinger Mainbrücke geben.

Die Construction der Pauli'schen Träger bleibt dieselbe, ob die Fahrbahn oberhalb, unterhalb oder zwischen beiden Gurtungen angebracht ist; die Höhenlage der Fahrbahn zeigt ihren Einfluss nur an den Vertikalständern, welche je nach den Umständen verlängert werden und in ihren Dimensionen von der Belastung der obern (beziehungsweise untern) Knotenpunkte abhängig sind, wie diess sich unmittelbar aus Gleichung 246) ergiebt.

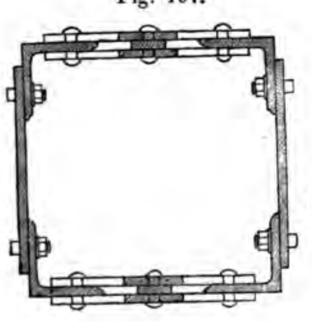
171. Ueber die bei den Pauli'schen Trägern angewendete Constructionsweise sagt Herr Gerber in einer von Klett & C° in Nürnberg im Jahre 1859 veröffentlichten Broschüre:

Fig. 196.



„Der Spannbogen (Fig. 196) besteht aus auf einander liegenden Flacheisen, die durch conische Bolzen mit einander verbunden sind und deren abwechselnde Stösse je nach der Grösse des Querschnitts entweder durch ein durchlaufendes Flacheisen oder durch eigene Stossplatten gebunden sind. — Für grosse Querschnitte legt man zwei solche Flacheisenbänder neben einander, um auf Zug nur Eisen zu verwenden, das nur im Ganzen erhitzt worden war, gut geschweisst und gewalzt ist, und um die Bolzen nicht zu lang machen zu müssen.

Fig. 197.

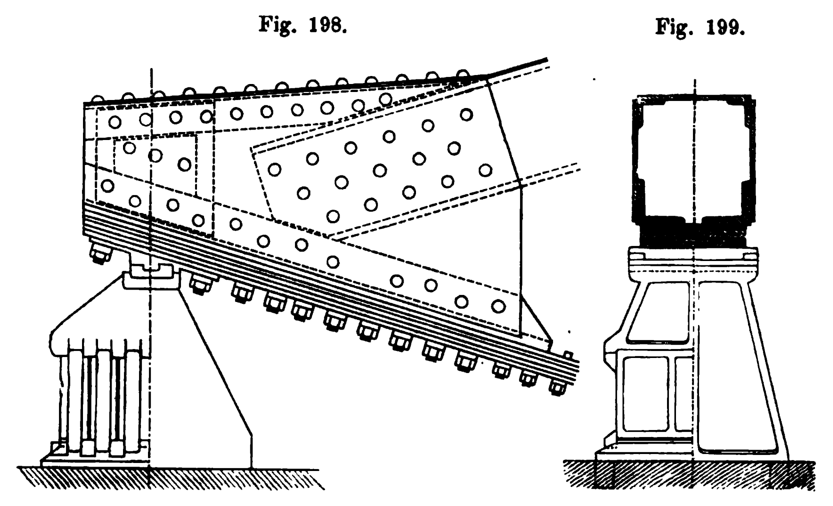


„Der Druckbogen (Figur 197) ist bei allen grösseren Objecten in kastenförmigem Querschnitt angeordnet, dessen Dimensionen unter Berücksichtigung der Weite der Felder bestimmt und bei dem die Massen möglichst in die Ecke gelegt werden.

Anmerk. Neuerdings werden offene, leichter auszuführende Querschnitte angewendet, z. B. Doppel-Tform, wie bei der Mainzer Rheinbrücke.

„Die Verbindung der beiden Bögen an den Enden geschieht durch den sogenannten Bogenschuh (Fig. 198 und 199), welcher entweder aus Gusseisen oder gewöhnlicher aus Schmiedeisen construirt ist, und sowohl genügende Fläche für die vollständige Befestigung der Gurtungen als auch genug Stärke besitzt, um der Tendenz zum Abscheeren über dem Stützpunkt zu widerstehen.

Fig. 198. Fig. 199.

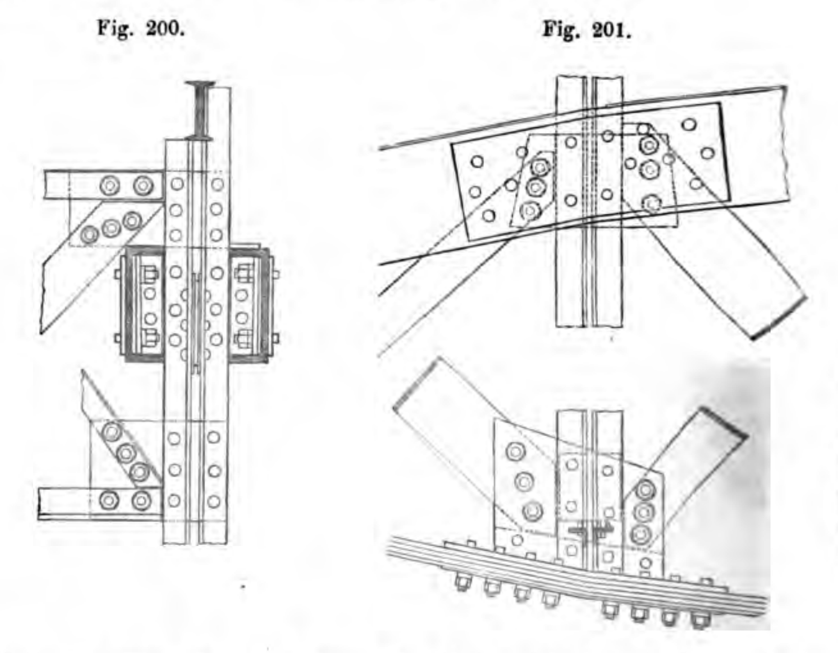


„Die vertikalen Pfosten sind aus Winkeleisen in Kreuz- oder doppelt Tform gebildet und oben der in ihnen wirkenden Spannung gemäss mit Bolzen an den Druckbogen befestigt, unten auf dem Spannbogen L aufstehend, dass keine Seitenbewegung möglich ist. (Fig. 200 und 201.) — In diese Pfosten sind die Träger der Fahrbahntafel angebracht und müssen sie daher je nach der Lage der Fahrbahn über den Druckbogen hinaus oder unter den Spannbogen hinabgehen, wodurch ihr verschiedener Querschnitt bedingt ist (zu vergleichen Schluss von N⁰. **169**).

„Die Diagonalen bestehen aus Flacheisen, die an ihren Enden an Bleche verbolzt sind, welche in entsprechender Verbindung mit den Gurtungen und Pfosten stehen (Fig. 200).

„Die ganze Trägerconstruction liegt an jedem Ende mittelst einer ebenen auf einer cylindrischen Stahlfläche von grossem Radius (Fig. 198), welche Anordnung zum Zweck hat, die elastische Biegung des Trägers möglich zu machen, ohne einseitigen starken Druck auf die Stützflächen hervorzurufen. Eine Längen- oder Querverschiebung dieser beiden Flächen ist durch die auf beiden Seiten befindlichen Vorsprünge, die wie Zähne in einander greifen, verhindert. — Die untern Stützplatten sind auf gusseiserne Stühle

Fig. 200. Fig. 201.



befestigt (Fig. 198), von denen der eine unmittelbar auf dem Auflagersteine feststeht, während der andere, wegen der Längenveränderung der Brücke durch Temperaturwechsel, auf Stelzen steht, deren auf beiden Seiten angegossene Zähne zwischen entsprechende Zähne am Rollstuhl und an der Bodenplatte eingreifen, um den Parallismus zu erhalten. — Die Cylinderflächen der Stelzen sind gedreht und wälzen sich auf abgehobelten ebenen Flächen. — Es wird die Höhe der Stelzen so gewählt, dass die Maximalneigung derselben bei den Extremen der Temperatur eine bestimmte, nahezu gleiche Grösse für die verschiedenen Lichtweiten wird."

Anmerk. Die Stahlplatte zwischen Lagerstuhl und Bogenschuh wird neuerdings mit der an letzterem befestigten zweiten Stahlplatte mittelst eines Metalldorns verbunden, so dass die zahnartigen Vorsprünge wegfallen. — Die Stelzen werden durch schmiedeiserne Rollen ersetzt. — Diese neueren Anordnungen sind auch auf den Tafeln X. und XII. ersichtlich.

Herr Gerber sagt weiterhin:

„Alle Hauptverbindungen geschehen durch konische Bolzen, welche auf dem Konus $\frac{1}{100}$ gedreht, mit wenig stärkerem Kopfe, mit Mutter und Unterlagscheibe versehen sind; die cylindrisch gebohrten Löcher werden mit konischen Reibahlen ausgerieben, bis der Bolzen auf eine gewisse, durch Erfahrung bestimmte Weite hineinpasst, dann dieser durch einige Hammerschläge eingetrieben und zugleich die Mutter scharf angezogen, um das Eisen fest zu-

sammenzupressen. — Dadurch wird das Eisen um das Loch herum etwas comprimirt und der Bolzen füllt es vollkommen aus. — Die Unterlagscheiben sind verhältnissmässig stark, damit kein Schraubengewinde im Eisen sich befindet, sondern letzteres ganz mit dem gedrehten Bolzenschaft ausgefüllt ist. — Nachdem die Muttern so fest als möglich angezogen sind, werden sie verstemmt, damit sie durch die Erschütterungen nicht möglicherweise losgehen können, wozu übrigens das Bestreben kaum vorhanden ist, da in Folge der beschriebenen Anordnung der Bolzen kein Stoss auf die Mutter geschehen kann. Diese konischen Bolzen wurden zum ersten Male bei der Isarbrücke zu Heselohe zur Anwendung gebracht.

Anmerk. In der Eisenbauanstalt bei Mainz wird gegenwärtig vorzugsweise warme Nietung angewendet; vorbeschriebene konische Bolzen in der Regel nur da, wo die warme Nietung nicht befriedigend ausgeführt werden kann.

„Von den verschiedenen zur Anwendung kommenden Eisen werden die Elasticitätsverhältnisse für Zug mittelst einer besonders hiezu construirten Maschine ermittelt und auf derselben sämmtliche Flacheisen, die auf Zug in Anspruch genommen werden, mit 1200 Kilo per □Cent. gereckt unter Prellung durch Hammerschläge. — Es werden dadurch schlecht geschweisste Stellen sichtbar und die Eisen innerhalb dieser Belastung elastischer, d. h. ihre permanente Verlängerung durch spätere Belastung Null.

„Zum Schutze des Eisens gegen die Einflüsse der Athmosphärilien wird dasselbe durch Beizen und Scheuern von dem daran haftenden Hammerschlag und Rost gereinigt und dann in siedendes Oel gebracht, so dass durch die grosse Sitzhitze des Oels jede Spur von Feuchtigkeit entfernt und eine fest haftende Firnissschichte auf dem Eisen gebildet wird. Durch diese Operation wird der Uebelstand vermieden, der beim gewöhnlichen Verfahren entsteht, dass der unter dem Anstreich befindliche Rost schnell weiter greift, diesen hebt und daher fortwährende Reparaturen nöthig macht.

„Alle Diagonalen werden beim Montiren durch eigenthümliche Vorrichtungen um $\frac{1}{6000}$ ihrer Länge gespannt, damit möglicherweise noch vorhandene kleine Biegungen verschwinden und die Diagonalen bei dem Anfange der Biegung des Trägers sofort in Wirksamkeit treten.

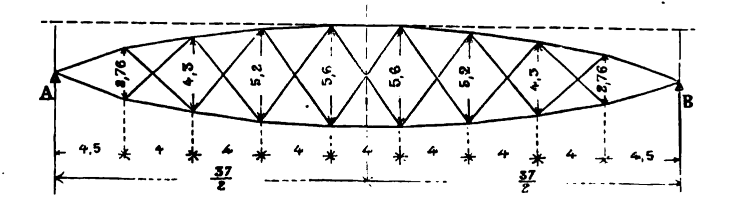
„Die Aufstellung der Pauli'schen Träger hat auf einem Gerüste zu geschehen, und wird man gewöhnlich dieses in die zu überbrückende Oeffnung setzen und die Träger am Platze montiren. Wo die Herstellung eines derartigen Gerüstes unthunlich ist, kann man die Träger an geeigneten Orten fertig zusammensetzen, zwischen die Pfeiler flössen und dann aufziehen, nach Art der grossen Brücken in England."

172. Im Iahre 1864 wurden auf der von Nürnberg nach Würzburg führenden Eisenbahn mehrere Brücken nach Pauli's System ausgeführt, wobei die Stützweite der Träger je 37 Meter betrug; die bedeutendste ist die Mainbrücke bei Kitzingen, welche 5 solcher Oeffnungen erhielt.

In Tafel XIII. ist ein Träger dieser Brücke dargestellt; die Zeichnungen hiezu sind, wie die nachfolgenden Notizen, einem autographirten Hefte entnommen, welches Herr Ingenieur Gerber uns gefälligst mitgetheilt hat.

Wir ersehen aus Tafel XIII., dass die Fahrbahn oberhalb angebracht ist; Querträger von einfacher Fachwerksconstruction sind je an den Knotenpunkten des Systems in Entfernungen von 4,0^{m} an den Vertikalständern angebracht; die Querträger nehmen Schwellenträger von Blechbalken auf, welche letztere zur unmittelbaren Aufnahme des Bahnoberbaues dienen.

Fig. 203.



Die Hauptabmessungen der Hauptträger sind aus beistehender Fig. 203 ersichtlich. — Die obern Gurtungen bestehen aus zwei ⊔ Eisen von je 62,25 □Cent. Querschnitt (siehe die Fig. 200 und 201), sowie aus einem Flacheisen (Kopfblech) von 340^{mm} Breite und 8^{mm} Dicke; diese Gurtungen haben somit einen Querschnitt von 151,7 □Cent., wobei keine Nietlöcher abgezogen sind. — An den Knotenpunkten sind sämmtliche Gurtungsglieder gestossen, insbesondere sind die Kopfbleche daselbst unterbrochen (wodurch der Durchgang der Vertikalständer ermöglicht wird) und wird die Verbindung sämmtlicher Glieder durch ein System von Stossplatten hergestellt.

Die untern Gurtungen bestehen je aus einer 4fachen Lage von Flacheisen von 280^{mm} Breite und 13^{mm} Dicke, welche nach Abzug von einem Nietloch von 20^{mm} Breite und 52^{mm} Höhe einen Gesammtquerschnitt von 125,2 □Cent. repräsentiren.

Die Diagonalen bestehen aus Flacheisen, welche sämmtlich 12^{mm} dick sind und in der Breite zwischen 120^{mm} und 180^{mm} variiren; wenn man nämlich diejenigen Streben betrachtet, deren Fussenden gegen A, deren Kopfenden gegen B gerichtet sind, so nehmen dieselben von A nach B an Breite stetig zu; diese Breiten

sind nämlich im 2. bis 8. Felde der Reihe nach 12, 12, 14, 16, 18, 18, 18 Centimeter.

Die Vertikalen bestehen aus je 4 Winkeln von je 80^{mm} Schenkelbreite und 9^{mm} Dicke, somit von je 13,5 und zusammen 54 □Cent. Querschnitt. — Diese Winkel sind mit der obern Gurtung mittelst Zwischengliedern von Winkel- und Flacheisen verbunden, während sie auf der untern Gurtung mittelst eines genau eingesetzten kurzen Stehblechs aufgesetzt sind; letzteres wird von zwei polygonalen Blechen umfasst, welche zur Befestigung der Diagonalen dienen, beziehungsweise letztere umfassen.

173. Das Eisengewicht p′ setzt sich für jede Oeffnung folgendermassen zusammen:

Tabelle LII.

Bezeichnung der Brückenbestandtheile.	Walzeisen.	Bolzen, Niethen und Schrauben	Summe des Schmiedeisens.
1. Tragrippen (Hauptträger) . . .	28,60^{ts}	1,46^{ts}	30,06^{ts}
2. Verspannungen	2,00	0,10	2,10
3. Fahrbahntafel	9,02	0,54	9,56
4. Trottoir mit Geländer	1,96	0,09	2,05
Summa	41,58	2,19	43,77

Wenn man die Posten (1.) und (2.) als Gewicht der Hauptträger, die Posten (3.) und (4.) als Gewicht der Fahrbahntafel annimmt, so erhält man bei einer Länge der Brücke von 37 Meter als Eisengewicht per laufenden Meter und Geleise:

$$p' = 23{,}5 \times l + 314 = 1180 \text{ Kilo} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

woraus $C = 23{,}5$ und $F' = 314$.

Für die statische Berechnung ist noch das Gewicht des Oberbaus hinzuzurechnen, nämlich per Meter:

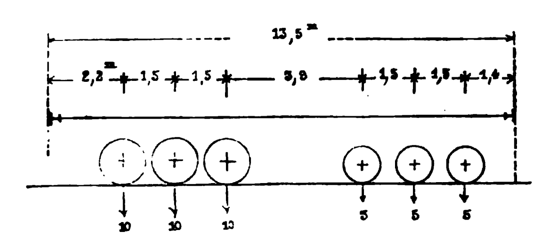
Holz und Schienen	520 Kilo,
Kiesdecke	1000 „
zus. p″ =	1520 Kilo.

woraus sich als Gesammteigengewicht ergiebt:

$$p = p' + p'' = 23{,}5\, l + 1834 = 2700 \text{ Kilo} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

Als Verkehrslast wurden 3 Locomotiven angenommen, deren Raddistanzen und Gewichte in Fig. 204 dargestellt sind; hienach wurde das Angriffsmoment zu 649,6 Mtons berechnet, woraus die stellvertretende variablc Last:

Fig. 204.



$$k = \frac{649,6 \times 8^{ts}}{37^{2}} = 3800 \text{ Kilo per Meter} \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

bestimmt wird.

Aus Gleichung II. und III. folgt:

$$q = p + k = 6500 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

Ferner erhalten für die Belastung der einen Brückenhälfte als stellvertretende gleichförmige Belastung nach Analogie der Tabelle XVII[a]:

$$k' = {}^{5}/_{4}\, k = 4750 \text{ Kilo} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

Die grösste Spannung, beziehungsweise grösste Pressung in den Gurtungen findet im Falle der gleichförmig vertheilten Maximallast statt und ist nach der Definition der Pauli'schen Träger in allen Fachen dieselbe; man bestimmt dieselbe daher am besten für das Mittelfach, und ist daselbst:

$$\max \mathfrak{M}_{4^1/_2} = \frac{q\, l^2}{8} = 6500 \,.\, \frac{37^2}{8} = 1112,3 \text{ Mts.}$$

$$\mathfrak{H}_{4^1/_2} = 5,6 \text{ M.}$$

somit nach Gleichung 255), indem das Moment auf beide Hauptträger zur Hälfte sich vertheilt:

$$U_{4^1/_2} = O_{4^1/_2} = \frac{1}{2}\, \frac{1112300}{5,6} = 98296 \text{ Kilo}$$

und die grösste mittlere Pressung in der obern Gurtung:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{99286}{151,7} = 654 \text{ Kilo},$$

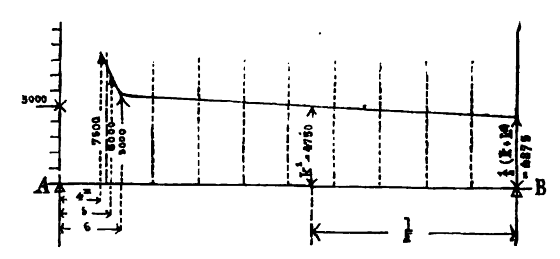
die grösste Spannung in der untern Gurtung:

$$\mathfrak{A} = \frac{99286}{132,2} = 734 \text{ Kilo.}$$

Bei Berechnung der schiefen Streben und Vertikalständer ist die grösste Vertikalkraft maassgebend; letztere findet

bei einseitiger Belastung und zwar dann statt, wenn die Last bis zur Mitte des betreffenden Feldes vorgerückt ist; die Grösse k variirt mit der Länge der variablen Last, wie solches in Fig. 134 dargestellt ist; hienach ist für den vorliegenden Fall die Fig. 205 construirt, wo für jede Länge der Ueberlast das zugehörige k sich mit dem Zirkel abnehmen oder nach arithmetischer Proportion berechnen lässt.

Fig. 205.



Das in den N°. **162**. und **163**. angegebene Rechnungsverfahren ist in der nachstehenden Tab. LIII. übersichtlich dargestellt.

Nachdem nämlich die einzelnen k nach Anleitung von Fig. 205 für jedes Fach angeschrieben sind, werden die $\mathfrak{M}_{m-1}$ und $\mathfrak{M}_m$ für jedes Fach nach Gleichung 240) und 241) bestimmt, woraus sich sodann nach Gleichung 244) die betreffende Strebenkraft und nach Gleichung 245) die Spannung $\mathfrak{A}$ ergiebt.

Zur Bestimmung der Kraft in den Vertikalständern werden die Grössen max $\mathfrak{B}_m$ nach Gleichung 239) angeschrieben und da die zugehörigen $\mathfrak{M}_{m-1}$ nach Vorstehendem schon bekannt sind, lassen sich die einzelnen V_{m-1} nach Gleichung 246) bestimmen. In dieser Gleichung ist P_u aus Tabelle LII. zu berechnen; indem das Eigengewicht der Hauptträger 32,16 Tons, somit per laufenden Meter 869 Kilo beträgt, so ist die für die Vertikale (m — 1) berechnete Belastung des untern Knotenpunkts:

für die beiden äussersten Knotenpunkte:

$$P'_u = \frac{1}{2}\, 4{,}25 \,.\, 869 \text{ Kilo} = 1846 \text{ Kilo},$$

für die zwischenliegenden Knotenpunkte:

$$P'_u = \frac{1}{2}\, 4{,}0 \quad 869 = 1738 \text{ Kilo}.$$

Die trigonometrischen Functionen der Gurtungs- und Strebenwinkel lassen sich aus Fig. 203 direct berechnen, ebenso die Grössen $\mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{H}_{m-1}$.

Wir ersehen aus Tabelle LIII., dass die einzelnen N von A nach B stetig zunehmen, wie auch in der Ausführung die Strebenquerschnitte von 12,0 □Cent. allmählig bis 19,2 □Cent. ansteigen; da bei Feststellung der Dimensionen für jede Strebe je die un-

Tabelle

$p = 2700$ Kilo $\quad \frac{1}{2}\, p\, l = 50{,}0^{ts.}$

Index m =	1	2	3
Belastung von A bis m + $\frac{1}{2}$, somit λ =	$6{,}5^m$	10,5	14,5
Variable Last per Meter: k_λ =	5100^k	5000	4860
$A + B = \lambda k_\lambda + p l$	$133{,}15^{ts}$	152,50	170,47
$B = \frac{p l}{2} + \lambda k \frac{\lambda}{2 l}$	52,63 *)	57,17 *)	63,80
$A = k \lambda + p l - B$	80,52 *)	95,33 *)	106,67
$\mathfrak{M}_{m-1} = A\left(\lambda - \frac{d}{2}\right) - \left(\frac{p+k}{2}\right)\left(\lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	$283{,}35^{mts.}$	532,76	742,75
$\mathfrak{H}_{m-1}$	$2{,}76^m$	4,3	5,2
$\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$	102662^k	123753	142836
$\mathfrak{M}_m = B\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	$403{,}53^{mts.}$	590,33	734,56
$\mathfrak{H}_m$	$4{,}3^m$	5,2	5,6
$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	93845^k	113520	131171
$\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	8817^k	10233	11665
$\cos \varphi$	0,750	0,646	0,594
$N_m = \left(\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}\right) \frac{1}{\cos \varphi}$	5878^k	7920	9802
ω in □Centim.	12.0	12,0	14,4
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega}$	490^k	660	680
$\mathfrak{V}_m = A - \lambda\,(k + p)$	$-29{,}54^{ts.}$	$-14{,}20$	$+2{,}95$
$\operatorname{tg} \beta_m$	0,1925	0,1125	0,0500
$\operatorname{tg} \gamma_{m-1}$	0,3966	0,1127	0,1125
$P_{u_{m-1}}$	$1{,}85^{ts.}$	1,74	1,74
$V_{m-1} = \left\{\mathfrak{V}'_{m-1} - (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma_{m+1}) \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} - P'_{u_{m-1}}\right\}$	9812^k	10818	12210
ω in □Centim.	54,0	54,0	54,0
$\mathfrak{V}_m$	182^k	200	226

LIII. Mainbrücke bei Kitzingen.

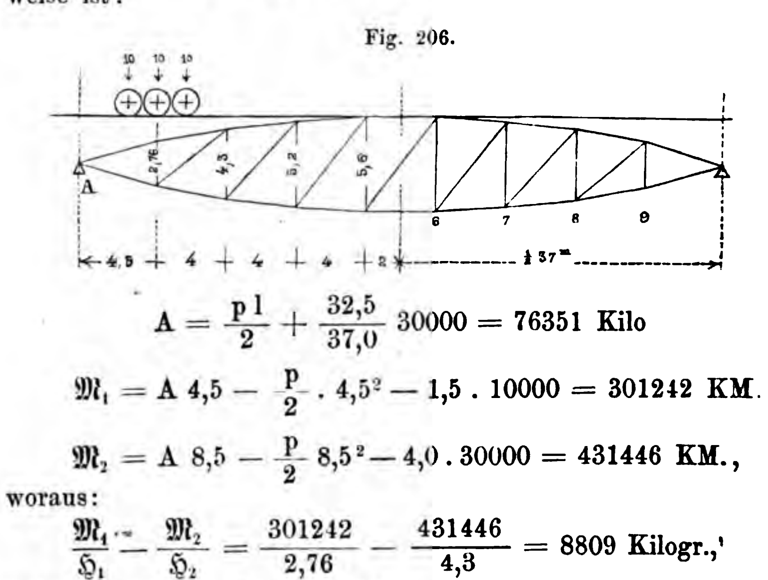
Fachweite d = 4^m, in den Endfeldern $4{,}5^m$.

4	5	6	7	8	Bemerkungen.
18,5	22,5	26,5	30,5	34,75	$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ sind für ein Geleise berechnet, müssen daher bei der Anwendung auf einen Hauptträger halbirt werden, welche halbirte Werthe mit $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{V}'$ bezeichnet werden. *) Die Auflagerdrücke für $\lambda = 6{,}5^m$ und $10{,}5^m$ sind nach Gleichung 238ª berechnet.
4750	4640	4530	4420	4300	
187,87	204,40	220,04	234,81	249,42	
71,97	81,74	93,00	105,57	120,17	
115,90	122,66	127,04	129,24	129,25	
893,27	972,22	942,08	791,70	503,75	
5,6	5,6	5,2	4,3	2,76	
159512	173632	181165	184120	182500	
819,97	812,92	692,97	447,73		
5,6	5,2	4,3	2,76		
146423	156331	161155	162221		
13087	17300	20010	21900		
0,580	0,595	0,646	0,750		
11292	14537	15480	14540		
16,8	19,2	19,2	19,2		
670	757	806	757		
+ 21,92	+ 42,49	+ 64,55	+ 87,92	+ 114,1	Die Kraft in den Vertikalen erreicht bei Bewegung der Last von A nach B in den Vertikalen V_{m-1}, bei der Bewegung von B nach A je in den Vertikalen V_m das Maximum für den betreffenden Knotenpunkt.
0,00	— 0,050	— 0,1125	— 0,1925	— 0,3066	
0,050	0,00	— 0,050	— 0,1125	— 0,1935	
1,74	1,74	1,74	1,74	1,85	
14077	16034	16685	15010	10532	
54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	
261	297	309	278	195	

günstigste Stellung der Locomotiven aufgesucht und die Gurtungskräfte nach den betreffenden concentrirten Lasten genau berechnet wurden, so dürften die Resultate der Tabelle LIII. als Beweis dienen, dass unser Verfahren trotz seiner allgemeineren Ausdrucksweise den Einfluss der concentrirten Lasten genugsam berücksichtigt.

Wir wollen letzteres durch eine direkte Rechnung für die dem Auflager A nächstgelegene Strebe N_2 nachweisen. Letztere wird nämlich am meisten in Anspruch genommen, wenn die Locomotive mit ihrem Mittelrad gerade über der Vertikalen (1) angekommen ist, wie solches in Fig. 206 dargestellt ist; für diese Belastungsweise ist:

Fig. 206.



$$A = \frac{p\,l}{2} + \frac{32,5}{37,0}\ 30000 = 76351 \text{ Kilo}$$

$$\mathfrak{M}_1 = A\ 4,5 - \frac{p}{2} \,.\, 4,5^2 - 1,5 \,.\, 10000 = 301242 \text{ KM}.$$

$$\mathfrak{M}_2 = A\ 8,5 - \frac{p}{2}\ 8,5^2 - 4,0 \,.\, 30000 = 431446 \text{ KM.},$$

woraus:

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{H}_1} - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{H}_2} = \frac{301242}{2,76} - \frac{431446}{4,3} = 8809 \text{ Kilogr.,}$$

während wir in Columne (1) der Tabelle LIII. hiefür 8817 gefunden haben; die genaue Uebereinstimmung ist Zufall; doch ist ein annäherndes Resultat durch Bestimmung der Auflagerdrücke nach Gleichung 238ª) bedingt.

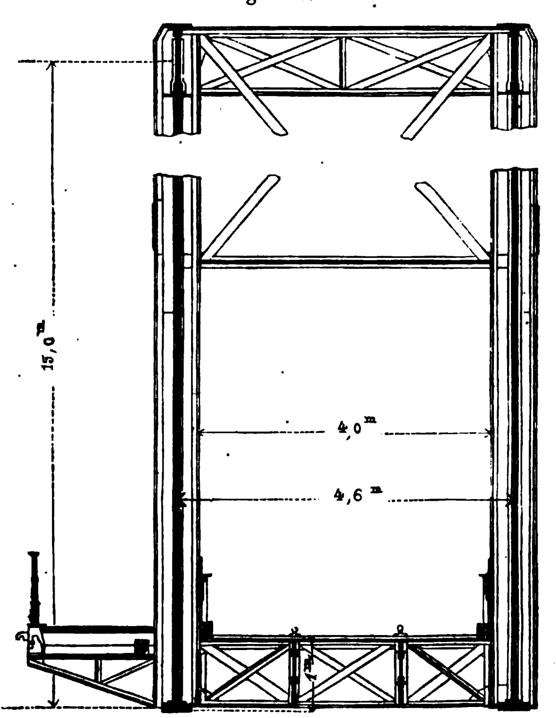
174. Die bedeutendste der nach Pauli'schem System erbauten Brücken ist die Rheinbrücke bei Mainz, worüber die Maschinenfabrik von Klett & Comp. in Nürnberg, welche mit Projectirung und Ausführung der Eisenconstruction betraut war, im Jahre 1861 eine besondere Veröffentlichung hat erscheinen lassen.

Die Brücke geht in schiefer Richtung über den Rhein der Art, dass die 4 grossen Oeffnungen normal zum Fluss 90 M., nach der Brückenaxe 101,29 M. lichte Weite haben; an die 4 grossen Oeffnungen schliessen sich 28 Fluthöffnungen von zusammen 551 M. Lichtweite an.



Für die 4 grossen Hauptöffnungen war massgebend, dass die Unterkante der Eisenconstruction 14,0 Meter über dem Nullpunkt des Pegels sich befinden musste, so dass die Schiffe beim höchsten schiffbaren Wasserstand mit umgelegten Masten die Brücke passiren können; aus diesem Grunde musste die Fahrbahntafel möglichst tief gelegt und deren Constructionshöhe auf 1 Meter beschränkt werden, wie aus beistehender Querschnittskizze ersichtlich ist (Fig. 207).

Fig. 207.



Die Fachweite der Mainzer Rheinbrücke beträgt 8 Meter, welche Weite durch besondere 1¾ Meter hohe Längenträger überspannt wurde; letztere sind ganz geeignet für die unter der Fahrbahntafel angebrachte Horizontalverstrebung und nehmen ferner in der Mitte jedes Faches je einen Querträger auf, während andere Querträger an den Vertikalständern selbst befestigt sind. Hienach beträgt die Distanz der Querträger 4,0 Meter und befinden sich zwischen letztern Schwellenträger von gewöhnlichen Blechbalken eingeschoben. — Bei der beschriebenen Anordnung war nahezu die ganze Constructionshöhe der Fahrbahntafel (1,0 Meter) für die Querträger disponibel, welche demgemäss als Fachwerke construirt werden konnten.

Die für Gurtungen und Vertikalständer angewendete allgemeine Anordnung ist aus Fig. 207 ersichtlich; sämmtliche Details sind entsprechend den in N⁰. **170.** aufgeführten Grundsätzen.

Im Mai 1860 wurde mit dem Bau der Werkstätten begonnen (welche seitdem als „Eisenbauanstalt Gustavsburg bei Mainz" in Thätigkeit geblieben sind) und waren sämmtliche Eisentheile bereits angearbeitet, als im März 1862 mit dem Aufstellen der 4 Hauptträger begonnen werden konnte. — In Entfernungen von 25 M. wurden Joche eingerammt und darüber besondere schmiedeiserne Hilfsträger behufs Herstellung eines festen Aufstellungsgerüstes angebracht; am 7. Juni desselben Jahres wurde mit dem Aufbringen der definitiven Eisenconstruction in der zunächst Gustavsburg gelegenen Oeffnung begonnen und schon Mitte September war diese (4.) Oeffnung, mit Anfang Dezember aber die ganze Brücke vollständig zusammengesetzt, so dass am 4. Dezember die erste Probefahrt stattfinden konnte.

Das Gewicht der Eisenconstruction der Mainzer Rheinbrücke wird für eine der grossen Oeffnungen von 105,2 M. Stützweite bei 15,0 M. geometrischer Trägerhöhe angegeben wie folgt:

Hauptträger, incl. Auflagersäulen . . .	268,26 tons,
Fahrbahntafel	63,55 „
Consolen und Geländer (auf einer Seite angebracht)	7,48 „
zusammen	339,29 tons,

woraus das Eisengewicht per laufenden Meter:

$$p' = 24,33\,l + 676 = 3230 \text{ Kilo.}$$

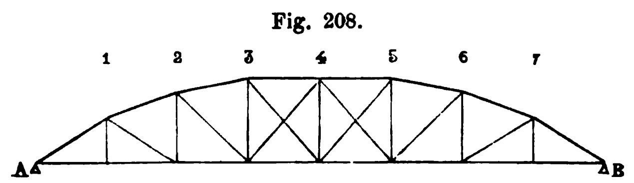
Hiebei sind die Gurtungsquerschnitte der Hauptträger nach der in N⁰. **39.** angeführten Regel bestimmt, wonach bei dreifach gedachter Verkehrsbelastung eine Grenz-Spannung von 1600 Kilo per □Cent. angenommen wurde. Die Hauptträger der grossen Oeffnungen haben hienach eine wirkliche grösste Spannung von 820 Kilo auszuhalten, was in Tabelle XIII. dem Verhältnisse $\frac{p}{k} = \frac{3340}{2930} = 1,14$ entspricht.

175. Während parabolische Träger (wie die denselben nahestehenden Pauli'schen Träger) in sämmtlichen Feldern Gegenstreben erfordern, sind letztere bei geradlinig begränzten Trägern nur in der Mitte, zwischen den Abscissen a und (l — a) nothwendig.

Letzteren Vortheil auch bei gekrümmter Gurtungsform zu erhalten, bezweckt das System Schwedler, dessen Aufriss in nachstehender Figur 208 skizzirt ist und welches gleichfalls den unsymmetrischen Systemen angehört; bei diesen Trägern wird die Gestalt der Gurtungen in der Weise bestimmt, dass in sämmtlichen Feldern (mit Ausnahme der Mittelfelder) die Strebenkraft für min $\mathfrak{S}$ gerade gleich Null wird, so dass also in diesem Momente im be-

trachteten Felde weder Haupt- noch Gegenstrebe wirkt, während bei allen anderen Belastungen die Kraft in der Hauptstrebe einen positiven Werth hat; es kommen somit die Gegenstreben gar nicht zur Wirkung und können (mit Ausnahme der Mittelfelder) ganz weggelassen werden.

Fig. 208.



Herr Schwedler hat die Vortheile der vorbeschriebenen Anordnung in der Berliner deutschen Bauzeitung, Jahrgang 1867, in folgender Weise beschrieben:

„Im Vergleich zum geraden Balken haben die Diagonalen bedeutend geringere Querschnitte, die Vertikalen sind nach den Auflagern hin weniger hoch, also leichter und stabiler, die Endsäulen an den Auflagern fallen ganz fort und stellt sich somit ein geringeres Gewicht heraus.

„Im Vergleich zum Parabelbalken nehmen die Gurtungen nach den Auflagern hin im Querschnitt ab, anstatt zu, jedoch nicht so stark, als beim geraden Balken, so dass die Variation des Querschnitts mittelst langer Eisensorten bequem hergestellt werden kann. — Der Winkel, unter welchem die Gurtungen am Auflager zusammentreffen, ist grösser als beim Parabelbalken und es lässt sich die Ueberführung der gedrückten Gurtung in die gezogene desshalb leicht bewirken.“

176. Zur Bestimmung der Gurtungsform denkt man sich die Träger in einzelne einfache Systeme zerlegt, deren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ auf irgend eine Weise bestimmt worden sind; da das Schwedler'sche System unsymmetrisch ist, gerade untere Gurtungen und gezogene Diagonalstreben hat, da ferner diese letzteren nach der vorhergehenden Nummer nur in einer Richtung angebracht sind und hiebei in ähnlicher Weise wie beim geraden Träger wirken, so werden die Kräfte in den Diagonalen für die linkseitige Trägerhälfte nach Figur 140 und Gleichung 190) bestimmt und erhalten wir hienach:

$$N \sin \varphi = \mathfrak{V}' - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg} \beta_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 256)$$

Soll nun diese Strebenkraft für $\min \mathfrak{V}_m$ gleich Null sein, so muss sein:

$$\min \mathfrak{V}_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg} \beta_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 257)$$

wo $\min \mathfrak{V}_m$ und $\mathfrak{M}_m$ gleichzeitige Werthe bedeuten. — Indem man nun für irgend einen Knotenpunkt die Trägerhöhe $\mathfrak{H}_m$ vorläufig

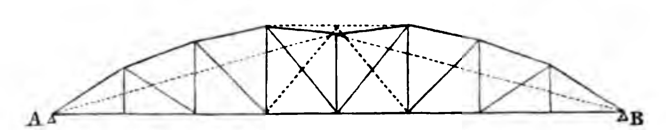
annimmt, kann man die gegenseitige Lage der übrigen Knotenpunkte nach Gleichung 257) bestimmen und erhält damit für diejenige Seite, von welcher die Last eingerückt gedacht ist, direct die Form der obern Gurtung. Herr Schwedler giebt hiefür die Gleichung:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{4\,f\,x}{l^2}\,(l - x)\,\frac{p + \frac{k}{2}}{p + k\frac{x}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 258)$$

wo f eine ideelle Trägerhöhe in der Mitte, x die Abscisse des jeweils betrachteten Knotenpunkts bezeichnet. (Die Grössen $\mathfrak{H}_x$, l, p und k haben die sonst in diesem Buche angewendete Bedeutung.)

Den Coordinatenursprung in A vorausgesetzt, ist die Gleichung 258) nur zwischen A und der Brückenmitte gültig; die andere Trägerhälfte wird symmetrisch gegen die Mitte angeordnet, wie solches Fig. 209 angiebt. — In der Ausführung wird in den

Fig. 209.



mittlern Feldern die obere Gurtung, welche daselbst einen einspringenden Winkel bilden würde, horizontal abgegrenzt, wodurch in den hienach modifizirten Mittelfeldern Gegenstreben nothwendig werden, welche in Fig. 209 durch punktirte Linien angegeben sind.

In N⁰. 47 des Jahrgangs 1868 der deutschen Bauzeitung hat Herr E. Grütefien darauf aufmerksam gemacht, dass die nach Gleichung 258) bestimmte Gurtungsform, welche die unterste Grenzlage für die obern Knotenpunkte angiebt, eine für jede Länge der Verkehrslast constante, gleichförmig vertheilte Belastung voraussetzt, wie solche in Wirklichkeit nicht besteht; eine genaue Berücksichtigung der durch eine bestimmte Locomotivbelastung hervorgerufenen Momente zeigt, dass die Grenzlage für die obern Knotenpunkte höher anzunehmen ist, wie auch Herr Schwedler selbst neuerdings abweichende Formen schon aus ästhetischen Gründen angewendet hat.

Eine richtigere Grenzlinie werden wir mit Hilfe der Gleichung 257) dann erhalten, wenn wir bei Bestimmung der min $\mathfrak{B}_m$ und zugehörigen $\mathfrak{M}_m$ ein variables, der Länge λ der Ueberlast jeweils entsprechendes k_λ annehmen, wie solches durch Figur 134 des Nähern angegeben ist.

177. Indem wir nunmehr die praktischen Formeln für ein einfaches Schwedler'sches System anschreiben, so ist bei Be-

rechnung der Gurtungsstärke die gleichförmig vertheilte Maximallast in Betracht zu ziehen, welche per laufenden Meter und Geleise mit $q = p + k$ bezeichnet wird; unter Beibehaltung der in N⁰. **134.** erläuterten Bezeichnungen erhalten wir nach den Gleichungen 175)—179ᵃ) für diesen Fall:

$$A = \frac{q\,l}{2} \quad \ldots \ldots \quad 259)$$

$$\mathfrak{M}_m = A\,x_m - \frac{q\,x_m^2}{2} \quad \ldots \quad 260)$$

$$\mathfrak{V}_m = A - q\,x_{m-1/2} \quad \ldots \quad 261)$$

worauf für die Gurtungskräfte sich nach den Gleichungen 185) bis 186) ergiebt:

$$O_m \cos \beta_m = U_{m+1} = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad \ldots \ldots \quad 262)$$

$$U_m = O_{m-1} \cos \beta_{m-1} = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad \ldots \quad 263)$$

und zwar ist für die obere Gurtung:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\Omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 264)$$

$$\mathfrak{B} = \left(1 + K\,\frac{\Omega\,L^2}{\Theta}\right)\frac{O_m}{\Omega} \quad \ldots \quad 265)$$

und endlich für die untere Gurtung:

$$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\Omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 266)$$

Die Kräfte in den Streben und Vertikalen haben zwar im vorliegenden Falle der gleichförmig vertheilten Maximallast keine Maximalwerthe, doch kann es von Interesse sein, dieselben zu kennen; und erhalten wir nach der Gleichung 189) für die linkseitige, zunächst dem Auflager A gelegene Brückenhälfte:

$$N_m \cos \varphi = \left(\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\right) \quad \ldots \quad 267)$$

$$N_m \sin \varphi = \mathfrak{V}'_m - \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m}\,\mathrm{tg}\,\beta_m \quad \ldots \quad 267^a)$$

und indem wir Gleichgewicht um den untern Knotenpunkt m anschreiben:

$$V_m = N_m \sin \varphi - P'_u \quad \ldots \ldots \quad 268)$$

Indem wir das Eigengewicht $p = C\,l + F$ setzen (s. Gleichung 213) so erhalten wir:

$$P_u = \left(k + \frac{C\,l}{2} + F\right) d \quad \ldots \quad 269)$$

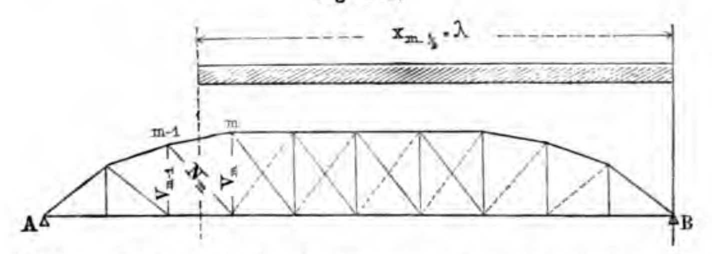
wo d die mittlere Fachweite der beiden links und rechts von m befindlichen Felder bezeichnet.

Für den mittleren Vertikalständer, der unterhalb von zwei verschieden gerichteten Diagonalkräften angegriffen ist, erhalten wir mittelst Gleichgewichts um den obern Knotenpunkt nach Gleichung 194):

$$\left.\begin{aligned} V_{1/2\,l} &= P'_0 \\ P_0 &= {}^1/_2\, C\, l\,.\, d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 269^a)$$

wo P'_0 meist gleich $^1/_2\, P_0$ zu setzen ist.

Fig. 210.



Uebergehend auf die Bestimmung der grössten Kräfte in den Diagonalstreben und Vertikalständern haben wir die grösste einseitige Belastung ins Auge zu fassen und zwar ist für Bewegung der Last vom rechtseitigen Auflager B bis zur Mitte des betrachteten Feldes entsprechend den für Parabelträger entwickelten Gleichungen 238)—241):

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{p\,l}{2} + \lambda\, k\, \frac{\lambda}{2\,l} \\ B &= \frac{p\,l}{2} + \lambda\, k\, \frac{2\,l - \lambda}{2\,l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 271)$$

$$\mathfrak{B}_m = A - (k + p)\, \lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad 272)$$

ferner gleichzeitige Angriffsmomente:

$$\mathfrak{M}_{m-1} = A\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right)^2 \quad \ldots \quad 273)$$

$$\mathfrak{M}_m = B\left(\lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{q}{2}\left(\lambda - \frac{d}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 274)$$

Es folgt hieraus für die Diagonalstreben nach Gleichung 188):

$$N_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \quad \ldots\ldots \quad 275)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 276)$$

Der Fusspunkt der Strebe N_m ist für die betrachtete Brückenhälfte gegen B gerichtet, weil die entgegengesetzten Diagonalen

(mit Ausnahme der Mittelfelder) ganz fehlen; man erhält demgemäss für die Vertikale V_m mittelst Gleichgewichts um den untern Knotenpunkt m:

$$V_m = N_m \sin\varphi - P'_{u_m} \quad \ldots \ldots \quad 277)$$

Diess ist jedoch nicht die stärkste Anstrengung dieser Vertikalen, welche vielmehr — bei unterhalb angebrachter Fahrbahn — nach der Darstellung in N°. **151.** dann stattfindet, wenn die Last von B bis zur Mitte der Diagonale m + 1 vorgerückt ist; hienach erleidet bei der in Figur 210 dargestellten Belastung die Vertikale V_{m-1} ihre grösste Anstrengung und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} V_{m-1} &= -\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg}\beta_{m-1} - \mathfrak{B}'_{m-1} - P'_{u_{m-1}} \\ &= -\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg}\beta_{m-1} - \mathfrak{B}'_m + P'_{o_{m-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 278)$$

in welcher Gleichung $\mathfrak{B}_m$ zwischen dem Auflager A und der Abscisse l — a (Gleichung 207 zu vergleichen) negativ ist.

Gegen das Auflager B hin wird $N_m \cos\varphi$ nach Gleichung 275) negativ, was bedeutet, dass anstatt den Streben N die entgegengesetzt gerichteten Streben T zur Wirkung kommen; für diese Felder ist daher nach Gleichung 192):

$$V_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \operatorname{tg}\beta_{m+1} + \mathfrak{B}'_m + P'_{o_m} \quad \ldots \quad 279)$$

$$\left.\begin{aligned} V_{m-1} &= \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} \operatorname{tg}\beta + \mathfrak{B}'_{m-1} + P'_{o_{m-1}} \\ &= \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} + \mathfrak{B}'_m - P'_{u_{m-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 280)$$

An den Vertikalen max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$, wo die gezogenen Diagonalstreben ihre Richtung ändern, wird entsprechend der Figur 142ª Gleichgewicht um den obern Knotenpunkt angeschrieben und nach Gleichung 194) erhalten:

$$V_m = P'_o + \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} (\operatorname{tg}\beta_m - \operatorname{tg}\beta_{m+1}) \quad \ldots \quad 281)$$

indem bei der vorausgesetzten Bewegung der Last von B gegen A der Punkt max $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ stets auf der rechten Brückenhälfte liegt.

In den vorstehenden Gleichungen 271)—281) ist die Last stets von B bis zur Mitte des Feldes (m — 1) vorgerückt gedacht, wobei die im halbbelasteten Felde befindliche variable Belastung in der Vertikale m concentrirt angenommen wird; hienach ist in allen vorgenannten Gleichungen:

$$P_{u_{m-1}} = P_{o_m} = P_{o_{m-1}} = \tfrac{1}{2}\, C l \,.\, d \quad \ldots \ldots \quad 282)$$

$$P_{u_m} = (k + \tfrac{1}{2}\, C l + F)\, d \quad \ldots \ldots \quad 283)$$

indem in beiden Gleichungen d die mittlere Weite der beiden an der betrachteten Vertikale anstossenden Felder bezeichnet.

178. Die Formeln 259)—283) sind, wie auch die für Parabelträger angewendeten Gleichungen auf die allgemeinen Formeln 175) — 179ᵃ), sowie 185) — 194ᵃ) gegründet, indem in beiden Fällen ein einfaches, unsymmetrisches System mit gezogenen Diagonalstreben vorausgesetzt ist.

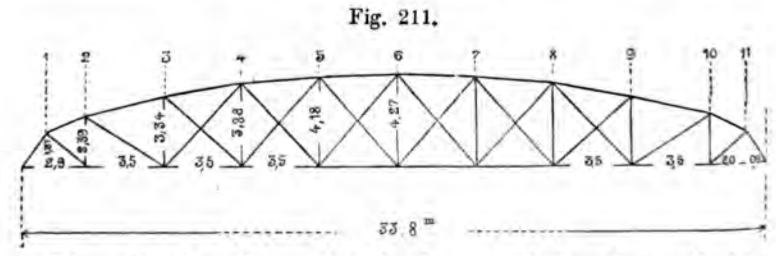
Beiderlei Gleichungen müssen für die Streben gekrümmter Träger mit unterhalb liegender Fahrbahn dasselbe Resultat geben, wenn man berücksichtigt, dass in den Gleichungen 238)—252) die Last von A nach B, in den Gleichungen 271)—283) aber von B nach A rückend gedacht ist.

Bei mancher Aehnlichkeit der parabolischen Träger mit denen des Schwedler'schen Systems, und bei vielfacher Uebereinstimmung der zur Berechnung dienenden Formeln ist als Hauptunterschied hervorzuheben, dass diejenigen Diagonalstreben, welche beim Schwedler'schen System ganz fehlen, bei den Parabelträgern gerade am meisten in Anspruch genommen sind.

Herr J. W. Schwedler hat nach seinem System schon eine grössere Anzahl Brücken projectirt, von denen mehrere in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam eingehend beschrieben sind; hierunter sind auch die Strassenbrücken über die Oder in Breslau; diese unterscheiden sich von den Eisenbahnbrücken insbesondere dadurch, dass in Folge des grossen Eigengewichts der Strassenfahrbahn nur ein einziges Feld mit Kreuzstreben nothwendig wird, die Gurtungskurve selbst aber nahezu einem Kreisbogen entspricht; in Folge dessen haben diese Brücken ein wesentlich gefälligeres Aussehen, als die nach Gleichung 258) construirten Eisenbahnbrücken.

179. Eine etwas abweichende Trägerform zeigt die Brücke über den Colomak, welche von F. Laissle für die Charkow-Krementschug-Bahn projectirt wurde und wobei die Berechnung nach vorstehenden Formeln 259)—283) geschehen ist.

Fig. 211.

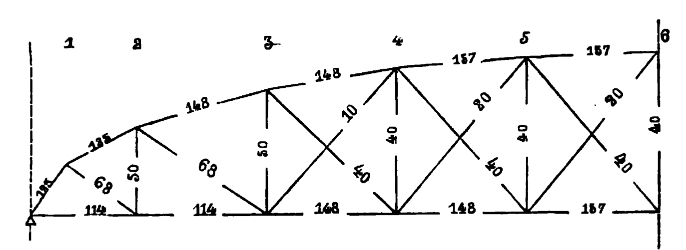


Diese Brücke, deren Details den erwähnten Schwedler'schen Brücken nachgebildet sind, hat eine Spannweite von 33,8ᵐ erhalten, welche Länge in 10 Felder getheilt ist (s. Figur 211). —

Eigenthümlich ist die Anordnung der Endfelder, welche gebrochene obere Gurtungen und je eine weitere Diagonale zeigen; in Folge dessen ist der Winkel, unter welchem beide Gurtungen sich verbinden, steiler (weniger spitz) und war es insbesondere möglich, die reine Ellipsenform der obern Gurtung durchzuführen; es mussten indess von den vorhandenen 10 Feldern die 6 mittleren Gegenstreben erhalten, was theilweise vermieden worden wäre, wenn zwischen 2 Viertels-Ellipsen ein gerades Stück eingeschaltet worden wäre.

Die Brücke ist in Tafel XIV. aufgezeichnet und ist hieraus die Construction der Hauptträger sowohl als der Fahrbahn ersichtlich; die Querschnittdimensionen der Hauptträger sind in Figur 212 nach Quadratcentimetern eingeschrieben, wobei die Abzüge für Nietlöcher bereits vollzogen sind.

Fig. 212.



Das Eigengewicht der Colomakbrücke setzt sich folgendermassen zusammen, je in Kilo per laufenden Meter ausgedrückt:

Hauptträger:		
Obere Gurtung	430 Kilo	
Untere „	393 „	
Vertikalständer	153 „	
Diagonalstreben	150 „	
Windkreuze	34 „	
		1160 Kilo.
Fahrbahntafel:		
Querträger	180 Kilo	
Schwellenträger.	280 „	
Fahrschienen	68 „	
Querschwellen und Bedielung .	182 „	
		710 Kilo.
	Zusammen	1870 Kilo.

Hienach beträgt das Eigengewicht bei $33{,}8^m$ Spannweite:

$$p = 34{,}3\,l + 710 = 1870 \text{ Kilo}$$

und das Eisengewicht abzüglich von Schienen, Schwellen und Bedielung:

Colomak-Brücke. Tabelle

$p = 1870^k$ $k = 4564^k$ $q = 6434^k$

Index m =	1	2
x_m	$0{,}91^m$	2.9
$\mathfrak{H}_m$	$1{,}37^m$	2,39
$\mathfrak{M}_m = Ax_m - \frac{q}{2} x_m^2$ Nach Gleichung 260).	$90{,}46^{mts}$ *)	288,3
$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	$66{,}03^{ts}$	120,6
$U_m = \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$ Nach Gleichung 263).		$33{,}01^{ts}$
Ω_m in Quadratcentimetern		114
$\mathfrak{A} = \frac{U_m}{\Omega_m}$ in Kilo		289
$\frac{1}{\cos\beta}$	1,696	1,135
$O_m = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \frac{1}{\cos\beta}$ Nach Gleichung 262).	$55{,}98^{ts}$	68,44
Ω_m in Quadratcentimetern	125	125
$\mathfrak{B}_m = \frac{O_m}{\Omega_m}$ in Kilo	448	547
$N_m \cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$ Nach Gleichung 267).		27280^k
$\cos\varphi$		0,822
$tg\,\varphi$		0,690
N_m		33190^k
$N_m \sin\varphi = \left(\frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\right) tg\,\varphi$		18820
$P'_u = \frac{1}{2} d \left(q - \frac{C\,l}{2}\right)$ Nach Gleichung 230).		9360
$V_m = N_m \sin\varphi - P'_u$ Nach Gleichung 268).		9460

LIV.

$l = 33{,}8^m$

Berechnung der Gurtungen.

$A = q \frac{l}{2} = 108{,}735^{t}$.

3	4	5	6	Bemerkungen.
6,4	9,9	13,4	16,9	
3,34	3,88	4,18	4,22	
564,1	761,2	879,4	918,8	*) $\mathfrak{M}_1 = \frac{0,91}{2,90} \mathfrak{M}_2$.
168,9	196,2	210,4	215,2 *)	*) Da $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ seinen grössten Werth in der Trägermitte hat, so sind im vorliegenden Falle der gleichförmigen Maximalbelastung die Fusspunkte sämmtlicher gezogenen Diagonalen gegen die Brückenmitte gerichtet.
60,30	84,45	98,10	105,20	
114	148	148	157	
529	570	663	670	
1,036	1,012	1,004	1,00	
87,49	99,28	105,62	107,60	
148	148	157	157	
591	632	673	685	
24150	13650	7100	2400	
0,826 0,683	0,724 0,690	0,670 1,109	0,666 1,194	
29240	18850	10600	3600	
16090	13020	7870	2865	
10245	10245	10245	10245	
5845	2775	— 2375	— 4515 *)	*) $V_6 = 2 N_6 \sin \varphi - P'_u$.

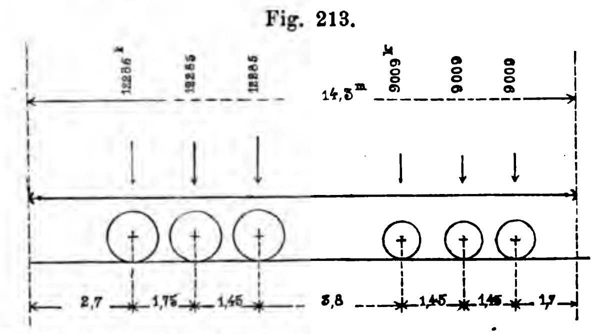
$$p' = 34{,}3\, l + 460 = 1620,$$

je per laufenden Meter der eingeleisigen Brücke.

Anmerk. Das Project hat in der Ausführung eine Aenderung erfahren, indem als lichte Weite zwischen den Hauptträgern 16' englisch oder 4,877^{m} vorgeschrieben wurden.

Bezüglich der Verkehrslast wurde angenommen, dass die Brücke mit Locomotiven, wie solche in Fig. 213 skizzirt sind, befahren werde, so dass im Falle der Maximalbelastung drei solche Maschinen in Rechnung kommen; für diesen Fall wurde ermittelt, dass eine gleichförmig vertheilte Last k = 4561 Kilo dasselbe max $\mathfrak{M}$ in der Brückenmitte hervorrufen würde.

Fig. 213.



180. Nachdem im Vorstehenden Eigengewicht und Verkehrslast bestimmt und die Dimensionen der Eisenconstruction durch Tafel XIV. und Figur 213 gegeben sind, so kann nunmehr die im Material herrschende Spannung und Pressung nach den Gleichungen 259)—283) bestimmt werden.

Die Gurtungen haben ihre grösste Anstrengung im Falle gleichförmig vertheilter Maximallast auszuhalten und sind die betreffenden Spannungen und mittleren Pressungen nach den Gleichungen 259)—266) bestimmt und in der vorstehenden Tabelle LIV. zusammengestellt worden. — Es sind in dieser Tabelle aber auch die der Maximallast entsprechenden Strebenkräfte N und V eingetragen, wozu die Gleichungen 267)—269) gedient haben.

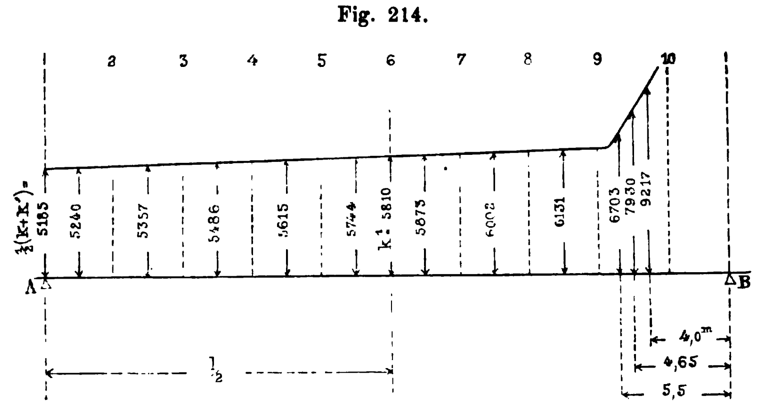
Die grösste Anstrengung der Diagonalstreben und Vertikalständer findet bei einseitiger Belastung statt, für welche ein mit der Länge der variablen Last wechselnder Werth k in Rechnung zu nehmen ist. — Die in Figur 213 skizzirte Locomotive hat besondern Tender und überhaupt ähnliche Verhältnisse wie die der Tabelle XVII^{a}. zu Grunde gelegte Güterlocomotive, es darf desshalb das der Belastung der halben Brücke entsprechende k^1 nach Maassgabe genannter Tabelle und demgemäss bei 33,8^{m} Spannweite

$$k^1 = 1{,}275\, k = 1{,}275 \;.\; 4560 = 5810 \text{ Kilo}$$



genommen werden. — Indem wir nunmehr das in Figur 134 dargestellte Verfahren auf den vorliegenden Fall anwenden, so erhalten wir für die Abscissen $\lambda = 4^m$, $4{,}65^m$ und $5{,}5^m$ die zugehörigen $k_\lambda = \frac{36882}{4{,}0}$, $\frac{36882}{4{,}65}$ und $\frac{36882}{5{,}5}$, ferner für die unsymmetrische Belastung der ganzen Brücke $k_0 = \frac{k + k'}{2} = 5185$ Kilo und ergeben sich schliesslich die in Figur 214 dargestellten Werthe $k\lambda$ für die je bis zur Fachmitte vorgerückte Belastung. Diese Werthe $k\lambda$ in den Gleichungen 271) — 274) eingesetzt, erhalten wir die Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ und Vertikalkräfte $\mathfrak{V}$ in einer Weise, welche der Belastung mit den in Fig. 213 skizzirten Locomotiven möglichst vollständig entspricht.

Fig. 214.



Nachdem hienach die einzelnen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ bestimmt sind, erhalten wir die Kräfte in den Diagonalstreben nach Gleichung 275), die Kräfte in den Vertikalständern nach den Gleichungen 277) bis 283) und sind in den Tabellen LV. und LVI. diese Strebenkräfte und deren Entwicklung zusammengestellt.

Die Formeln 277) — 283) geben für eine bis zur Fachmitte (m — 1) vorgerückte Ueberlast die in den Vertikalständern wirkenden Kräfte V_{m-1} und V_m zu beiden Seiten des betrachteten Faches; nach den Erläuterungen der N^o^. **151.** geben im vorliegenden Falle — wo die Fahrbahn an den untern Knotenpunkten befestigt ist — die Kräfte V_{m-1} die grösste Anstrengung der betreffenden Vertikalständer, wie diess insbesondere auch aus nachfolgender Tabelle LVI. ersichtlich ist. — (Es ist hiebei mit jedem V_{m-1} das in der vorhergehenden Vertikalcolumne befindliche V_m zu vergleichen.)

Die Werthe V_m sind in genannter Tabelle theilweise negativ, wonach die betreffenden Vertikalen bei der betrachteten Belastung

Tabelle

Colomak-Brücke. $p = 1870^k$ $l = 33{,}8^m$

Index m =	2	3	4	5
k_m	$2{,}9^m$	6,40	9,90	13.40
$\lambda = l - x_m - \frac{d}{2} =$	$32{,}35^m$	29,15	25,65	22.15
k_λ nach Fig. 114.	5240^k	5357	5486	5615
$q = k_m + p =$	7110^k	7227	7356	7485
$A + B = pl + \lambda k_\lambda$	$232{,}72^{ts}$	$219{,}36^{ts}$	203,92	187,58
$A = \frac{pl}{2} + \lambda k_\lambda \frac{\lambda}{2l}$	$112{,}72^{ts}$	98,94	84,86	72,36
B	$120{,}0^{ts}$	$120{,}42^{ts}$	119,06	115,22
$\mathfrak{M}_{m-1} = A\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(l - \lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	$96{,}05^{mts}$ *)	276,06	504.91	626,72
$\mathfrak{H}_{m-1}$	$1{,}37^{mts}$	2,39	3,34	3,88
$\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$	$70{,}1^{ts}$	116,76	151,17	161,01
$\mathfrak{M}_m = B\left(\lambda - \frac{d}{2}\right) - \frac{q}{2}\left(\lambda - \frac{d}{2}\right)^2$	$313{,}65^{mts}$	586,80	744,58	792.99
$\mathfrak{H}_m$	$2{,}39^m$	3,34	3,88	4,18
$\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m}$	$131{,}23^{ts}$	175,67	191,90	189,71
$N_m \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{H}_m} - \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}\right)$	30565^k	29465	20377	14350
$\cos\varphi$	0,822	0,826	0,724	0,670
N_m	37184^k	35680	28145	21434
ω_m in □Centim.	68	68	40	40
$\mathfrak{A} = \frac{N_m}{\omega_m}$	547^k	524	703	536

LV.

$p\,l = 63{,}2^{t}$. **Berechnung der Diagonalstreben.**

6	7	8	9	10	11	Bemerkungen.
16,90	20,40	23,90	27,45	30,90	32,9	
18,65	15,15	11,65	8,15	4,65	4,65 *)	*) $\lambda_{11} = \lambda_{10}$, weil Punkt (11) kein Lastpunkt ist. —
5744 7614	5873 7748	6002 7872	6131 8001	7930 8800		
170,33	152,17	133,13	113,17	100,08		
61,16	51,54	43.65	37,63	34,14		
109,17	100,63	89,48	75,54	65,94		
651,62	586,00	501,18	365,26	233,475		*) $\mathfrak{M}_1 = \frac{0{,}915}{2{,}900}\,\mathfrak{M}_2$, weil Punkt (1) nicht belastet.
4,18	4.27	4,18	3,88	3,34		
155,89	137,47	119,90	94,14	69,90		
757,71	653,29	499,78	319,63	150,02	73,63 *)	*) $\mathfrak{M}_{11} = \frac{0{,}915}{2{,}9}\,\mathfrak{M}_{10}$.
4,27	4,18	3,88	3,34	2,89	1,37	
177,45	156,29	128,81	95,70	64,02	53,74	
10783	9412	4453	780	—2940 *)	—8077 *)	*) Negatives $N_m \cos\varphi$ bedeutet Zug in den Streben T_{10} und T_{11}.
0,667	0,634	0,667	0,670	(0,826)	(0,822)	
16170	14845	6676	1165	(-3560) *)	(-9960) *)	
28	20	20	10	(68)	(68)	
577	742	334	116	(72)	(146)	

Colomak-Brücke. **Tabelle**

$p = Cl + F = 1160 + 710$ Kilo,

Index m =	2	3	4	5
x_m	2,9ᵐ	6,4	9,9	13,4
$\lambda = l - x_m + \frac{d}{2}$	32,35ᵐ	29,15	25,65	22,15
k_λ	5240ᵏ	5357	5486	5616
$q = p + k$	7110ᵏ	7227	7356	7485
B nach Tabelle LV.	120,00 ts.	120,42	119,06	115,22
$\mathfrak{B}_m = \lambda (p + k) - B$	110,0 ts.	90,24	69,62	50,57
$P'_{u_m} = \frac{1}{2} (k + \frac{1}{2} Cl + F) d$	10448ᵏ *)	11630	11808	12082
$P'_{u_{m-1}} = \frac{1}{2} (F + \frac{1}{2} Cl) d$		2064 *)	2257	2257
$P'_{o_m} = \frac{1}{2} Cld$	9,28ᵏ	1015	1015	1015
$\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}}$ nach Tabelle LV.	70,11 ts.	116,76	151,17	161,01
$tg\, \gamma_{m-1}$		0,514	0,271	0,1[illegible]4
$\frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} tg\, \beta_{m-1}$		30,02 ts.	20,48	12,40
$V_{m-1} = - \mathfrak{B}'_m + P'_{o_m} - \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{\mathfrak{H}_{m-1}} tg\, \beta_{m-1}$		16115	15345	139[illegible]
ω_{m-1}		50	50	40
$\mathfrak{V}_m$		322	307	322
$N_m \cos \varphi$ nach Tabelle LV.	30565ᵏ	29465	20377	143[illegible]
$tg\, \varphi$	0,69	0,683	0,954	1,109
$N_m \sin \varphi = N_m \cos \varphi\, tg\, \varphi$	21090ᵏ	20124	19440	15914
$V_m = N_m \sin \varphi - P'_{u_m}$	10642ᵏ	8494	7632	3832

LVI. Berechnung der Vertikalständer.

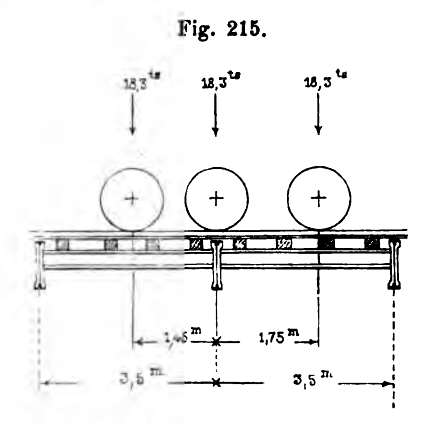
$l = 33{,}80^m$, Fachweite $x_{m+1} - x_m = d$.

6	7	8	9	10	11	Bemerkungen.
16,9	20,4	21,9	27,4	28,9	30,9	
18,65	15,15	11,65	8,15	4,65	4,65	$\lambda_{11} = \lambda_{10}$, weil Punkt (11) nicht belastet ist.
5744	5873	6002	6131	7930		
7614	7743	7872	8001	[illegible]800		
109,17	100,63	89,48	75,54	65,94		
32,83	16,63	2,23	— 10,34	— 20,37		
12310	12538	12761	12985	14752 *)		*) Für die äussersten Vertikalständer ist als mittlere Fachweite $\frac{1}{2}$ (3,5 + 2,9) zu setzen.
2257	2257	2257	2257	2257		
1015	1015	1015	1015	928		
155,89	137,47	119,90	94,14	69,90		
0,086	0,026	— 0,026	— 0,086	— 0,154		
6,70	1,78	— 1,56	— 4,05			
10730	7550	3690	— 107			
40	40					
268	189					
10783	9412	4453	780	— 2940 *)	— 8077 *)	*) Negatives N bedeutet, dass die Streben entgegengesetzter Richtung (T) in Anspruch genommen sind.
1,194	1,22	1,194	1,109	0,683 *)	0,69 *)	
12875	11483	5317	865	1828 *)	5573 *)	
565	— 1150	— 7444	— 2240 **)	— 9179 **)		**) Nach Gleichung 281).

auf Zug in Anspruch genommen sind. — Die Zugkräfte erreichen ihre grössten Werthe für V_m und zwar wird der Zug desto grösser sein, je kleiner die Strebenkraft und je grösser die unmittelbar angehängte Belastung P_u ist; erhebliche Zugkräfte finden demgemäss nur an belasteten Knotenpunkten statt und namentlich beim Eintritt der variablen Last, bei welcher die untern Knotenpunkte (10) und (8) besonders kleine Diagonalenkräfte aufzunehmen haben; solche kleine Strebenkräfte finden bei gleichmässig vertheilter Maximallast in der Brückenmitte statt, wesshalb in Tabelle LIV. der Werth V_6 einen nicht ganz unbedeutenden Zug darstellt. (Dieser Zug beträgt circa 112 Kilogr. per Quadratcentimeter, während derselbe Vertikalständer nach Tabelle LVI. einen grössten Druck von 189 Kilogr. auszuhalten hat.)

Anmerk. Die vorliegende Brücke über den Colomak konnte nach denselben Formeln berechnet werden, wie die Kitzinger Mainbrücke (s. N°. 172.), doch ist das Rechnungsverfahren, abgesehen davon, dass bei der Colomakbrücke die untere Gurtung geradlinig, die Rechnung somit etwas vereinfacht ist, auch in andern Punkten verschieden. Bei Brücken, welche den parabolischen Trägern nahe stehen, sind die zunächst dem Auflager befindlichen Diagonalstreben bei dem Eintritt der Ueberlast am meisten in Anspruch genommen, wesshalb bei der Berechnung Bewegung der Last von A nach B angenommen ist; wenn die Brückenträger, wie bei der Colomakbrücke, dem Schwedler'schen System nachgebildet sind, so sind die Diagonalstreben beim Eintritt der Ueberlast wenig in Anspruch genommen (theoretisch soll die Strebenkraft hier Null sein); die grössten Strebenkräfte finden wie beim geraden Träger dann statt, wenn mehr als die Hälfte der Brücke belastet ist, wesshalb hier Bewegung der Last von B nach A zu Grunde gelegt ist. — Ein weiterer Unterschied in beiderlei Berechnungen ist dadurch bedingt, dass die Kitzinger Mainbrücke oberhalb, die Colomakbrücke unterhalb belastet ist.

Fig. 215.

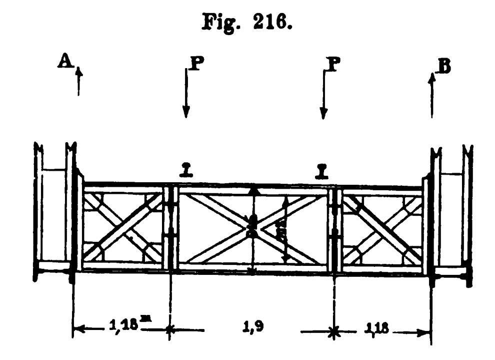


181. Die Querträger werden am meisten in Anspruch genommen bei der in Figur 215 skizzirten Stellung der Locomotive; es ergiebt sich als Locomotivbelastung des Querträgers II:

$$12300\left(1 + \frac{2,05}{3,50} + \frac{1,75}{3,50}\right) = 25600 \text{ Kilo.}$$

Hiezu das Eigengewicht der Fahrbahn mit 710 Kilo per Meter, somit auf 3,5ᵐ Länge . .	2485 „
Zusammen	28085 Kilo.

Fig. 216.



Diese Querträgerbelastung ist auf die beiden Lastpunkte gleichmässig zu vertheilen, wie obenstehende Figur 216 zeigt.

Hienach beträgt der Auflagerdruck A 14040 Kilo, somit:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = 14040 \times 1,18 = 16567 \text{ KM.}$$

Dieses Moment ist auf die ganze Länge des mittleren Faches gleich und misst der widerstehende Querschnitt der beiden Winkel nach Abzug der Nieten 40 □Centim., wonach die im Material herrschende Spannung nach Gleichung 35)

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} \mathfrak{B} \,.\, \Omega \,.\, \mathfrak{H}_0 \\ \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} \mathfrak{A} \,.\, \Omega \,.\, \mathfrak{H}_0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 284)$$

gefunden wird. — Indem wir in dieser Gleichung die Distanz $\mathfrak{H}_0$ der Gurtungsschwerpunkte $= 0,85^m$ und $\frac{\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}} = 1$ setzen (indem gleichmässige Spannung des ganzen Gurtungsquerschnitts angenommen wird), so erhalten wir:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \frac{16567}{40 \,.\, 0,85} = 487 \text{ Kilo.}$$

Die in den Lastpunkten wirkende Kraft P = Auflagerdruck A $= 14040^k$ muss mittelst zweier gedrückten Strebenwinkel und eines gezogenen Strebenbandes auf die Auflager (d. h. zur Vertikalen des Hauptträgers) übertragen werden; nennen wir N die

Summe der in den vorgenannten Streben wirkenden Kräfte, welche denselben Winkel φ mit dem Horizont bilden, so ist somit:

$$\Sigma N \sin \varphi = A = 14040 \text{ Kilo},$$

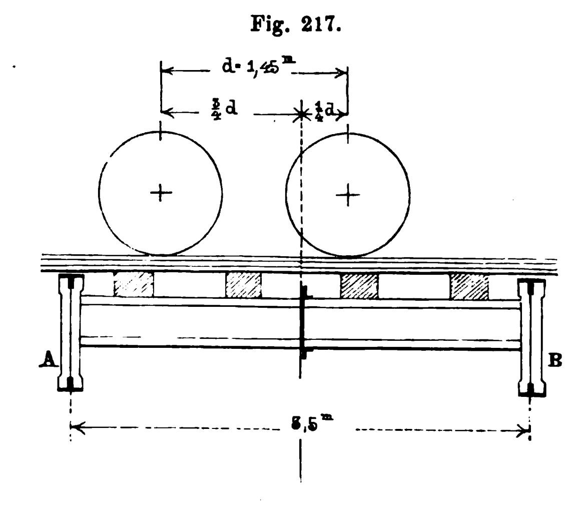
$$\Sigma N = \frac{14040}{0,65} = 23000 \text{ Kilo},$$

welche Kraft durch folgenden Querschnitt aufgenommen wird:

2 Winkel à 16,77, zusammen	33,54	□Cent.
1 Spannstrebe	12,90	„
Zusammen	46,44	□Cent.
Hievon ab 2 Nieten mit . .	5,0	„
Bleiben	41,44	□Cent.,

wonach eine grösste Spannung von $\frac{230000}{41,4} = 555$ Kilo vorhanden ist.

Fig. 217.



Die Schwellenträger werden durch die in Figur 217 dargestellte Stellung der Locomotive am meisten in Anspruch genommen; der Auflagerdruck B wird gefunden:

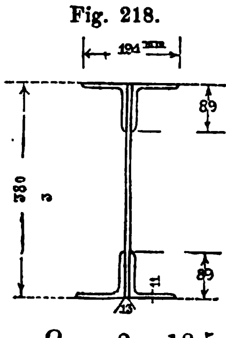
$$B = \frac{211 + 0,66}{3,50} \cdot 12300 = 9734^k,$$

woraus das Moment an der Querschwelle III. sich ergiebt:

$$\mathfrak{M}_3 = 9734 \times 1,39 = 12530 \text{ KM}.$$

Dieses Moment vertheilt sich auf zwei Schwellenträger, deren jeder somit ein grösstes Angriffsmoment von 6265 KM. auszuhalten hat.

Fig. 218.



Die Querschnittdimensionen der Schwellenträger sind in beistehender Figur 218 verzeichnet und findet sich nunmehr die grösste Spannung in der Gurtung, indem man in Gleichung 150) $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 = \frac{\mathfrak{H}_0}{2}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = H$ setzt, wonach:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \frac{\mathfrak{H}_0^2}{H} (\Omega + {}^1/_6\, \delta\, \mathfrak{H}_0) \quad . \quad . \quad . \quad 150)$$

In dieser Gleichung ist:

$\Omega = 2 \cdot 18{,}5$ . . . . =	37,0	□Cent.
Hievon ab 1 Niete	7,0	„
	30,0	□Cent.
Hiezu ${}^1/_6\, \delta\, \mathfrak{H}_0 = {}^1/_6\, (1{,}3 \times 3{,}3) =$	7,1	„
Zusammen	37,1	□Cent.

$\frac{\mathfrak{H}_0^2}{H} = 0{,}309^m$, somit:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \cdot \frac{1}{0{,}309} \cdot \frac{1}{37{,}1} = \frac{6265}{11{,}46} = 547 \text{ Kilo.}$$

182. Zwei Brücken nach gedoppeltem Schwedler'schen System sind die Weserbrücke bei Höxter (Spannweite 58,25^m) und die Elbbrücke bei Tangermünde (Hämerten) an der Berlin-Lehrte-Eisenbahn (Spannweite 65,9^m).

Erstere Brücke war in der Pariser Ausstellung vom Jahre 1867 durch Modell und Zeichnungen dargestellt und ist auch in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen (1867) veröffentlicht.

Die zweite dieser in mehrfacher Beziehung sehr ähnlichen Brücken ist durch Herrn J. W. Schwedler selbst, gleichfalls in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen (1868), veröffentlicht worden und soll als neueres Project der folgenden Darstellung zu Grunde gelegt werden.

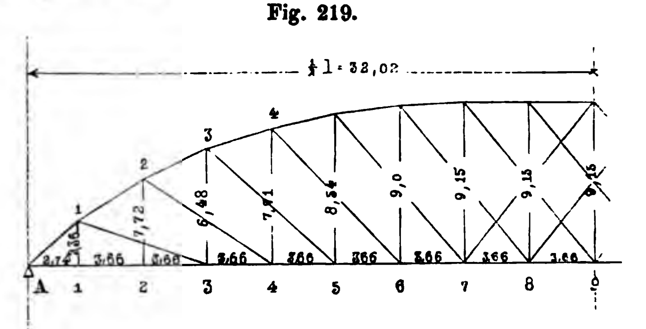
Anmerk. In den Figuren 219 — 222, sowie in der zugehörigen Berechnung sind in Folge einer Verwechslung des englischen mit dem preussischen Maasse durchweg die Längenangaben entsprechend zu niedrig; Tabelle LVII. bleibt aber richtig, ebenso die daran geknüpfte Betrachtung, weil in dem Ausdrucke der Gurtungskräfte q in demselben Maasse zu gross ist, als die Längen-Angaben zu klein sind, die übrigen Maasse sich aber in Nenner und Zähler ausgleichen.

Die allgemeine Anordnung der Brückenconstruction sowie einzelne Details sind auf Tafel XV. gegeben und ist hiezu zu bemerken, dass die Brücke für zwei Geleise bloss zwei Hauptträger erhalten hat und dass mit Ausnahme der Pfosten (1), (2), (16) und (17) an sämmtlichen Knotenpunkten obere Querverbindungen angebracht werden konnten; letztere fehlen nur an den Enden je auf circa 10 Meter Länge.

Die Längenmaasse der einzelnen Fachwerksglieder sind aus der folgenden Figur 219 ersichtlich, indem in Folge der symmetrischen Anlage des Hauptträgers die Aufzeichnung der einen Brückenhälfte zur Darstellung dieser Längenmaasse genügt.

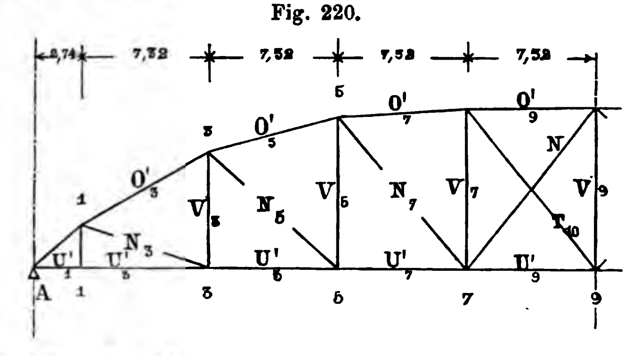
Die Berechnung dieser doppelten Systeme geschah nun in der Weise, dass man jedes der beiden Strebensysteme je mit den

Fig. 219.



betreffenden Lasten versehen abgesondert denkt, wobei die Gurtungen beiden Systemen gemeinsam sind, daher die obere polygonale Gurtung durch eine stetige Kurve ersetzt gedacht wird.

Fig. 220.



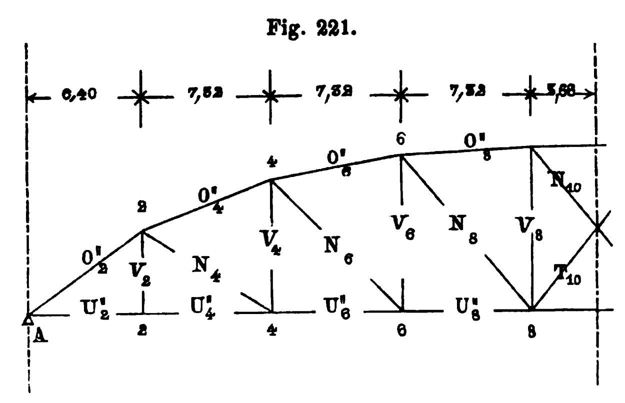
Die Figuren 220 und 221 stellen die beiderlei Systeme dar, welche wir als erstes, beziehungsweise zweites System bezeichnen; ersteres enthält die ungeraden, letzteres die geraden Knotenpunkte.

Jedes dieser beiden Systeme wird nun für sich wie ein einfaches System gerechnet und können wir für jedes dieser Systeme unsere Formeln 259) — 283) anwenden, sobald wir die Lasten je über einen Theil des Brückensystems gleichförmig vertheilt annehmen dürfen. — Diese Annahme giebt nun im ersten System bei Belastung der linken Seite für den Knotenpunkt (1) eine geringere Ueberlast, im vorliegenden Falle nur etwa $^2/_3$ der Belastung der anstossenden Knotenpunkte, während bei Vereinigung beider Systeme dieser Knotenpunkt nahezu die volle Belastung



der andern Punkte (hier wegen geringerer Endfelderlänge nur $^7/_8$ dieser Belastung) aufzunehmen hat; die bezügliche Differenz ist desshalb von geringerem Belange, weil die in den Endfeldern wirkenden Gewichte auf die Grösse der Angriffsmomente weniger Einfluss üben. (Uebrigens findet eine ähnliche Ungenauigkeit, nur

Fig. 221.



in ungekehrtem Sinne, dann statt, wenn man sämmtliche Knotenpunkte trotz der geringeren Länge der Endfelder gleich belastet annimmt.)

Wir werden die Gurtungskräfte des ersten Systems mit O' U', die des zweiten mit O'' U'' bezeichnen. Bei den Strebenkräften (in den Diagonalen sowohl als in den Vertikalen) ist eine solche Unterscheidung nicht nothwendig, da jede Strebe nur einem der beiden Systeme angehört.

Dagegen sind für die Angriffsmomente und Vertikalkräfte gleichfalls neue Bezeichnungen einzuführen. Hier haben wir die auf einen Träger bezogenen Werthe mit $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{V}'$ bezeichnet; werden letztere Grössen noch einmal und zwar auf jedes der einzelnen Systeme reduzirt, so bezeichnen wir die auf ein einzelnes System eines Trägers bezogenen Grössen mit $\mathfrak{M}''$ $\mathfrak{V}''$, so dass z. B. $\mathfrak{V}''_5$ nach Figur 220, $\mathfrak{V}''_6$ nach Figur 221 bestimmt wird, während für den ganzen Träger des doppelten Systems $\mathfrak{V}'_5 = (\mathfrak{V}''_5 + \mathfrak{V}''_6)$ wäre. — $\mathfrak{M}''_m$ ist beim doppelten System $= \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}'_m$, beim dreifachen System $\frac{1}{3}\,\mathfrak{M}'_m$.

183. Die Berechnung der vorliegenden Elbbrücke (siehe Tafel XV.) geschieht nach Vorstehendem in der Weise, dass für jedes der in Figur 220, beziehungsweise Figur 221, skizzirten Systeme die Fachwerkkräfte besonders gerechnet werden, wobei wir jedes der beiden Systeme mit der Hälfte sowohl des Eigengewichts als der variablen Last behaftet denken.

Das Verfahren bleibt im Uebrigen ganz dasselbe, wie solches in den Nummern **179.** — **181.** für die Colomakbrücke entwickelt

wurde und soll im Folgenden nur ausgeführt werden, in welcher Weise die **Gurtungskräfte** der beiden Systeme sich zusammensetzen.

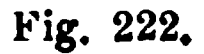
Herr Schwedler hat bei seiner Berechnung an jedem Knotenpunkte 200 Centner Eigengewicht und 280 Centner Verkehrsbelastung angenommen, so dass bei Anwendung von Metermaass $p = \frac{10000}{3,66} = 2732^k$, $k = \frac{14000}{3,66} = 3825^k$, und $q = p + k = 6557^k$ sich ergiebt. — Da die Brücke für zwei Geleise nur zwei Hauptträger erhalten hat, so folgt als grösstes Angriffsmoment in **der Trägermitte:**

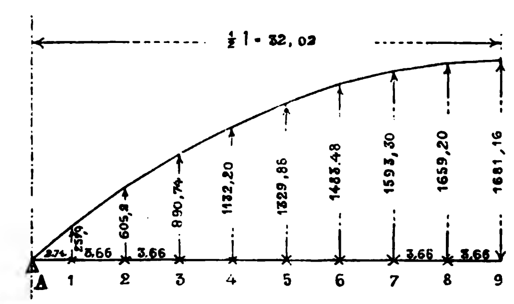
$$\text{Mmax}\ \mathfrak{M}' = \text{Mmax}\ \mathfrak{M} = \frac{q\,l^2}{8} = 3362{,}33^{\text{mts.}}$$

woraus:

$$\text{Mmax}\ \mathfrak{M}'' = 1681{,}16^{\text{mts.}}$$

Hieraus werden nun mittelst Gleichung 174) die einzelnen $\mathfrak{M}''$ sowohl für das erste, als für das zweite System bestimmt und ist das Resultat dieser Rechnung in beistehender Figur 222 zusammengestellt, worin die ungeraden $\mathfrak{M}''$ dem ersten Systeme, die geraden dem zweiten Systeme angehören.


Fig. 222.



Beim System Schwedler findet im Falle der gleichförmig vertheilten Maximallast $\max \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{H}}$ in der Brückenmitte statt, somit ist (weil die Diagonalen auf Zug construirt sind) für die linkseitige Brückenhälfte Figur 140 massgebend, wonach wir zur Bestimmung der **Gurtungskräfte** aus N⁰. **134.** entnehmen:

$$O_m \cos\beta = U_{m+2} \cos\gamma = \frac{\mathfrak{M}'_m}{\mathfrak{H}_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 186)$$

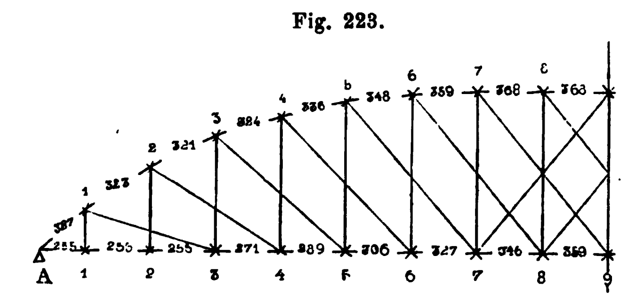
woraus wir für den vorliegenden Fall erhalten:

$$\left.\begin{aligned} O'_m \cos\beta &= U'_{m+2} = \frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m} \\ O''_{m-2} \cos\beta &= U''_m = \frac{\mathfrak{M}''_{m-2}}{\mathfrak{H}_{m-2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 285)$$

Nach diesen Formeln sind in der folgenden Tabelle LVII. die Gurtungskräfte zunächst für jedes der beiden Systeme und sodann durch Combination der demselben Gurtungsglied zugehörigen Theilkräfte die Gurtungskräfte für das gesammte doppelte System gebildet. — Die Tabelle LVII. bedarf nach vorstehender Entwicklung keiner besondern Erläuterung und soll nur bemerkt werden, dass die einzelnen $\mathfrak{M}''$ aus Figur 222, die cos β aus Figur 219 erhalten werden.

Herr Schwedler, welcher sämmtliche Knotenpunkte (auch die zunächst den Endfeldern) gleichförmig je mit 480 Centner belastet angenommen hat, erhielt die in der folgenden Fig. 223 zusammengestellten Resultate. (Vergl. Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, 1868, Seite 521—524.)

Fig. 223.



Eine genauere Berechnung, welche unter Voraussetzung ganz gleichförmiger Belastung der ganzen Brücke angestellt würde, müsste etwa das Mittel aus den Resultaten der Tabelle LVII. und der Figur 223 ergeben. (Diesen genaueren Werthen würde man durch Anwendung der Formeln 200) und 201) sehr nahe kommen, nach dem Verfahren, welches für den geradlinigen Träger der Ingolstadter Donaubrücke in vereinfachter Weise angewendet ist.)

184. Ueber die Construction der Hauptträger, welche aus Tafel XV. ersichtlich ist, sagt Herr Schwedler: „Die obere Gurtung besteht aus 16 Winkeleisen, deren vertikale Schenkel sämmtlich 5 Zoll (127^{mm}) lang sind (siehe Figur 224), während die von Fach zu Fach stattfindende Aenderung des Querschnitts durch Variation der abstehenden Schenkel erreicht wird. Alle Winkeleisen haben die Länge von zwei Fachen und sind in den Fusspunkten nach einem Radius von 14 Fuss (4¼ M.) gebogen. Die Stösse sind so angeordnet, dass in jedem Knotenpunkt 8 Winkeleisen durchgehen und 8 gestossen werden und zwar in der Art, dass die gestossenen Winkeleisen über Kreuz zu liegen kommen, so dass die vollständige Deckung des Stosses ohne Zuhilfenahme äusserer Deckplatten oder

Tabelle

Elbbrücke bei Tangermünde.

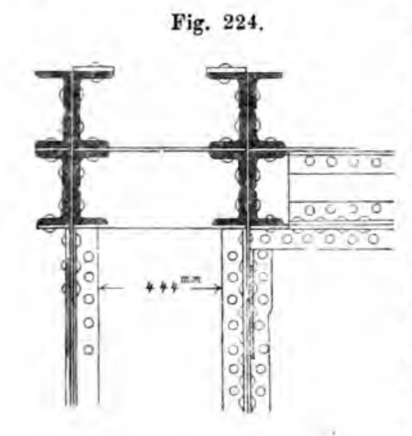
Index m =	1	2	3	4
Erstes System: $\mathfrak{M}''_m$	257,88ts		890,74	
$\mathfrak{H}_m$	2,36m		6,48	
$U' = \frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m}$	116,89ts		137,36	
$\cos \beta_m$	0,758		0,901	
$O'_m = \frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m} \cdot \frac{1}{\cos \beta}$	154,21ts		152,45	
$U'_m = \frac{\mathfrak{M}''_{m-2}}{\mathfrak{H}_{m-2}}$	116,89ts *)		116,89	
Zweites System: $\mathfrak{M}''_m$		605,20ts		1132,20
$\mathfrak{H}_m$		4,72m		7,71
$U''_m = \frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m}$		128,22ts		146,85
$\cos \beta_m$		0,840		0,947
$O''_m = \frac{\mathfrak{M}''_m}{\mathfrak{H}_m} \cdot \frac{1}{\cos \beta}$		152,64		155,07
$U''_m = \frac{\mathfrak{M}''_{m-2}}{\mathfrak{H}_{m-2}}$		128,22*)		128,22
Beide Systeme zusammen: $O_m = O'_m + O''_{m+1}$ oder $= O''_m + O'_{m+1}$	306,85ts	305,09	307,52	314,79
$U_m = U'_m + U''_{m+1}$ oder $= U''_m + U'_{m+1}$	245,11ts	254,11	245,11	265,58

LVII.

Berechnung der Gurtungskräfte.

5	6	7	8	9	Bemerkungen.
1329,88		1593,8		1681,16	
8,54		9,15		9,15	
155,73		174,13		183,72	
0,975		1,0		1,00	
159,72		174,13		183,72	
137,36		155,73		174,13	*) $U_1 = U_3$.
	1483,49		1659,20		
	9,0		9,15		
	164,83		181,33		
	0,992		1,00		
	166,06		181,33		
	146,85		164,83		*) $U_2 = U_4$.
325,78	340,19	355,46	365,05	365,05 *)	*) $O''_{10} = O''_8$.
284,21	302,58	320,56	338,96	355,48*)	*) $U''_{10} = O''_8$.

Fig. 224.



Deckwinkel durch die zwischen den Schenkeln liegenden Platten von 1/2 Zoll (12,5mm) Stärke stattfinden kann. Die vertikalen Stossplatten dienen in ihrer Verlängerung zugleich zum Anschluss der Vertikalen und Diagonalen.

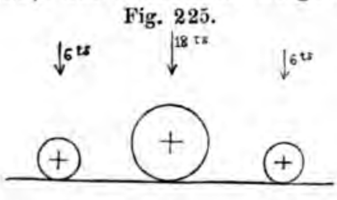
„An den Eckpunkten sind beide Gurtungshälften durch horizontale Blechplatten verbunden, ausserdem verbinden zwischen denselben vertikale Vergitterungen die Winkeleisen jeder Gruppe, horizontale Vergitterungen die Winkeleisen beider Gruppen.

„Die Vertikalen werden gleichmässig aus je 4 Winkeleisen von 4 Zoll (101mm) Seite, 1/2 Zoll (12,5mm) Stärke construirt, welche in Verbindung mit der zwischen liegenden Blechplatte von 3/8 Zoll (11mm) Stärke zugleich die Aussteifung der obern Gurtung bewirken.“

Bei der Berechnung der Q u e r t r ä g e r, welche als Blechwandträger construirt und in 4 Punkten durch die Schwellenträger belastet werden, wurde als Maximallast eine dreiaxige Locomotive von 12 Fuss (3,66m) Radstand und 260 Centner oder 13 Tons Achsenbelastung angenommen.

Eigenthümlich ist die Construction der S c h w e l l e n t r ä g e r (zu vergleichen Tafel XV.), welche ein einfaches symmetrisches Fachwerk bilden und wobei sämmtliche Streben, welche alle auf Druck, beziehungsweise Druck und Zug in Anspruch genommen sind, aus Flacheisen hergestellt sind; es ist diess in Folge der geringen freien Länge wohl zulässig, doch ist zu bemerken, dass in der Mitte der Schwellenträger eine Querabsteifung mit vertikalen Winkeleisen angebracht wurde.

Fig. 225.



Bei der Berechnung der Schwellenträger wurde eine andere Locomotive zu Grunde gelegt, welche bei geringerem Totalgewicht eine mit 360 Centner belastete Triebaxe und nur 9 Fuss (2,82m) Radstand hat (s. Fig. 225).

Das Gewicht der zweigeleisigen Brücke beträgt für eine Oeffnung von 65,90m Stützweite (s. Anmerkung in N°. **182**):

Fahrbahntafel		58,1 to.
Hauptträger:		
Gurtungen	115,20	
Streben	38,30	
Obere Querverbindung und Wirkungen	17,70	
		181,30
Zusammen		239,4

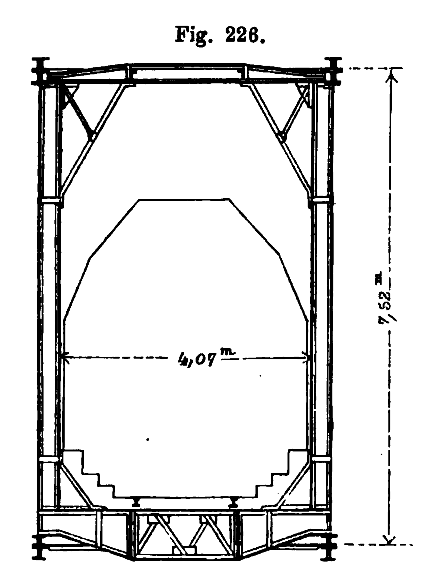
woraus per Meter und Geleise:

$$p' = 20{,}91 + 440 = 1817^k$$

In der statischen Berechnung wurde das Totaleigengewicht $p = 2660^k$ angenommen, welche Belastung durch Hinzufügung des Gewichts von Oberbau und Bedielung nicht vollständig erreicht werden wird.

Als Maximalspannung wurden 100 Centner per Quadratzoll oder 731 Kilo per Quadratcentimeter in den Gurtungen angenommen.

Fig. 226.

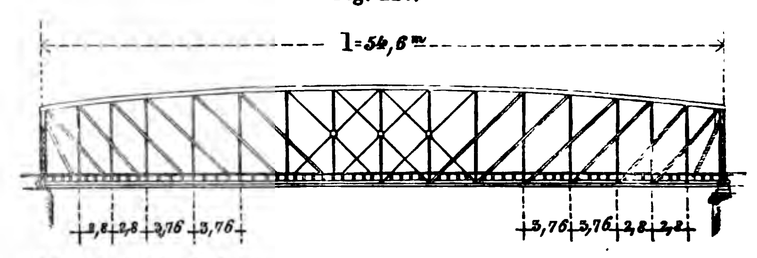


185. Die Elbbrücke bei Meissen hat neben einer Reihe kleinerer Oeffnungen drei grössere von je $21{,}6^m$ Spannweite, deren Eisenconstruction von Herrn J. W. Schwedler projectirt und in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, Jahrgang 1868, veröffentlicht worden ist. — Jede dieser Oeffnungen ist für sich mit zwei freiliegenden Trägern überspannt, deren obere Gurtungen sanft gekrümmt sind, der Art, dass die Constructionshöhe in der Brückenmitte nahezu $^1/_7$ der Spannweite beträgt, während an den Auflagern gerade die nothwendige Höhe zum Anbringen einer obern Querverbindung verblieben ist, wie diess in beistehenden Figuren 226 und 227 dargestellt ist.

Die vorliegende Construction bildet einen Uebergang vom geraden Träger zum gekrümmten; die Wirkungsweise der Streben ist jedoch übereinstimmend mit der bei geraden Trägern stattfindenden und wird daher eine solche Brücke ganz ähnlich dem doppelten unsymmetrischen System behandelt, dessen Berechnungsweise in den N°. **159**. und **160**. für die Ingolstadter Donaubrücke entwickelt wurde, mit dem Unterschiede jedoch, dass anstatt der Glei-

chungen 226) — 230) mit Rücksicht auf die Krümmung der obern Gurtung die Gleichungen 195)—197ª), 200) und 201) angewendet werden.

Fig. 227.



Als Verkehrsbelastung wurden 2600 Pfund per laufenden Fuss oder 4142 Kilo per Meter, als Eigengewicht 1400 Pfund per laufenden Fuss oder 2230 Kilo per Meter angenommen; das berechnete Eisengewicht beträgt:

Fahrbahn		18,9 t.
Hauptträger:		
Gurtungen	39,0	
Streben	32,9	
Obere Querverbindung und Windstreben .	16,4	
		88,7 „
Zusammen		107,6 t.

woraus per Meter und Geleise bei 54,6m Stützweite folgt:

$$p' = 29{,}7\,l + 346 = 1970 \text{ Kilo.}$$

Hiebei wurde wie bei dem vorhergehenden Beispiel eine Maximalbelastung von 100 Centner per Quadratzoll, ferner für die Fahrbahntafel eine Locomotive angenommen, welche ein Triebaxengewicht von 360 Centner und zwei Laufaxen von je 120 Centner bei einem Radstand von 9′ oder 2,82m zeigt (s. Fig. 225).

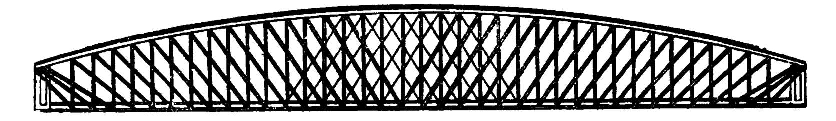
Anmerk. Herr Schwedler hat die in Figur 225 skizzirte Locomotive mehrfach bei seinen Berechnungen angewendet, indem diese Gewichtsvertheilung bei mässiger Belastung der Hauptträger die Fahrbahntafel verhältnissmässig stark in Anspruch nimmt. — Hiedurch erhält man für die der Einwirkung der Locomotive zunächst ausgesetzten Theile ein gewisses Uebermaass an Stärke, welches sonst durch Reduction der zulässigen Maximalspannung erreicht wird. (Zu vergleichen auch N°. **39**. und N°. **154**.)

Die Elbbrücke bei Meissen zeigt die Eigenthümlichkeit, dass die Fachweite nicht durchaus constant ist, sondern in den drei Endfeldern jeder Brückenhälfte nur ³/₄ der normalen Fachweite beträgt; hiedurch ist eine günstigere (steilere) Stellung der Endstreben erreicht, während die Ansicht der Brücke sich sehr gefällig darstellt; die Schwellenträger sind in den kürzeren Fachen entsprechend leichter construirt.



186. Eine der vorstehend beschriebenen ähnliche Construction ist in Holland in sehr grossem Maassstab angewendet worden für die Brücke über den Leck bei Kuilenburg.

Fig. 228.



Die Brücke hat eine Spannweite von 150^m, eine grösste Höhe von 20^m und hiebei, wie Figur 228 zeigt, ein dreifaches, unsymmetrisches Fachwerk erhalten.

Als Metallgewicht der zweigeleisigen Brücke sind vorgesehen:

Fahrbahntafel		$107{,}0^{ts.}$
Hauptträger:		
Gurtungen	1178,0	
Streben, d. h. Diagonalen und Vertikalen	570,0	
Obere Querverbindungen und Windkreuze	245,0	
		$1993{,}0^{ts.}$
Zusammen		$2100{,}0^{ts.}$

woraus per Meter oder Geleise bei 150^m Stützweite folgt:

$$p' = 43{,}2\,l + 357 = 7000 \text{ Kilo.}$$

Es ist bei dieser Brücke für die Fahrbahntafel und für die Windverstrebung fast ausschliesslich Gussstahl, für die Hauptträger durchaus Walzeisen angewendet; wir haben schon in N°. **38.** aufmerksam gemacht, dass die Anwendung des Gussstahls gegenwärtig noch grosse Vorsicht erfordere; es scheint auch, dass man aus diesem Grunde den Gussstahl für die Hauptconstruction nicht verwenden wollte; wenn man jedoch den Gussstahl bei solchen grossen Brücken namentlich desshalb anwenden will, um die Construction leichter zu machen, so wird dieser Zweck durch das hier beobachtete Verfahren nur sehr unvollständig erreicht, indem die Fahrbahn und die Windverstrebung nur einen geringen Theil des Totalgewichtes ausmachen.

Sechster Abschnitt.

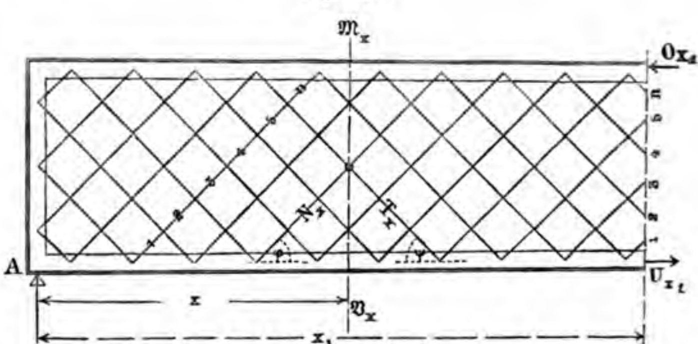
Die Gitterbrücken.

§. 19. Theorie der Gitterbrücken.

187. Die Gitterträger könnten den mehrfach symmetrischen Fachwerken zugezählt werden und würden auch die dort gegebenen Regeln in manchen Fällen sich anwenden lassen; es zeigen jedoch die Gitterbrücken mehrere Eigenthümlichkeiten, welche einestheils eine Vereinfachung, anderntheils eine weitere Ausbildung der Fachwerktheorie erheischen.

Indem nämlich bei den Gitterträgern die schiefen Streben, welche hier Gitterstäbe genannt werden, sich mit den meist gleichartig construirten Streben der entgegengesetzten Richtung stets mehrfach kreuzen (s. Figur 229), entstehen die Maschen

Fig. 229.

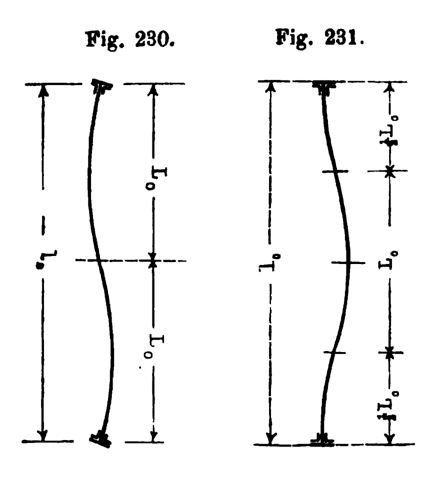


des Gitterwerks, welche netzartig an einander gereiht gleich einer vollen Wand wirken.

Indem nun die einzelnen Stäbe, welche je für sich nicht steif genug wären, um einen erheblichen Strebendruck aufnehmen zu können, durch ihre gegenseitige Verbindung sich unterstützen, so wird eine Ausbiegung der Stäbe meist nur unter entsprechender

Krümmung der ganzen Wand stattfinden können. — Die Figuren 230 und 231 stellen dar, in welcher Weise die Krümmung einer ganzen Wand gedacht werden kann; wenn man mit l_0 deren ganze Höhe, mit L_0 die einer einfachen Biegung entsprechende freie Höhe bezeichnet, so ist in den durch genannte Figuren dargestellten Fällen $l_0 = 2L_0$ zu setzen; die Länge der Gitterstäbe, welche eine entsprechende Biegung erleiden, ist in Folge der schiefen Lage derselben eine grössere und soll durch $l = 2L$ bezeichnet werden, wonach also $L = \frac{1}{2} l$ die in Formel 169) einzuführende freie Länge des Stabs bedeutet, wie durch die folgende Gleichung erläutert ist:

Fig. 230. Fig. 231.

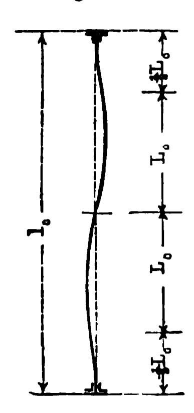


$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{\Theta}\right) = B_m \left(1 + K \frac{\omega l^2}{4\Theta}\right) \quad . \quad . \quad 285)$$

Anmerk. Es ist angenommen, dass das Trägheitsmoment senkrecht zur Wandfläche berechnet wird, indem in der Ebene der Gitterwand die einzelnen Stäbe, welche an den Kreuzungspunkten sich gegenseitig stützen, meist steif genug sind; die Biegung in der Ebene der Gitterwand wird in §. 22 besprochen.

Wenn ein Gitterwerk durch besondere Vertikalständer ausgesteift ist, deren Abstand mit d_0 bezeichnet sei, so ist anstatt der ganzen Stablänge l die Grösse $\frac{1}{\cos\varphi} d_0$ einzusetzen, wobei φ den Winkel des Gitterstabs mit dem Horizont bezeichnet.

Fig. 232.



Bei hohen Wänden, welche oberhalb und unterhalb sehr kräftig verspannt sind, so dass die Tangenten der Biegungskurve zunächst den Gurtungen vertikal bleiben, kann die Krümmung des ganzen Gitters nach Figur 232) gedacht werden, wonach $L_0 = \frac{1}{3} l_0$ gesetzt werden dürfte; es ist jedoch, wie bemerkt, eine sehr tüchtige Verspannung nothwendig, wenn die Voraussetzung der Fig. 232 zutreffen soll.

In denjenigen Fällen, wo die gezogenen Gitterstäbe dieselbe Querschnittform haben, wie die gedrückten, werden diese ersteren gleichfalls einer seitlichen Biegung entgegenwirken, wonach wir in vorstehender Gleichung 285) das der Biegung widerstehende Trägheitsmoment Θ verdoppeln dürfen; für diese Fälle ist daher

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega L^2}{2\Theta}\right) = \mathfrak{B}_m \left(1 + K \frac{\omega l^2}{8\Theta}\right) \quad . \quad . \quad 286)$$

Es lässt sich nicht verkennen, dass in dieser Formel manche Willkürlichkeiten sich befinden; einmal kann anstatt den in den Figuren 230 und 231 dargestellten Biegungskurven irgend eine anderweitige Krümmung stattfinden, und geben genannte Fälle nur die Mittelwerthe der in Rücksicht zu nehmenden Möglichkeiten; sodann ist nicht nachgewiesen, dass die gezogenen Stäbe sich in ganz gleichem Maasse wie die gedrückten Stäbe der Biegung widersetzen, selbst in denjenigen Fällen, wo die Querschnitte ganz gleichwerthig sind. — Anderseits wird zuzugeben sein, dass Formel 286) den in Frage kommenden Momenten in entsprechender Weise Rechnung trägt, und dass die Formeln 285) und 286) wesentlich an Genauigkeit gewinnen, je mehr sich der Bruch

$$\frac{1}{1 + K \frac{\omega l^2}{8\Theta}}$$ der Einheit nähert, was bei einer guten Construction angestrebt werden muss.

Anmerkung. Bei dem wesentlichen Unterschiede, welcher zwischen Gleichung 286) und 169) stattfindet, ergiebt sich, dass bei mehrfachen Fachwerken, deren Streben an den Kreuzungspunkten fest verbunden sind, eine Modification der Gleichung 169) nothwendig werden kann; zunächst wird man als freie Länge L nur einen bestimmten Theil der Strebenlänge z. B. $^3/_4$ oder $^2/_3$ annehmen (was übrigens bei Gleichung 169) durch den Ausdruck „freie Länge" bereits vorausgesetzt ist); ausserdem wirken aber bei solchen Constructionen, wo auch die gezogenen Streben steif construirt sind, diese letzteren gleichfalls der Biegung der gedrückten Streben entgegen, sofern sie mit letzteren an den Kreuzungspunkten verbunden sind.

188. Bei Anwendung der Formeln über mehrfach symmetrische Fachwerke darf man beim Gitterwerk mit Rücksicht auf die geringere Distanz der Knotenpunkte einen stetigen Wechsel der Gurtungskräfte annehmen (während derselbe beim Fachwerk an den Knotenpunkten sprungweise geschieht); man kann also den Vertikalschnitt, mittelst dessen man nach Anleitung von N°. **140.** die Gurtungskräfte bestimmt, in ganz beliebigen Längenabstand legen und denken wir, in Rücksicht auf die gleichzeitige Bestimmung der Gitterstabkräfte, den Schnitt x je durch die Mitte einer Strebe N_x gelegt; wir nennen, wie theilweise durch die folgende Fig. 233 erläutert ist:

$\mathfrak{M}_x$ das Angriffsmoment im Abstande x vom Coordinatenursprung, welcher im Allgemeinen im Auflager A angenommen wird;
$\mathfrak{B}_x$ die Vertikalkraft im Abstande x,
O_x die Kraft in der obern Gurtung im Abstande x,
β_x den zugehörigen Winkel gegen den Horizont,
U_x die Kraft in der untern Gurtung im Abstande x,
γ_x den zugehörigen Winkel gegen den Horizont,
N_x die Kraft in demjenigen Gitterstabe, dessen Mitte durch den Vertikalschnitt x getroffen wird,

φ_x den zugehörigen Neigungswinkel,

Σ_x N sin φ die Summe der vertikalen Composanten sämmtlicher durch den Schnitt x getroffenen, mit dem Gitterstab N_x gleichgerichteten Streben,

Σ_x T sin ψ die Summe der vertikalen Composanten der durch den Schnitt x getroffenen entgegengesetzten gerichteten Stäbe.

Ferner nennen wir n die Anzahl der durch denselben Vertikalschnitt x getroffenen Gitterstäbe, oder auch die Zahl der Fragmente, in welche ein Stab durch die Kreuzungen mit Stäben der entgegengesetzten Richtung abgetheilt wird:

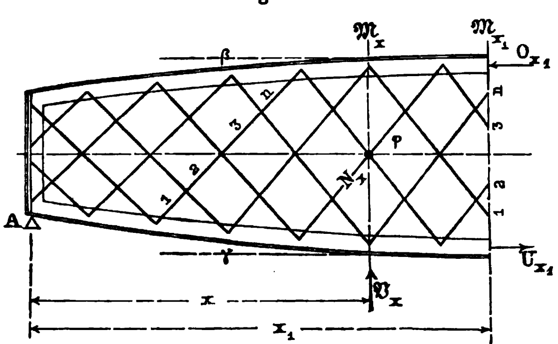
$\mathfrak{H}_x$ die Distanz der Gurtungsschwerpunkte oder geometrische Trägerhöhe im Abstande x,

Ω den Querschnitt der belasteten Gurtung,

ω den Querschnitt des belasteten Gitterstabs.

Unter Annahme vorstehender Bezeichnungen erhalten wir:

Fig. 233.



Für die **Gurtungen** eines Gitterwerks von beliebiger Gurtungsform nach Gleichung 198) und 199):

$$O_x \cos\beta = U_x \cos\gamma = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 287)$$

Für die **Gitterstäbe** nach Gleichung 196):

$$N_x \sin\varphi = \frac{1}{n}\left(\mathfrak{V}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\right) \quad 288)$$

Die Spannungen und Pressungen werden durch die Gleichungen 166)—168), sowie 285) beziehungsweise 286) gefunden, wobei letztere Gleichung dann in Anwendung kommt, wenn die entgegengesetzt gerichteten Stäbe von gleicher Querschnittsform sind. Die Gleichungen 287) und 288) vereinfachen sich wesentlich, wenn die Gurtungen, wie diess bei Gitterbrücken meist der Fall ist, geradlinig sind; für diesen Fall erhalten wir:

Für die Gurtungen:

$$O_x = U_x = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 289)$$

Für die Gitterstäbe:

$$N_x \sin\varphi = \frac{1}{n}\,\mathfrak{V}'_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 290)$$

189. Zur Aussteifung der Gitterwände werden, ähnlich wie bei Trägern mit vollen Wandungen, sehr häufig Vertikalständer nothwendig, welche das Ausbauchen der Gitterwände verhindern sollen; es ist schon oben bei Gleichung 285) bemerkt, dass durch diese Vertikalständer die freie Länge der Stäbe wesentlich reduzirt werden kann, so dass, wenn anders die Distanz der Vertikalständer und die Dicke der Gitterstäbe entsprechend gewählt wird, der Bruch $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ sich der Einheit ziemlich nähern kann; oder aber könnten die gedrückten Stäbe eine etwas grössere Stärke erhalten, so dass wenigstens der Zug $\mathfrak{A}$ im gezogenen Stab der grössten Pressung $\mathfrak{B}$ im symmetrisch gelegenen gedrückten Stabe ziemlich gleich ist. — In beiden vorerwähnten Fällen dienen die Vertikalständer nur zur Aussteifung und zur Uebertragung der Fahrbahngewichte.

Häufig aber werden die gedrückten Stäbe trotz der Hinzufügung von Vertikalständern eine sehr starke Pressung erleiden, welche nach Gleichung 286) oder nach 285) berechnet, die mittlere Pressung $\mathfrak{B}$, sowie insbesondere die grösste Spannung $\mathfrak{A}$ der entsprechenden gezogenen Stäbe wesentlich überschreiten würde, wenn sich diesem nicht der geometrische Zusammenhang des durch die Vertikalständer versteiften Trägers entgegenstellen würden; derjenige Druck, welcher von den gedrückten Stäben in Folge der Biegung derselben nicht aufgenommen werden kann, geht in die Vertikalständer über und wir haben ein combinirtes System vor uns, welches in den Nummern **142.** und **143.** behandelt ist.

Bei combinirten Gittersystemen findet die Vereinfachung statt, dass wir die Gurtungskräfte wie bei allen Gitterwerken nach vorstehender Gleich. 287) bestimmen, während wir für die Gitterstäbe nach Analogie der Gleich. 184) durch Summirung der Kräftecomposanten unter Anwendung der obigen Bezeichnungen erhalten:

$$\Sigma_x\, N \sin\varphi + \Sigma_x\, T \sin\psi = \mathfrak{V}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma) \quad . \quad 191)$$

Ueber das gegenseitige Verhältniss der Kräfte N und T sind die Gleichungen 202) und 203) maassgebend; nennen wir $\Sigma\omega_z$ die Summe der Querschnitte der im Schnitt x befindlichen gezogenen Gitterstäbe, $\Sigma\omega_t$ dessgleichen die Summe der gedrückten Stäbe, so ist nach Gleichung 202) unter Anwendnng von Gleichung 286):

$$\frac{\Sigma_x N}{\Sigma \omega_n} = \frac{\Sigma_x T}{\Sigma \omega_t}\left(1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 292)$$

Indem wir bemerken, dass bei Gitterwerken die symmetrisch gelegenen Gitterstäbe verschiedener Richtung (ganz oder nahezu) gleiche Neigungswinkel haben, so erhalten wir aus Gleichung 292).

$$\Sigma_x N \sin\varphi = \Sigma_x T \sin\psi \left(1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}\right) \frac{\Sigma \omega_n}{\Sigma \omega_t} \quad . \quad . \quad 293)$$

wonach sowohl $\Sigma_x N \sin\varphi$ als $\Sigma_x T \sin\psi$ aus Gleichung 291) bestimmt werden können.

Der Gleichung 202) und ebenso den Gleichungen 292) und 293) liegt die Voraussetzung zu Grund, dass die Spannung $\mathfrak{A}$ der gezogenen Stäbe gleich der grössten Pressung $\mathfrak{B}$ in den gepressten Stäben sei; man findet daher, die Spannung $\mathfrak{A}$ = Pressung $\mathfrak{B}$, indem man den Querschnitt der gepressten Stäbe durch den Werth $\left(1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}\right)$ dividirt und die Kräftesumme $\Sigma_x N + \Sigma_x T$ auf den reduzirten Querschnitt

$$\Sigma \omega_n + \Sigma \omega_t \frac{1}{\left(1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}\right)}$$

gleichförmig vertheilt denkt. — Die so gefundene Spannung giebt für die Gesammtheit der vom Schnitt x getroffenen Stäbe nur einen Mittelwerth, sie giebt aber den möglichst genauen Werth für denjenigen Stab, dessen Mitte durch den Schnitt x getroffen wird; hienach ist:

$$N_x : \omega_n = \left\{ \Sigma_x N + \Sigma_x T \right\} : \left\{ \Sigma \omega_n + \Sigma \omega_t \frac{1}{1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}} \right\} \quad . \quad . \quad 294)$$

Die Combination der Gleichungen 291) und 294) giebt schliesslich, indem wir für $\frac{1}{1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}}$ seinen Werth $\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$ einsetzen:

$$N_x \sin\varphi = \frac{\omega_n}{\Sigma \omega_n + \Sigma \omega_t \left(\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}\right)} \left\{ \mathfrak{V}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} (\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma) \right\} \quad 295)$$

Wenn die gedrückten Stäbe in einem durch den Coefficienten c ausgedrückten Verhältnisse stärker sind als die gezogenen Stäbe, im Uebrigen aber ein Wechsel der Stäbe gegen das Auflager hin nur in stetiger Weise geschehend angenommen ist, so haben wir

$$\Sigma \omega_n + \Sigma \omega_t \left(\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}\right) = \frac{n\, \omega_n}{2} \cdot \frac{\mathfrak{B} + c\, \mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}} \quad . \quad 296)$$

und folgt nunmehr aus Gleichung 295)

$$N_x \sin\varphi = \frac{1}{n}\left(\mathfrak{V}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\right)\frac{2\,\mathfrak{V}}{\mathfrak{V} + c\,\mathfrak{V}_m} \quad . \quad 297)$$

Nach den angegebenen Voraussetzungen muss je ein gezogener und ein gedrückter Stab (welche sich annähernd im Abstand x kreuzen), zusammen die Kraft $\frac{2}{n} \cdot \mathfrak{V}'_x$ aufnehmen; wir haben daher für die gedrückten Stäbe:

$$T_x \sin\psi = \frac{1}{n}\left(\mathfrak{V}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta)\right)\frac{2\,c\,\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V} + c\,\mathfrak{V}_m} \quad 297)$$

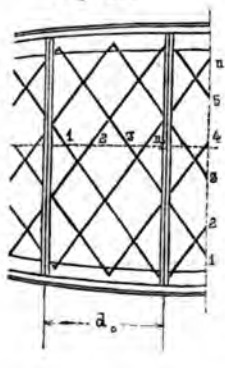
Anmerk. In den Gleichungen 292)—297) bedeutet N Zug, T Druck; falls nun die Gitterstäbe N gedrückt, die Gitterstäbe T gezogen wären, so müssten in den Gleichungen 292) — 297) die Grössen N und φ mit den Grössen T und ψ gegenseitig vertauscht werden.

Dadurch, dass die gezogenen Stäbe mehr Strebenkraft aufnehmen als die gedrückten Stäbe, werden die Gurtungskräfte modifizirt und zwar wird die gedrückte Gurtung stärker, die gezogene Gurtung weniger in Anspruch genommen, indem die Distanz der horizontalen Composanten der Strebenkräfte $\Sigma\, N \cos\varphi - \Sigma\, T \cos\psi$ durch die Differenz der Gurtungskräfte (beziehungsweise der horizontalen Composanten derselben) aufgenommen werden muss. — Diese Modification der Gurtungskräfte ist jedoch nicht sehr bedeutend, so lange die Grösse $\frac{c\,\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}}$ nicht zu sehr von der Einheit abweicht.

Anderseits muss die Differenz der vertikalen Composanten der Strebenkräfte durch die Vertikalständer aufgenommen werden, indem wir uns jedes combinirte System aus 2 unsymmetrischen Systemen von entgegengesetzter Strebenrichtung zusammengesetzt denken können.

Nennen wir

Fig. 234.



V_x die Kraft in einem Vertikalständer zunächst dem Schnitte x,

d_0 die Distanz zweier Vertikalständer,

n die Zahl der durch den Vertikalschnitt x getroffenen Gitterstärke,

n′ die Zahl durch einen Horizontalschnitt zwischen 2 Vertikalständern, d. h. auf die Länge d_0 getroffenen Gitterstäbe,

so ist, wenn wir uns einen Schnitt x unmittelbar am betrachteten Vertikalständer angebracht denken, welcher Schnitt zugleich den mittleren Abstand (Abscisse) der Gitterstabmittel bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{n'}{n}\left(N_x \sin\varphi - T_x \sin\varphi\right) \\ V_x &= \frac{n'}{n}\left(\mathfrak{B}'_x - \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x}(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\right)\frac{\mathfrak{B} - c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 298)$$

Das Verhältniss $\frac{n'}{n}$ wird im Allgemeinen durch das Verhältniss $d_0 : \mathfrak{H}$ ausgedrückt sein. — Bei den Vertikalständern ist zu Bestimmung des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ Gleichung 169) anzuwenden; es ist hiebei die freie Länge L meist gleich der Trägerhöhe zu setzen, indem die Vertikalen zwar an den Enden theilweise eingespannt sind, dagegen aber von den Gitterstäben seitliche, auf Biegung wirkende Kräfte empfangen.

Die Gleichungen 296)—298) ebenso, wie die für alle Gitterwerke gültige Gleichung 287) vereinfachen sich für geradlinig horizontal begränzte Träger mit Vertikalständern wie folgt:

$$O_x = U_x = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 299)$$

$$N_x \sin\varphi = \frac{2}{n}\,\mathfrak{B}'_x\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad . \; . \; . \; 300)$$

$$T_x \sin\varphi = \frac{2}{n}\,\mathfrak{B}'_x\,\frac{c\,\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad . \; . \; . \; 301)$$

$$V_x = \frac{n'}{n}\,\mathfrak{B}'_x\,\frac{\mathfrak{B} - c\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B} + c\mathfrak{B}_m} \quad . \; . \; . \; . \; 302)$$

Hiebei ist das Verhältniss $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ durch Gleichung 286) gegeben, in welcher Gleichung $l = d_0 : \cos\varphi$ zu setzen ist. — Es ist die nach Gleichung 300) gefundene Gitterstabspannung $\mathfrak{A}$ gleich der nach Gleichung 301) erhaltenen grössten Gitterstabpressung $\mathfrak{B}$, vorausgesetzt, dass die Vertikalständer stark genug sind, um die nach Gleichung 302) berechnete Kraft V aufnehmen zu können, ohne selbst eine höhere als die besagte Pressung $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ zu erleiden.

190. Die Gitterbrücken theilen wir in folgende Klassen ein:

1) Gitterbrücken mit beiderseits gleichartigen Streben, ohne Anwendung von Vertikalständern.

Diese Brücken erhalten meist steife Gitterstäbe, aus T- oder Winkeleisen oder auch aus anderweitig geformtem Façon-Eisen bestehend.

2) Gitterbrücken mit flachen Stäben unter Anwendung von Vertikalständern.

Die Berechnung hat nach den in N°. **189.** gegebenen Regeln zu geschehen.

3) Gitterbrücken mit steifen Streben und flachen Zugbändern.

Diese Brücken bilden den Uebergang zu den Fachwerken und unterscheiden sich von letztern hauptsächlich dadurch, dass bei erstern ein stetiger Wechsel der Gurtungskraft (Gleichung 287) angenommen wird; zur Bestimmung der freien Länge der Gitterstäbe wird Gleichung 285) angewendet (welche, wie oben bemerkt, nach Umständen auch für Fachwerke gültig ist).

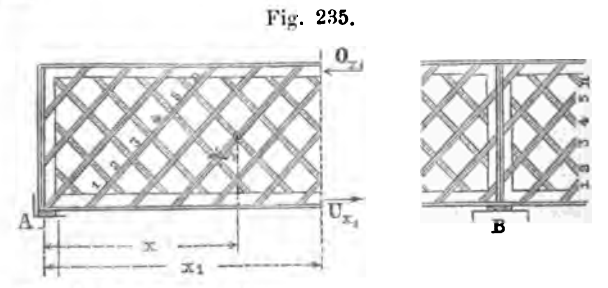
Man wird wohl alle irgend angewendeten Gitterwerke in eine dieser drei Klassen einreihen können. — Bei der dritten Klasse ist kein Unterschied gemacht, ob Vertikalständer angewendet werden oder nicht, weil angenommen wird, dass bei den steifen Streben (gedrückten Gitterstäben) das Verhältniss $\frac{c\,\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}}$ sich der Einheit nähert, in welchem Falle die Vertikalständer keinen Theil an der Strebenkraft nehmen; wenn ausnahmsweise die gedrückten Stäbe nicht genug Steifigkeit besitzen, so müssten die Regeln der Nummer **189.** auch hier angewendet werden, was im Allgemeinen bei dieser Klasse nicht nothwendig ist.

§. 20. Gitterbrücken mit beiderseits gleichen Stäben ohne Vertikalständer.

190. Bei allen Gitterbrücken ohne Vertikalständer dürfen die Regeln der Nummer **188.** angewendet werden; wenn sodann, wie bei der vorliegenden Klasse von Gitterwerken, die beiderseitigen Stäbe gleichartig construirt sind, so darf fernerhin die freie Länge der Gitterstäbe nach Gleichung 286) bestimmt werden.

Die Berechnung geschieht im Uebrigen nach den Gleichungen 287) und 288), welche bei geradlinig begränzten Gitterwerken (s. Figur 235) in die sehr einfachen Gleichungen 289) und 290) übergehen.

Fig. 235.



Die Tragkraft dieser Gitterwände ist im Allgemeinen durch die Stärke, beziehungsweise Steifigkeit der gedrückten Gitterstäbe bedingt; man hat also namentlich darauf zu achten, dass das Ver-

hältniss $\frac{\omega}{\Theta}$ für den Gitterstabquerschnitt ein möglischt günstiges wird. Die T-Form dürfte dieser Bedingung im Allgemeinen am Besten entsprechen. — Günstig ist es bei diesen Brücken, wenn die Fahrbahn unterhalb angebracht werden kann, indem dann die Hälfte des Fahrbahngewichts (inclusive Verkehrsbelastung) durch das Gitterwerk auf die obere Gurtung übertragen werden muss, wodurch die gedrückten Stäbe etwas entlastet werden, die meist weniger angestrengten gezogenen Stäbe aber einen Zuschlag an Spannung erhalten. — Bei dem innigen Zusammenhang, welcher die sämmtlichen Glieder des Gitterwerks verbindet, darf man annehmen, dass das an irgend einem Punkte eintretende Fahrbahngewicht sich auf eine grössere Länge vertheilt, so dass die auf eine Länge λ gleichförmig vertheilt gedachte Ueberlast die sämmtlichen auf dieser Längenerstreckung befindlichen Gitterstäbe in gleicher Weise in Anspruch nimmt.

Die von einem Vertikalschnitt x getroffenen Gitterstäbe, welche beim geraden Träger zusammen die Kraft $\mathfrak{V}_x$ aufnehmen müssen, haben daher von der Fahrbahnbelastung die Hälfte des auf die Länge $\mathfrak{H} \cdot \operatorname{cotang} \varphi$ antreffenden Fahrbahngewichts zu übertragen, d. h. wenn die Stäbe unter 45° geneigt sind, bei Anwendung von zwei Hauptträgern miteinander für jedes Gitter ein Gewicht $= \frac{1}{4} \mathfrak{H} \cdot (k + F)$ zu übertragen. Wenn nun letzterer Werth einen erheblichen Theil der Vertikalkraft $\mathfrak{V}'_x$ antrifft, so werden die gedrückten Stäbe um soviel entlastet, die gezogenen umsomehr in Anspruch genommen. Der Vortheil der unterhalb angebrachten Fahrbahn macht sich also insbesondere gegen die Brückenmitte geltend, wo die Werthe $\mathfrak{V}'_x$ kleiner sind, und wird also hier eine verhältnissmässig geringere Steifigkeit genügen.

Der umgekehrte Fall findet statt, wenn die Fahrbahn oben aufgelegt ist; in solchen Fällen muss man insbesondere besorgt sein, dass die Gitterstäbe auch in der Mitte noch die nöthige Steifigkeit besitzen.

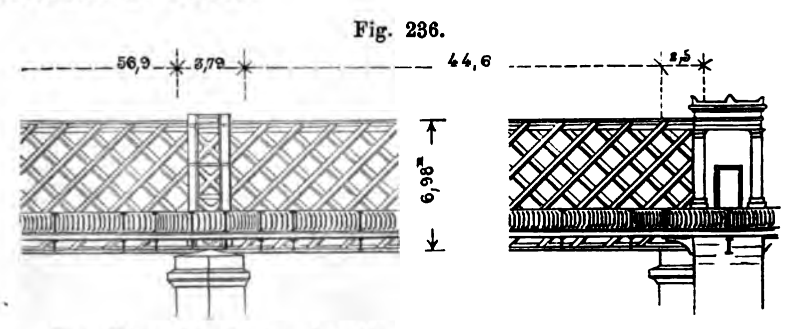
Vorstehende Betrachtungen können bei Austheilung der verschiedenen Gitterstab-Profile, welche gegen die Auflager hin an Stärke zunehmen, zweckmässige Anwendung finden.

191. Es existiren einige Brücken, bei welchen flache Stäbe ohne Vertikalständer angewendet wurden, so z. B. eine der ältesten Gitterbrücken, die im Jahre 1845 erbaute Eisenbahnbrücke über den Royal-Canal bei Dublin, welche sehr bedenkliche Ausbiegungen zeigen soll, wie sich auch die ausserordentlich starke Anstrengung solcher Gitter leicht nachweisen lässt. Man wendet daher in solchen Fällen, wo man die Vertikalständer ausfallen lassen will, durchaus flache Stäbe nicht mehr an; der Fortschritt in der Fabrikation

des Walzeisens gestattet Winkel- oder T-Eisen oder auch anderweitig façonnirte Eisen anzuwenden, welche einen starken Widerstand gegen seitliches Ausbiegen leisten; Brücken dieser Art, fast ausschliesslich unsere erste Klasse der Gitterbrücken bildend, können in Bezug auf Leichtigkeit mit Brücken fast jeder anderen Constructionsgattung concurriren; sie können auch billig per Centner hergestellt werden, wenn die meist einfache Constructionsweise nicht durch zu hohen Preis des Façon-Eisens vertheuert wird; starke Stäbe von zudem grosser Länge, welche im Handel nicht leicht zu beschaffen sind, wird man daher vortheilhaft aus mehreren Stücken, insbesondere aus Flach- und Winkeleisen zusammensetzen können.

191. Eine der ersten und bedeutendsten Anwendungen von Gitterbrücken mit steifen Stäben und ohne Vertikalständer zeigen die Brücken über die Eipel und die Gran, welche in den Jahren 1857—1859 unter Direction des Herrn v. Ruppert erbaut wurden und worüber in der Sammlung von eisernen Brückenconstructionen von L. v. Klein, Stuttgart 1860, sehr vollständige Zeichnungen veröffentlicht wurden.

Fig. 236.



Die Eipelbrücke bei Szobb hat, wie aus beistehender Figur 236 hervorgeht, folgende Längenabmessungen:

2 äussere Oeffnungen à 44,60m = ...	89,20m
1 Mittelöffnung	56,90m
2 Zwischenpfeiler à 3,79m	7,58m
zusammen zwischen den Ortpfeilern	153,68m

während die Länge der Eisenconstruction 158,68m beträgt.

Die Auflagerplatten nehmen beinahe die ganze Breite der Zwischenpfeiler ein, indem sie, wie bei den Ortpfeilern, um je $\frac{1}{2}$ Fuss = 0,16m gegen die Mauerkante zurückstehen; wir haben zu der effektiven Lichtweite von 57,22m, beziehungsweise 44,92m, gemäss der in N°. **86**. gegebenen Regel noch je die halbe Auflagerbreite mit 1,73m hinzuzunehmen und erhalten als Stützweite für die Mittelöffnung b = 58,95m, für die Aussenöffnungen a = 46,65m, so dass das Verhältniss a : b nahezu gleich 4 : 5 sich ergiebt. Das Eisengewicht ist zu

8 Zollcentner per laufenden Fuss österreichisch oder 1266 Kilo per Meter und Geleise angegeben, was in der Ausführung sich etwas höher gestellt hat; mit Rücksicht hierauf und mit Hinzurechnuug des Gewichts des Oberbaus nebst Bedielung wird man das Totalgewicht $p = 1900$ Kilo per Meter und Geleise rechnen müssen. — Als zufällige Belastung werden 24 Zollcentner per laufenden Fuss, somit $k = 3800^k$ per Meter und Geleise angegeben; wir haben somit in Tabelle XXII. $\frac{p}{k} = \frac{1900}{3800} = \frac{1}{2}$ und $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ zu setzen, für welchen Werth die Auflagerdrücke und hauptsächlichsten Angriffsmomente in genannter Tabelle XXII. bereits berechnet und in Tafel V. graphisch dargestellt sind. Aus letzterer Darstellung ersehen wir, dass die grössten Vertikalkräfte rechts vom Auflager B bei Belastung der beiden ersten Oeffnungen stattfindet; wir haben von der Summe der Auflagerdrücke $A + B$ die Belastung der ersten Oeffnung abzuziehen (unter Anwendung von Gleichung 108[a]) und erhalten als die gesuchte grösste Vertikalkraft rechts vom Auflager B aus Tabelle XXII.:

$$\left.\begin{aligned} \max \mathfrak{V} &= (0{,}2883 + 1{,}0046)\, q\, b - a\, q \\ &= 5700\ [(1{,}333 \times 58{,}95) - 44{,}42]\ \text{Kilo} \\ &= 190{,}84\ \text{tons.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

In ähnlicher Weise können sämmtliche $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{V}$ aus Tabelle XXII. entnommen werden, wobei nach vorheriger Bestimmung der Auflagerdrücke die Gleichungen 108) und 109) angewendet werden.

192. Die Eigenthümlichkeit der Eipelbrücke und der ihr nachgebildeten Objecte besteht insbesondere in der *Ωförmigen Gestaltung der Gitterstäbe*, wie zu ersehen aus der nachfolgenden Figur 237, wo die Hälfte eines der stärksten Stäbe dargestellt ist. Abgesehen von der grösseren oder geringeren Schwierigkeit des Walzens entscheidet für die Zweckmässigkeit eines steifen Gitterstab-Profils die Grösse des Trägheitsmoments Θ, verglichen mit der Querschnittfläche des fraglichen Stabes, wie diess aus den Gleichungen 169), 285) und 286) hervorgeht.

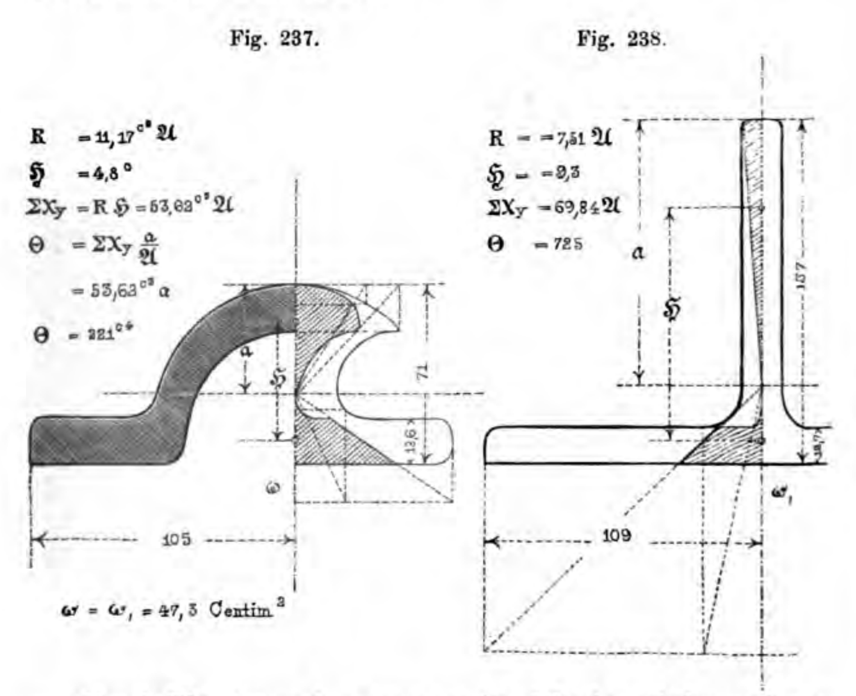
Wir wollen bei der Berechnung der stärkeren Stäbe der Eipelbrücke den in Figur 232 dargestellten Fall annehmen, welcher eine möglichst gute Absteifung in der Höhe der obern wie der untern Gurtung voraussetzt; hienach dürfen wir in Gleichung 286) für L den Werth $^1/_3\, l$ einsetzen und erhalten:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_m \left(1 + K \frac{\omega\, l^2}{18\,.\,\Theta}\right) \quad \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Von den in dieser Gleichung befindlichen Grössen ist $l = 20' = 6{,}32^m$, $\omega = 47{,}3$ Quadratcentimeter, K nach Tabelle XI. $= 0{,}00008$ zu setzen; das Trägheitsmoment Θ haben wir nach der in N°. **17.** entwickelten Methode graphisch bestimmt und gleich

221^{c^4} gefunden. — Die Figur 237 giebt eine Skizze der letztern in grösserem Maassstabe ausgeführte Construction, und sind die angewendeten Bezeichnungen wie das Verfahren selbst in der anführten N⁰. **17.** näher erklärt.

Fig. 237. Fig. 238.



Durch Einsetzung der vorgenannten Werthe erhalten wir aus Gleichung II.):

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m} = 1 + 0{,}38 = 1{,}38 \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{III.}$$

Die mittlere Pressung der Gitterstäbe wird erhalten, indem wir in Gleichung 290) $n = 8$ setzen; behufs Bestimmung der grössten, rechts vom Auflager B stattfindenden Strebenkraft ist in obiger Gleichung I.) $\max \mathfrak{B}' = \max \mathfrak{B} = 190{,}83$ tons und $\sin \varphi = 0{,}707$ zu setzen, und erhalten wir hienach:

$$\max N = 33717 \text{ Kilo} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{N}{\omega} = \frac{33717}{47{,}3} = 713 \text{ Kilo} \; . \; . \; . \quad \text{V.}$$

Durch Wertheinsetzung aus obiger Gleichung III. ergiebt sich schliesslich:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}\, 713 = 984^k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{VI.}$$

Wir haben also trotz der Annahme der durch Figur 232 dargestellten Biegungslinie einen ziemlich hohen Werth für die grösste Pressung erhalten; es spricht diess keineswegs gegen die Anwendung steifer Gitterstäbe; wir haben nämlich für einen Tförmigen Stab von derselben Querschnittfläche unter Anwendung desselben Verfahrens ein Trägheitsmoment von 725^{c^4} erhalten, wie solches aus Figur 238 ersichtlich ist; hienach ist für diesen Tförmigen Stab $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m} = 1 + 0{,}38 \cdot \frac{221}{725} = 1{,}116$ und würde also $\mathfrak{B} = 1{,}116 \times 713 = 796^k$ gefunden worden sein, was als ein durchaus befriedigendes Resultat bezeichnet werden kann.

Anmerk. Die in Figur 238 gezeichnete T-Form hat für die angewendete Höhe eine etwas schwache Eisendicke, wesshalb das Resultat etwas günstiger ist, als bei den gegenwärtig üblichen T-Eisen erhalten würde; wir haben den Querschnitt der Figur 238 entsprechend der Figur 39 in Tabelle XIV. gewählt, welche Figur allerdings ziemlich schlanke Verhältnisse giebt; wir bemerken hiezu, dass die Burbacher Hütte jetzt schon T-Eisen walzt, welche an Höhe und Breite der Figur 238 nahe stehen, dabei aber eine grössere Dicke zeigen.

Bei dem günstigen Resultat, welches wir für T-Eisen erhalten haben, könnte man annehmen, dass vorstehende Gleichung II.) eine zu günstige Voraussetzung enthalte; hiegegen spricht aber, dass die Gitterstäbe der Eipelbrücke in Wirklichkeit eine viel grössere Pressung erhalten haben, als obige Gleichung VI.) angiebt.

Es befinden sich nämlich auf den Zwischenpfeilern, wie aus Figur 236 ersichtlich, gusseiserne Absteifungen, welche oberhalb durch einen schmiedeisernen Träger verbunden, das Gitterwerk rahmenartig umfassen und gegen Umkanten wie gegen Verwinden schützen; im Gitterwerk selbst aber sind Vertikalständer, wie solche in Figur 235 über den Zwischenpfeilern gezeichnet sind, nicht angebracht und es musste daher bei der Probebelastung, welche den obigen Angaben entsprechend war, etwa 6 Gitterstäbe die gesammte Pfeilerreaction je für ein Gitter aufnehmen; man findet leicht, dass die Pressung auch bei Annahme der obigen Gleichung II.) an der Grenze des Zulässigen angelangt war, wenn man auch die gusseisernen Bügel, welche nachträglich gegen Ausbiegen angebracht wurden, mit in Rücksicht nimmt.

Bei neuen Projecten wird man übrigens vorsichtig in Anwendung der durch Figur 232 dargestellten Biegungskurve sein, und im Zweifelfalle sich eher der Figur 231 zuneigen, nach Umständen das Mittel zwischen beiden Fällen nehmen.

193. Gleichzeitig mit der Eipelbrücke wurde auf der Elisabeth Westbahn unter Leitung des Herrn Hornbostl eine Reihe von Gitterbrücken erbaut, welche beiderseits Stäbe von T-Eisen erhielten; sie zeigen die Eigenthümlichkeit, dass die Aenderungen in der Stärke der Gitterwand nicht durch Modification des

Gitterstab-Querschnitts, sondern durch allmählige Aenderung der Maschenweite unter Anwendung eines gleichmässigen Gitterstab-Profils bewirkt ist. Die Ausführung ist dadurch bezüglich Beschaffung des Materials wesentlich erleichtert, doch lässt sich diese Construction nur dann mit Vortheil anwenden, wenn die Fahrbahn oben aufgelegt ist, und in Folge dessen die Aenderungen in der Maschenweite keinen störenden Einfluss auf die Distanz der Querträger üben können. — Berechnet werden diese Brücken ganz wie die anderen Brücken dieser Klasse, indem lediglich die Nummerzahl n mit der Entfernung vom Auflager wechselt.

194. Als Beispiel einer Gitterbrücke mit steifen Stäben von bescheidenen Dimensionen nehmen wir die Brücke über den Blaucanal bei Ehrenstein an der württembergischen Donaubahn, deren Construction in Tafel XVI. dargestellt ist.

Die Brücke ist schief und haben die Träger eine Länge von 19,8^m, eine Stützweite von 19,4^m. Das Gitterwerk bildet ein dreifaches System von steifen Tförmigen Stäben; die Maschenweite ist 1,076^m, die Distanz der Querträger doppelt so gross und beträgt somit 2,152^m; zwischen den Querträgern, welche als Blechbalken construirt sind, befinden sich Schwellenträger von Doppel-T-Eisen, der Art angebracht, dass die Unterkante der Fahrschienen 2,4 Fuss oder 0,63^m über der Unterkante der Hauptträgergurtung sich befindet. — Der Querträger hat eine Höhe von 0,54^m, welche Höhe genügend ist, um eine besondere Eckabsteifung überflüssig zu machen; es zeigte auch die Brückenprobe nur eine ganz unbedeutende Seitenschwankung der Gitterwand, welche letztere oberhalb auf 1,44^m frei und auf diese Höhe nur durch die Gitterstäbe selbst ausgesteift ist. — Die Gewichte der Eisenconstruction sind entsprechend den in Tafel XVI. eingeschriebenen Dimensionen folgende:

Hauptträger:		
Gurtungen nebst Endständern	9200	
Gitterstäbe	4200	
		13400
Windkreuze		220
Querträger		7300
Schwellenträger		2640
		23660^k

Das Eisengewicht beträgt somit für eine Länge l = 19,4^m per laufenden Meter:

$$p' = 36,0\,l + 500 = 1200 \text{ Kilo.}$$

194. Bei Berechnung dieser Brücke war, wie soeben bemerkt, die der Tabelle XVII^a. zu Grunde liegende Verkehrs-

belastung massgebend; wir erhalten aus dieser Tabelle für eine Spannweite von 20ᵐ:

$$k = 4660^k; \qquad \frac{k + k'}{2} = 5360^k$$

$$k^1 = 6050^k$$

Ferner ist, wenn wir zum Eisengewicht p′ das Gewicht von Oberbau und Bedielung mit 300ᵏ per Meter addiren:

$$p = 1500 \qquad q_0 = \frac{k + k'}{2} + p$$

$$q = 6160 \qquad \text{„} = 6850$$

und erhalten wir hienach bei 19,4ᵐ Stützweite:

Grösstes Angriffsmoment in der Trägermitte:

$$\text{Mmax } \mathfrak{M} = \frac{q\,l^2}{8} = 290{,}0 \text{ mts.} \;.\;.\;.\;.\; \text{I.}$$

Grösste Vertikalkraft am Auflager:

$$\text{Mmax } \mathfrak{V} = \tfrac{1}{2}\, q_0\, l = 66{,}44 \text{ tons} \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{II.}$$

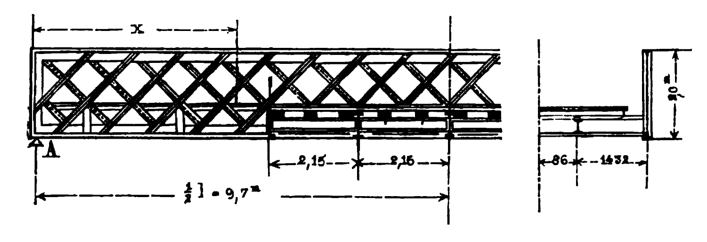
Grösste Vertikalkraft in der Trägermitte:

$$\max \mathfrak{V}_{1/2\,l} = \frac{k^1 l}{8} = 14{,}67 \text{ tons} \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{III.}$$

Diese Momente und Kräfte sind durch Halbiren auf einen Hauptträger zu reduziren, und erhalten wir für die **Gurtungen in der Trägermitte** nach Gleichung 289):

$$O = U = \frac{\text{Max } \mathfrak{M}'}{\mathfrak{H}} = \frac{145{,}000}{1{,}94} = 64{,}7 \text{ tons} \;.\;.\;.\; \text{IV.}$$

Fig. 239.



Der Querschnitt, welcher diese Gurtungskraft aufnehmen muss, setzt sich folgendermassen zusammen:

3 Gurtungsbleche von je 200^{mm} Länge, 10^{mm} Dicke,

—— . . . . . . 60,0 □Cent.

2 Gurtungswinkel von je 90^{mm} Schenkellänge und $11,5^{mm}$ Dicke,

—— . . . . . . 38,7 „

1 Stehblech . . . . 286^{mm} lang, 11^{mm} dick,

—— . . . . . . 31,5 „

130,7 „

Hievon gehen ab:

2 Nieten durch die Kopfbleche $2 \times 2,0 \times 4,1 =$ 16,4 „

bleiben 113,8 „

wonach eine grösste Gurtungsspannung $\mathfrak{A} = 656^k$ stattfindet.

Wir erhalten für die grösste Kraft in den Gitterstäben nach Gleichung 290):

$$\left.\begin{array}{l} N \sin\varphi = \frac{1}{n}\mathfrak{B}' \\ N = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{0,707} \cdot 33220 = 15662 \text{ Kilo.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{V.}$$

Es beträgt aber der Querschnitt ω der stärkern Stäbe 31 □Centim., wonach:

$$\mathfrak{B}_m = \frac{N}{\omega} = 502^k \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{VI.}$$

sich ergiebt; die freie Länge eines Stabes beträgt $1,4^m$, die Höhe des Querschnitts $0,1^m$, somit ist in Tabelle XIV. das Verhältniss $\frac{L}{H} = 14$ und hienach $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^m} = 1,2$ zu setzen; die grösse Pressung betrüge hienach 602^k. (Die in Gleichung 286) angenommene Verdopplung des Trägheitsmoments kann bei der geringen Zahl der auf einen Stab treffenden Knotenkunkte nicht in Anwendung kommen.)

Bei Berechnung der grössten Gitterstab-Spannung sind noch zwei Nietlöcher in Abzug zu bringen, wodurch der Querschnitt auf 25 □Cent. reduzirt wird; die Gitterstabspannung berechnet sich hieraus mittelst Gleichung V. auf:

$$\mathfrak{A} = \frac{N}{\omega} = \frac{15662}{25} = 627^k \quad \ldots \quad \text{VII.}$$

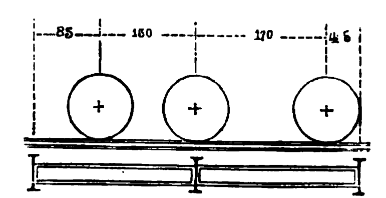
Die Pressungen und Spannungen der Gitterstäbe erleiden noch eine Modification durch die Uebertragung der Fahrbahnbelastungen auf die Gurtungen. Diese Belastung beträgt auf doppelte Maschenweite 2,15 (k′ + F), wo wir $k' = 6050$, $F = 500 + 300 = 800^k$ zu setzen haben; auf jedes Gitter treffen hienach 7364^k, wovon die

Hälfte durch je 4 Gitterstäbe aufgenommen werden muss; ein Gitterstab empfängt somit 921^k, welches Gewicht die im Stabe herrschende Kraft um $921 \cdot \frac{1}{\sin\varphi} = 1300^k$ vermehrt, beziehungsweise vermindert; Verminderung der Strebenkraft findet nämlich für die gedrückten, Vermehrung für die gezogenen Stäbe statt; durch letztere wird in Gleichung V. die Grösse N' auf 16962^k und entsprechend die durch Gleichung VII. gegebene Gitterstab-Spannung am Auflager erhöht. Einen etwas grösseren Einfluss übt diese Modification der Strebenkraft in der Mitte der Brücke; hier folgt aus Gleichung 290) durch Einsetzung des in obiger Gleichung III. gegebenen Werthes $\mathfrak{B}$:

$$\left.\begin{aligned} N \sin\varphi &= \frac{1}{n}\,\mathfrak{B}' = \frac{1}{3} \cdot 7335^k \\ N &= 3458^k \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{VIII.}$$

wozu nun wieder obige 1300^k, welche von der Uebertragung der Fahrbahnbelastung herrühren, zu addiren sind; der Gitterstab-Querschnitt beträgt in der Mitte 24 □Cent. und nach Abzug von zwei Nietlöchern 19,6 □Cent., woraus als grösste Spannung in der Trägermitte $\frac{3458 + 1300}{19{,}6} = 243^k$ sich ergiebt. Die gedrückten Stäbe sind in der Brückenmitte sehr wenig in Anspruch genommen, da hier der Werth 1300^k in Abzug zu bringen ist.

Fig. 240.



Für die Querträger giebt die in Figur 240 dargestellte Stellung der Locomotive die grösste Belastung an; der in dieser Figur dargestellte mittlere Querträger erhält als Verkehrsbelastung:

$$12000\left(1 + \frac{85 + 45}{215}\right) = 19265^k$$

wovon an jedem Lastpunkte je $P_{,} = 9632^k$ wirkt; hiezu kommt noch vom Gewichte der Fahrbahn $P_{,,} = 300 \cdot 2{,}15 = 630^k$, so dass $P = P_{,} + P_{,,} = 10262$ sich ergiebt; das an den Lastpunkten thätige Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ ist nach Tabelle XXVIII., Figur 95, ausgedrückt durch:

$$\mathfrak{M} = P\,\lambda = 10262 \times 1{,}43 = 14675 \text{ KM.} \quad . \quad . \quad \text{IX.}$$

Dieses Moment in Gleichung 158) eingesetzt giebt als grösste Gurtungsspannung der Querträger:

$$\mathfrak{A} = 14675\,\frac{H}{\mathfrak{H}_0^{\,2}}\,\frac{1}{(\Omega + {}^1\!/_6\,\delta\,\mathfrak{H}_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{X.}$$

In dieser Gleichung ist nach Tafel XVI. einzusetzen H = 53,6°, $\mathfrak{H}_0$ = 49°, δ = 0,9, während sich der Gurtungsquerschnitt ω zusammensetzt:

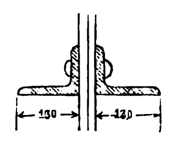
1 Kopfblech 20,0 × 1,0 = ...	20,00	□Cent.
2 Winkel von je 9,0° Schenkellänge und 1,15° Dicke	38,70	„
	58,7	□Cent.
Hievon ab 2 Nieten	7,3	„
Bleiben	51,5	□Cent.

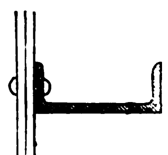
Vorstehende Werthe in Gleichung X. eingesetzt, erhalten wir als grösste Gurtungsspannung $\mathfrak{A}$ = 558^k.

§. 21. Gitterbrücken mit flachen Stäben und Vertikalständern.

196. Ehe man grossmaschige Gitterbrücken mit steifen Streben construirte, hat man die Aussteifung der bis dahin durchaus von Flacheisen hergestellten Gitterbrücken mittelst Vertikalständern bewirkt, welche letztere häufig zugleich zur Anbringung der Fahrbahnträger dienten. Da wo die Distanz der Vertikalständer wesentlich kleiner ist, als die Gitterhöhe, werden sämmtliche gedrückte Stäbe von den genannten Vertikalen ziemlich gleichförmig beeinflusst und die in Nummer **189.** gegebenen Regeln können directe Anwendung finden, indem wie dort bemerkt die Distanz d_0 der Vertikalen bei Bestimmung der freien Länge der Gitterstäbe massgebend ist und in Gleichung 206) $l = d_0 \frac{1}{\cos \varphi}$ gesetzt wird. Es geht hieraus hervor, dass es für Aussteifung der Gitterstäbe günstiger ist, wenn die Vertikalen einander näher gerückt werden, wodurch sich nicht nur die freie Länge der Gitterstäbe vermindert, sondern auch die Uebertragung eines Theils der Strebenkraft auf die Vertikalen gleichmässiger geschieht. — Damit die Vertikalständer nicht zu viel Material in Anspruch nehmen ist erforderlich, dass ihr Querschnitt senkrecht zur Gitterwand möglichst hoch wird; die nebenstehend skizzirte Anordnung, wo die angewendeten Winkeleisen mit den schmäleren Schenkeln an die Wand befestigt, durch ihre beiden längeren Schenkel eine ansehnliche Querschnitthöhe h darstellen, entspricht dem Zweck der Absteifung ungleich weniger als der in gegenüberstehender Figur 242 dargestellte Querschnitt, welcher bei gleichem Gewichte ein wesentlich grösseres Widerstandsmoment gegen Ausbiegung der Wand giebt auch für

Fig. 241.




Fig. 242.

Befestigung der Querträger eine grössere Fläche darbietet.

In den meisten Fällen wurden die hier besprochenen Gitterbrücken mit geradlinig horizontalen Gurtungen hergestellt; es können also — bei zwekmässiger Anbringung der Vertikalständer — in der Regel die Formeln 299)—302) Anwendung finden; hiebei ist in Formel 302), wie schon erwähnt, zu Bestimmung des Verhältnisses $\mathfrak{B} : \mathfrak{B}_m$ Gleichung 169) in den Formeln 300) und 301) aber Gleichung 286) in Anwendung zu bringen. In beiden Fällen kann, da die Gitterstäbe vierkantig vorausgesetzt sind, Tabelle XIV. bequeme Anwendung finden.

Anmerk. Wenn Tabelle XIV. für Gleichung 286) dienen soll, so ist $1 + K \frac{\omega l^2}{8 \Theta}$ in $1 + K \frac{\omega \, {}^1/_2 \, l^2}{2 \Theta}$ zu übertragen, und muss sodann der aus Tabelle XIV. gefundene Werth $\mathfrak{B}_m : \mathfrak{B}$ behufs Verdopplung des Trägheitsmoments eine Correction erfahren; z. B. $\frac{1}{1{,}86} = \frac{1}{1 + 0{,}86}$ giebt durch Verdopplung des Trägheitsmoments $\frac{1}{1 + 0{,}43} = \frac{1}{1{,}43}$.

Wenn man für einen gezogenen Stab den Werth N_x nach Gleichung 300) und für den symmetrisch gelegenen gedrückten Stab den Werth T_x nach Gleichung 301) bestimmt, so geben die Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = \frac{N_x}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 303)$$

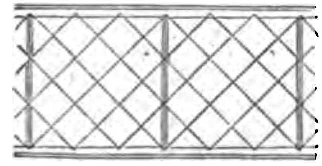
und:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m} \cdot \frac{T_x}{\omega} \quad \ldots\ldots \quad 304)$$

für $\mathfrak{A}$, beziehungsweise $\mathfrak{B}$, je denselben Werth, weil in Folge der Mitwirkung der Vertikalständer eine gleichmässige grösste Anstrengung für die beiderseitigen Gitterstäbe angenommen worden ist.

197. Das vorstehend beschriebene Verfahren erfährt eine Abänderung, wenn die Distanz der Vertikalständer und der Gitterhöhe ziemlich gleichstehend ist oder aber dieselbe noch übertrifft. In solchen Fällen können, wie aus beistehender Figur 243 ersichtlich, diejenigen Stäbe, welche beispielsweise die Diagonale des von Gurtungen und Vertikalen eingeschlossenen Vierecks bilden (oder diesen Diagonalen zunächst gelegen sind), sofern sie gedrückt sind, weniger Strebenkraft aufnehmen, als die übrigen Stäbe; dem entsprechend wird die entgegengesetzte gezogene Diagonale um so viel mehr in Anspruch genommen sein; man könnte für jedes einzelne Gitterstabspaar das Verhältniss $\mathfrak{B} : \mathfrak{B}_m$ besonders entwickeln und es würde

Fig. 243.



der Grad der Anstrengung des Gitterwerks eben durch diejenigen Diagonalen bestimmt sein, welche den grössten Zug = grössten Druck aufnehmen müssen; hiezu kommt aber noch, dass bei vorhandenen Vertikalständern die Formänderung des ganzen Trägers dahin wirken wird, dass die gezogenen Diagonalen ganz besonders in Anspruch genommen sind, und dass somit die Anstrengung einer gezogenen Diagonale eine wesentlich höhere sein wird, als nach Gleichung 300) berechnet würde. — Solche Systeme befinden sich daher in sehr ungünstigen Verhältnissen und werden kaum mehr angewendet.

Durch Hinzufügung von Vertikalen zwischen den Hauptständern würden die Umstände wesentlich geändert; man hat aber solche Gitterwerke häufig auf anderweitigem Wege zu verbessern gesucht, indem man die gedrückten Diagonalstäbe aus T-Eisen construirte. Man erreicht damit den doppelten Zweck, einmal ein weiteres rückwirkendes Element in die Gitterwerke hineinzubringen und sodann die gezogenen Diagonalstäbe kräftig zu entlasten, wie sich diess durch Anwendung der Gleichungen 300) und 301) des Näheren ergiebt.

Solche Systeme können in constructiver Hinsicht gute Dienste leisten, die Berechnung wird aber complizirt, weil man für jedes Gitterstabpaar die Gleichung 301) besonders anschreiben und für Gleichung 302) einen mittlern Werth $\mathfrak{B} : \mathfrak{B}_m$ bestimmen muss.

198. Die Weichselbrücke bei Dirschau ist die bedeutendste und zugleich die am weitesten gespannte Gitterbrücke, wie aus folgenden Abmessungen hervorgeht:

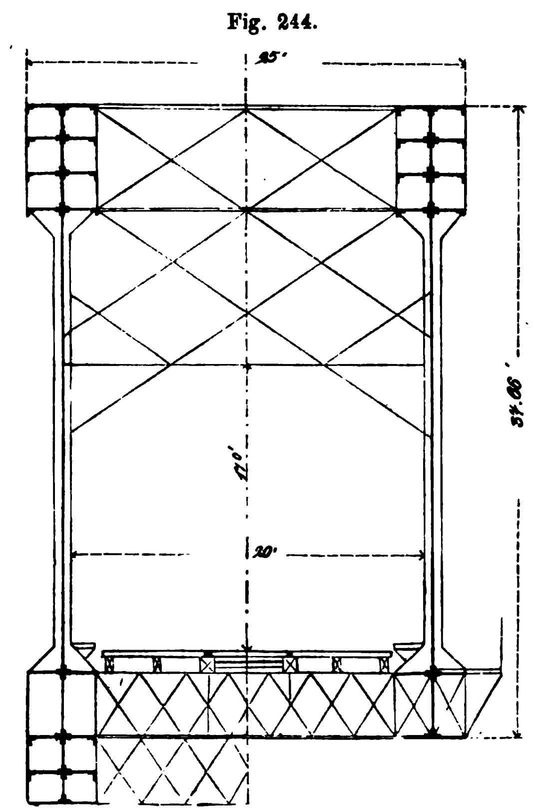
6 Oeffnungen	à	$121{,}1^m$	=	$726{,}60^m$
5 Zwischenpfeiler	à	$9{,}73^m$	=	$48{,}65^m$
2 Endpfeiler	à	$31{,}0^m$	=	$62{,}00^m$
				$837{,}25^m$

Von den 6 Oeffnungen sind je 2 zusammen gekuppelt, so dass sozusagen drei getrennte Brücken an einander gereiht sind.

Die Gitter zeigen Flachstäbe von gleichem Querschnitt gegen Zug und Druck, sowie Vertikalständer in Entfernungen von je 6 Fuss; es können also die in N⁰. **195**. gegebenen Regeln angewendet werden. — Die Brücke ist für ein einziges Eisenbahngeleise construirt, dient aber gleichzeitig dem Strassenverkehr (siehe Figur 244); der Abstand der beiden Gitterwände ist so gewählt, dass bei freiem Bahngeleise zwei Fuhrwerke einander ausweichen können; die Lichtweite des Brückenquerschnitts beträgt $6{,}27^m$.

Unter vorbeschriebenen Verhältnissen ist die Verkehrslast der Belastung eines Eisenbahngeleises entsprechend und wurde das variable Gewicht auf 2128 alte Pfund per laufenden Fuss oder 3170 Kilo per Meter bestimmt; bei dieser Annahme soll die grösste Anspannung 10000 alte Pfund per □Zoll oder 684 Kilo per

Fig. 244.



□Centimeter betragen; hiebei wurde nur die gleichförmig vertheilte Maximallast berücksichtigt, welche übrigens auch (zunächst dem Zwischenpfeiler) das grösste Angriffsmoment und die grösste Vertikalkraft hervorruft, wie aus Tafel IV. ersichtlich. Das Eigengewicht wird zu 6160 Pfund per laufenden Fuss oder 9180 Kilo per Meter angegeben, (so dass $p : q = 3 : 4$); es ist dieses Gewicht wesentlich grösser als wir nach Gleichung 103) für 121^m Spannweite erhalten würden, obgleich continuirliche Brücken stets etwas leichter sein sollten. Die grössere Schwere fällt nur zum Theil dem gewählten Constructionssystem zur Last, ist vielmehr überwiegend durch andere Umstände veranlasst.

Einmal ist die Breite der Brücke und demgemäss das Gewicht der Fahrbahntafel mit Rücksicht auf die Landfuhrwerke grösser, als für ein Eisenbahngeleise erforderlich wäre, wobei übrigens zu bemerken, dass diese grössere Breite bei der grossen Spannweite beinahe unerlässlich ist; entsprechend werden (wie überhaupt bei weitgespannten eingeleisigen Brücken) auch die Verspannungen und Windstreben verhältnissmässig schwer ausfallen.

Ein zweiter Umstand bezieht sich auf eine bei grösseren Spannweiten nothwendige Correction der Gleichung 103). Diese Formel setzt theoretisch betrachtet voraus, dass das per Längeneinheit antreffende Totalgewicht $(p + k)$ ziemlich constant sei, wie diess auch nach den Tafeln XVII. und XVII^a. zwischen 10 und 60^m Spannweite der Fall ist; bei grösserer Spannweite bleibt sich die variable Last ziemlich constant (nimmt wenigstens sehr mässig ab), während das Eigengewicht, zunächst nach Formel 103) berechnet, rasch zunimmt; es ist daher für die grössere Spannweite in

Gleichung 103) der Coefficient C zu vergrössern und zwar umsomehr als mit Zunahme dieses Coefficienten das Eigengewicht p und ebendamit der Werth $q = p + k$ wächst.

Die letztere Betrachtung bleibt unter allen Umständen bestehen, dagegen fällt die vorher angeführte weitere Ursache der Gewichtsvermehrung — nämlich die bei grossen Spannweiten unerlässliche grössere Breite und entsprechende Gewichtsvermehrung der Querverspannung bei zweigeleisigen Brücken weg, indem das betreffende Gewicht, auf zwei Geleise vertheilt, das normale Maass nicht überschreitet; wenn solche Brücken ausserdem für zwei Geleise nur zwei Hauptträger erhalten, so kommt der weitere Vortheil hinzu, dass man zwei Träger immer vortheilhafter construiren kann, als drei oder vier Träger, welche für dieselbe Verkehrslast bestimmt sind; die bezügliche Materialersparniss ist wesentlich grösser als die Vermehrung des Gewichts der Querträger und oberen Querverbindungen, welche durch den grössern Abstand von zweien für zwei Geleise dienenden Hauptträgern bedingt ist.

199. Der Gurtungsquerschnitt der Dirschauer Brücke hat die Zellenform erhalten, welche gegen Druck guten Widerstand leistet und durch die Vertheilung der Querschnittfläche sich bequem der Anbringung von Stossplatten darbietet; dagegen erfordert die Aussteifung der Zellen und die durch vermehrte Constructionshöhe bedingte weitere Verspannung einen nicht unbedeutenden Materialaufwand.

Die grösste Spannung in den Gurtungen sollte auf die ganze Brückenlänge constant sein; es wurde desshalb der Gurtungsquerschnitt entsprechend den Angriffsmomenten modifizirt, und zwar wechselte die Breite der einzelnen Blechstreifen zwischen 0,39 und 1,41 Metern, die Dicke derselben zwischen 20 und 16^{mm}. Ueber den Zwischenpfeilern ist eine weitere Verstärkung der Gurtung angebracht worden; wir sehen nämlich aus den graphischen Darstellungen der Tafel IV., dass das Angriffsmoment $\mathfrak{M}$ daselbst sehr rapid zunimmt; es sind desshalb an dieser Stelle weitere Zellen hinzugefügt, wodurch zugleich die Höhe des Gitters um 4 Fuss oder $1{,}26^{m}$ vermehrt ist; die Distanz der Gurtungsschwerpunkte beträgt in Folge dieser Erhöhung der untern Gurtung zunächst den Zwischenpfeilern $10{,}90^{m}$, auf der übrigen Länge $10{,}28^{m}$.

Die Vertikalständer, deren Querschnitt aus Figur 241 ersichtlich ist, sind in Entfernungen von 6 Fuss angebracht, so dass als Länge l der Gitterstäbe $d : \cos 45^{0} = 8\,^{1}/_{2}$ Fuss $= 2{,}67^{m}$ in die Rechnung einzuführen ist. — Die Gitterstäbe selbst wechseln nach der Grösse der Vertikalkraft zwischen 131^{mm} auf 36^{mm} und 80^{mm} auf 73^{mm}; die diagonale Maschenweite beträgt 2′ oder $0{,}628^{m}$; durch jeden Vertikalschnitt werden 32 Gitterstäbe getroffen; am Zwischenauflager, wo nach Tabelle XX.

$$\mathfrak{V} = 0{,}625\ q\,b = 0{,}625\ (3170 + 9180)\ 121{,}1 = 934{,}75 \text{ tons,}$$

somit $\mathfrak{B}' = 467{,}37$ tons zu setzen ist, finden wir durch Anwendung der Gleichung 300):

$$N_x \sin\varphi = \frac{2}{32} \,.\, 467370 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_m} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

Es ist aber nach Gleichung 286):

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m \left(1 + 0{,}00008 \frac{\omega\, l^2}{8\, \Theta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

In dieser Gleichung ist zu setzen (zunächst ohne Berücksichtigung des Nietenabzugs):

$$\omega = 13{,}1 \times 2{,}6 = 34 \;\square\text{Centim.},$$
$$l = d : \cos\varphi = 267 \text{ Centim.},$$
$$\Theta = \frac{1}{12}\, b\, h^3 = 19{,}187^{c4},$$

somit:

$$\mathfrak{B} = 2{,}264\; \mathfrak{B}^m \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{III.}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen I. und III. folgt:

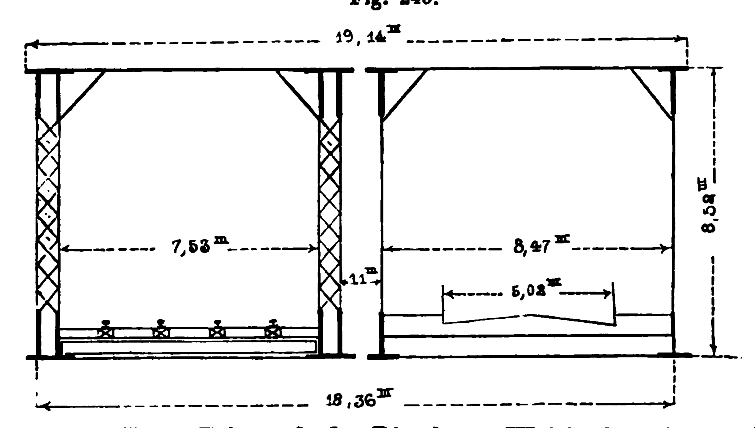
$$N_x = 30045 \text{ Kilo} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

und:

$$\mathfrak{A} = \frac{N_x}{\omega} = \frac{30045}{34} = 884 \text{ Kilo} \quad . \; . \; . \quad \text{V.}$$

Diese Spannung wird durch den nothwendigen Nietenabzug noch erhöht. Die grösste Pressung $\mathfrak{B}$ dürfen wir nach den am Schlusse von N°. **189.** gegebenen Erläuterungen gleich gross annehmen.

Fig. 245.



200. Kurze Zeit nach der Dirschauer Weichselbrücke wurde die Rheinbrücke in Köln nach demselben System erbaut und 1860 dem Betrieb übergeben. Dieselbe hat 4 Oeffnungen von je $98{,}22^m$ Lichtweite, von welchen je 2 durch einen gekuppelten

Träger überbrückt sind; hiebei ist neben der zweigeleisigen Eisenbahnbrücke eine Strassenbrücke von 8,47^{m} Lichtweite auf dieselben Steinpfeiler aufgesetzt, wie diess aus vorstehender Figur 245 des Nähern ersichtlich ist.

Eine eingehende Beschreibung dieser Brücke ist in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 1863, veröffentlicht worden. Daselbst wird das Eisengewicht der ganzen Brücke folgendermassen angegeben:

Tabelle LVII.

N°.	Gegenstand.	Eisenbahnbrücke.		Strassenbrücke.	
		Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.	Kilogr.
1.	Die Querträger	344257		174493	
2.	Die oberen Querverbindungen	86238		86460	
3.	Die horizontalen Gitterstäbe .	41516		44852	
4.	Gurtungen	1269744		719027	
5.	Gitterstäbe der Hauptträger .	684784		383939	
6.	Vertikalständer derselben . .	342246		307212	
			2768787		1715983

Die ganze Länge der hiezu gehörigen Brückenconstruction beträgt 415^{m}, wesshalb wir bei einer Spannweite von 98,12^{m} erhalten:

Für die Eisenbahnbrücke per Geleise:

$$p' = 27,9\,l + 420 = 3336^{k},$$

für die Strassenbrücke bei 8,4^{m} Breite:

$$p' = 37,8\,l + 422 = 4135^{k}.$$

201. Das im Vorstehenden aufgeführte Gewicht der Kölner Eisenbahnbrücke ist per Geleise wesentlich geringer als das der Dirschauer Weichselbrücke; obgleich die Spannweite per laufenden Meter nur einen Unterschied von 1000—1200 Kilo per Geleise bedingen sollte, so beträgt dieser Unterschied circa 5800 Kilo, so dass das Gewicht der Rheinbrücke, auf die grössere Spannweite der Dirschauer Brücke übertragen, immerhin noch nicht die Hälfte des per laufenden Meter berechneten Gewichts der letztern betragen würde. — Der Grund ist wohl hauptsächlich darin zu suchen, dass eine zweigeleisige Brücke weitaus günstiger zu construiren ist, sowie dass einige für die Dirschauer besonders ungünstige Umstände hier wegfielen.

Die diagonale Weite der Maschen wurde grösser (0,785^{m}) angenommen, die gedrückten Gitterstäbe wurden etwas stärker

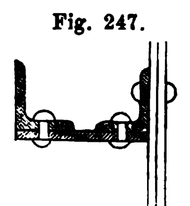
und insbesondere dicker angenommen, als die gezogenen in demselben Längeabstand befindlichen Stäbe. — Die Distanz der Vertikalen, welche bei der Dirschauer Brücke 1,88^{m} beträgt, ist hier nur 1,57^{m} und wurde zunächst den Auflagern auf 0,785^{m} reduzirt; die Gitterstäbe der Rheinbrücke befinden sich daher unter wesentlich günstigern Bedingungen als die in N^{0}. **198**. der Rechnung unterzogenen Gitterstäbe der Weichselbrücke.

Eine wesentliche Neuerung bei der Rheinbrücke ist die Anordnung eines Doppelgitters, welches die Anbringung von kräftigen Vertikalständern mit verhältnissmässig geringem Materialaufwand gestattete; diese Ständer bestehen nämlich selbst wieder aus einem Gitterwerk, welches zwischen die beiden gekuppelten Gitterwände eingesetzt ist; man hat diesen Doppelgittern den Vorwurf gemacht, dass das erste Gitter einen grössern Theil der Vertikalkraft aufnehmen müsse; insofern jedoch die Strebenkraft aus der Distanz der Gurtungskräfte entsteht (zu vergleichen Gleichung 173), so müsste zuerst nachgewiesen werden, dass die Gurtungen ungleich gespannt sind; bei der Kölner Brücke werden übrigens die innern Gitter zunächst den Zwischenpfeilern dennoch verhältnissmässig mehr in Anspruch genommen sein, weil daselbst die Gurtungen unsymmetrisch angeordnet sind (Figur 246) und in Folge dessen die innern Gurtungen einen grössern Theil an der Differenz der Gurtungskräfte aufnehmen müssen.

Fig. 246.

Zum Gewicht der Fahrbahntafel, welches oben per Geleise zu 420 Kilo angegeben wurde, ist zu bemerken, dass die Schienenträger, weil von Holz, hiebei nicht inbegriffen sind.

202. Die Strassenbrücke ist wesentlich leichter construirt, als die Eisenbahnbrücke, wie auch das Gewicht für 8,47^{m} Breite ziemlich niedrig ist. — Insbesondere sind die Querträger sehr leicht und sind in der Mittheilung der Berliner Zeitschrift die Durchbiegungen derselben in Folge des Strassenverkehrs zu $2\frac{1}{2}$—4^{mm} angegeben; diese Einbiegung der Querträger pflanzt sich nun nothwendig auf die Gitterwände fort und veranlasst eine hin- und herschwingende Bewegung, welche insbesondere beim Passiren von Fuhrwerken deutlich wahrnehmbar ist; die Berliner Zeitschrift sagt hierüber: „Von der ruhig daneben liegenden Eisenbahnbrücke aus konnten diese Bewegungen genau gemessen werden, und wurde ermittelt, dass dieselben für die unmittelbar mit den Querträgern vernieteten Vertikalversteifungen stärkerer Construction (siehe Figur 247) stets


Fig. 247.

fast genau gleich der Biegung des Querträgers waren, während die zwischen je zwei Querträgern angebrachten einfachen Winkeleisen etwa eine doppelt so grosse Biegung erlitten; letztere wurde selbst bis zu $4\frac{1}{2}$ Linien (oder 10^{mm}) gemessen."

Die Entfernung der Querträger beträgt nämlich 10 Fuss oder $3{,}138^m$, und nur an diesen Punkten sind die in Figur 247 dargestellten Vertikalständer angebracht; zwischen diesen befinden sich in der Mitte einfache Winkel, welche zur Steifigkeit der $8{,}52^m$ hohen Gitterwände wenig beitragen können.

Auch bei der Strassenbrücke ist die Fahrbahntafel mit Ausnahme der Querträger ganz von Holz (woher auch das geringe Eisengewicht der Fahrbahn sich erklärt); auf den 182^{mm} hohen kiefernen Balken ruht zunächst ein 52^{mm} starker Unterbelag von kreosotirten kiefernen Bohlen, sodann ein Oberbelag von 65^{mm} starken Bohlen, welche letztere anfänglich nur $1\frac{1}{2}$—2 Jahre ausdauerten; doch wird bemerkt, dass später angewendete Buchenbohlen im Jahre 1862 nach $1\frac{1}{2}$jähriger Benutzung noch ganz gut erhalten waren.

§. 22. Gitterbrücken mit steifen Streben und flachen Zugbändern.

203. Da ein grosser Theil der Gitterstäbe, zumal bei frei aufliegenden Trägern, nur auf Zug in Anspruch genommen ist, so wendet man vielfach für diese Stäbe das billigere und gegen Zug besonders zweckmässige Flacheisen an und giebt nur den gedrückten Stäben eine entsprechende Steifigkeit gegen Ausbiegungen; diese Brücken bilden den Uebergang zu den mehrfachen symmetrischen Fachwerken und können auch nach den dort entwickelten Formeln berechnet werden, sobald man die freie Länge L kennt, welche in Formel 169) behufs Bestimmung der relativ rückwirkenden Festigkeit dieser Stäbe einzusetzen ist.

Werden diese Brücken als Gitterbrücken behandelt — was für die Rechnung einfacher und bezüglich der Querschnittdimensionen hinreichend genau ist — so darf anstatt Gleichung 169) die bestimmtere Gleichung 285) benützt werden; im Uebrigen werden die in N°. **188.** gegebenen Regeln und insbesondere die Gleichungen 187) — 190) angewendet; da diese Brücken meist geradlinig begrenzt sind, werden die Gleichungen 189) und 190) in Verbindung mit den Gleichungen 166)—168) und 285) in der Regel zur Bestimmung der Querschnittdimensionen ausreichen. — Wir haben unter Annahme der in N°. **188.** gegebenen Bezeichnungen für geradlinig horizontal begrenzte Gitterträger mit steifen Streben und flachen Zugbändern:

Spannung in irgend einem gezogenen Gurtungsquerschnitt $\mathfrak{Q}_x$:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Q}_x} \quad \text{. . . . .} \quad 305)$$

Pressung in irgend einem gedrückten Gurtungsquerschnitt $\mathfrak{Q}_x$:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{M}'_x}{\mathfrak{H}_x} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Q}_x} \quad \text{. . . . . .} \quad 306)$$

Indem wir $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m$ setzen, ist vorausgesetzt, dass die Entfernung der Knotenpunkte des Systems nicht so gross ist, dass desshalb die relativ rückwirkende Festigkeit der Gurtung in Frage kommt, in welch letzterem Falle die Brücke besser als Fachwerkbrücke zu behandeln wäre.

Spannung in irgend einem gezogenen Gitterstab N_x (oder T_x), dessen Mitte durch die Abscisse x bezeichnet ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{V}'_x \cdot \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \frac{1}{\omega} \quad \text{. . .} \quad 307)$$

Grösste Pressung in irgend einem gedrückten Gitterstab T_x (beziehungsweise N_x), dessen Mitte durch die Abscisse x bezeichnet ist:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{V}'_x \cdot \frac{1}{\sin\varphi} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \left(1 + K\frac{\omega l^2}{4\Theta}\right) \quad . \quad 308)$$

in welcher Gleichung l die ganze Länge des Stabs zwischen den Gurtungs-Mittellinien bezeichnet.

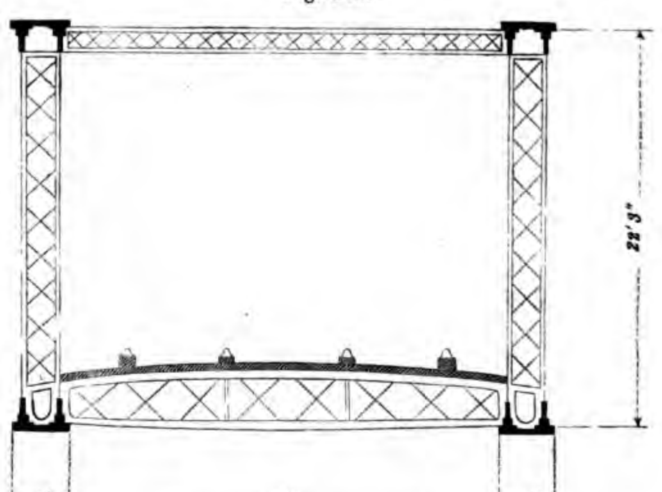
Für diejenigen Stäbe, welche abwechselnd auf Zug und Druck in Anspruch genommen sind, ist in der Regel Gleichung 308) massgebend; jedenfalls sollen solche Stäbe, auch wenn sie gegen Zug einen grössern Querschnitt als gegen Druck erfordern, als steife Stäbe construirt werden. — Wenn daher, wie bei continuirlichen Brücken geringerer oder mittlerer Spannweite ein grösserer Theil der Stäbe abwechslungsweise auf Zug und Druck in Anspruch genommen wird, so empfiehlt es sich häufig, Träger mit durchaus steifen Stäben, welche in §. 20 behandelt sind, anzuwenden, indem letztere noch den Vortheil liefern, dass die Steifigkeit der gezogenen Stäbe die rückwirkende Festigkeit der gedrückten Stäbe unterstützt. — Anderseits haben Brücken mit besonders geformten gedrückten Stäben den Vortheil, dass letztere, sofern sie ansehnliche Stärke verlangen, aus mehreren Stücken zusammengesetzt und demnach durchweg aus billigen Eisensorten hergestellt werden können.

204. Ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Klasse von Gitterbrücken bietet die bei Drogheda (an der irischen Ostküste) über den Boyne-Fluss gebaute und schon im Jahre 1855 eröffnete Eisenbahnbrücke; sie zeichnet sich durch zweckmässige Materialverwendung, grosse Leichtigkeit und die eigenthümliche Aus-

steifung der gedrückten Gitterstäbe aus. — Die nachfolgenden Notizen sind einem Aufsatze des Herrn Lohse im Jahrgange 1857 der Berliner Zeitschrift für Bauwesen entnommen, woselbst als Erbauer der Brücke Sir John Macneill und Mr. James Barton genannt sind.

Die Brücke hat für zwei Eisenbahngeleise nur zwei Hauptträger erhalten, wie aus beistehender Figur 248 ersichtlich ist;

Fig. 248.



hiebei zeigt aber jeder Hauptträger eine doppelte Gitterwand und ist die Aussteifung der gedrückten Stäbe dadurch erzielt, dass von letzteren je zwei gegenüberliegende Stäbe mittelst Winkeleisen und leichterem Gitterwerk zu einer steifen Strebe verbunden sind; da (abgesehen von den Endständern auf den Auflagern) gar keine Vertikalständer angebracht sind, so kann die Spannung in den gezogenen Stäben genau nach Gleichung 307) berechnet werden.

Die vorliegende Brücke hat Träger erhalten, welche drei Oeffnungen continuirlich überspannen; die Spannweiten sind:

Mittelöffnung von Mitte zu Mitte der Pfeiler:

267′ englisch = 81,38ᵐ

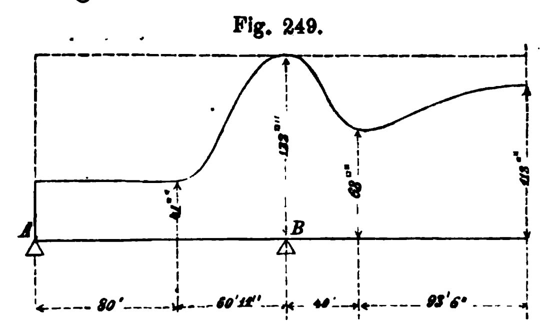
2 Aussen-Oeffnungen je 140′ 11″, zus. 289′ 10″ = 85,90ᵐ

Zusammen 167,28ᵐ

Auf den Pfeilern liegen die Gitter je mittelst eines einzigen Endständers von 0,915ᵐ Breite und gleicher Länge auf. — Bei Anwendung der Theorie der elastischen Linie war unter diesen Umständen keinerlei Zweifel über die in die Rechnung einzuführende Spannweite und wurden die Gurtungsquerschnitte den hie-

nach berechneten Angriffsmomenten entsprechend gewählt, wie solches durch Figur 249 näher erläutert ist. — Die Aenderungen

Fig. 249.



in den Querschnitten konnten ziemlich stetig wechselnd angenommen werden, da die Kopfbleche sehr dünn bis zu 6^{mm} und selbst 5^{mm} Dicke herab gewählt wurden. — Die Angriffsmomente werden, wie wiederholt erklärt, nach den Gleichungen 109) bestimmt, nachdem die Auflagerdrücke für den vorliegenden Fall und die angenommenen Belastungsweisen nach den Gleichungen 124) berechnet worden sind. (Einige der Werthe $\mathfrak{M}$ sind wenigstens annähernd in Tabelle XXIV. für $a : b = \frac{1}{2}$ gegeben.) Die Erbauer der Brücke haben dieselben Belastungsweisen angenommen, welche in N°. **78.** besprochen und in Tafel V. graphisch dargestellt sind; es wurde aber auch durch Losschlagen von Nieten und Beobachtung der betreffenden Stossfugen constatirt, dass die Wendepunkte der elastischen Linie (für welche $\mathfrak{M} = o$ ist) auch wirklich an den berechneten Punkten sich befinden; es wird anzunehmen sein, dass bei der Berechnung der elastischen Linie auf die ganze Länge einer Spannweite ein constantes Trägheitsmoment in die Rechnung eingeführt wurde, was trotz des Wechsels im Gurtungsquerschnitt nach obigen, an der ausgeführten Brücke angestellten Versuchen keine irgend erhebliche Aenderung in der Lage der Wendepunkte der elastischen Linie bewirkt hat.

Das Eigengewicht der Mittelöffnung wird zu 1,446 Tons per laufenden Fuss oder 9820^k per Meter, somit zu 2410^k per Meter und Geleise angegeben; hievon betragen:

die Gurtungen	1340 Kilo,	
das Gitterwerk	517 „	
die Auflagerständer	155 „	
obere Querverbindungen . .	42 „	
Windkreuze	68 „	
		2122
		288
	Zusammen	2410^k

Hienach ist das Eisengewicht der Mittelöffnung per Meter und Geleise bei 81,4^m Spannweite ausgedrückt durch die Relation:

$$p' = 261 + 290 = 2406 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad I.$$

wobei zu bemerken, dass das niedrige Fahrbahngewicht daher rührt, dass die Langschwellen, welche die Fahrschienen aufnehmen, von Holz hergestellt und daher in obigem Gewicht nicht inbegriffen sind. — Diese Langschwellen nebst eichener Bedielung mögen per laufenden Meter 400 Kilo, die Fahrschienen inclusive Befestigung 80^k per Meter Geleise wiegen, so dass wir als Totalgewicht erhalten:

$$p = 261 + 770 = 2886^k \quad . \ . \ . \ . \ . \quad II.$$

Als Verkehrslast k wurde per laufenden Fuss Geleise 1 Tonne oder 3334 Kilo per Meter angenommen; hienach beträgt die Totallast $q = p + k = 6220^k$.

205. Bei Aufstellung der Gleichung 308) ist angenommen, dass die Gitterstäbe nach der Längenrichtung des Gitters sich gegenseitig genugsam aussteifen, indem die Breite der Gitterstäbe meist in einem günstigen Verhältnisse zur Maschenweite steht (Anmerkung zu Gleichung 285) zu vergleichen); die Gleichung 308) setzt desshalb voraus, dass das Trägheitsmoment senkrecht zur Gitterwandfläche berechnet werde; in dieser Beziehung sind die gedrückten Streben der Drogheda-Boyne-Brücke jedenfalls stark genug, da die Höhe derselben senkrecht zur Wand nahezu $^1/_{12}$ der ganzen Strebenlänge beträgt. Dagegen kommt bei der grossen Maschenweite von 2,25^m die Biegung der Gitterstäbe in der Ebene der Gitterwand wesentlich in Betracht; man hat desshalb besondere Versuche angestellt, wobei ein Gitterträger von der Länge und Höhe der gedrückten Streben direct belastet wurde; in Entfernungen, welche den Gitterstab-Kreuzungen entsprechen, war dieser Stab durch Querstücke gehalten, welche letzteren sich nach der Längenrichtung des Gitterträgers frei bewegen konnten, aber ein Ausweichen nach den fraglichen Seiten nicht zuliessen; dieser Gitterträger befand sich also ziemlich genau unter denselben Bedingungen, wie die gedrückten Streben im Hauptträger selbst; da der Widerstand gegen Ausbiegen wesentlich durch die Höhe der Flantschen, also durch die Breite der Stäbe des Doppelgitters bedingt war, so wurden zu diesem Versuche Stäbe von nur 4 Zoll (102^{mm}) Breite verwendet; als Bruchfestigkeit per □Zoll englisch wurden 11 Tons ermittelt, doch glaubte Mr. Barton bei dem Umstande, dass der Bruch an einer schwächereu Stelle erfolgte, auf eine Festigkeit von 14 Tons per Quadratzoll oder 2200 Kilo per Quadratcentimeter schliessen zu dürfen; es ist diess etwa $^2/_3$ der absolut rückwirkenden Festigkeit und darf geschlossen werden, dass bei den stärkern Streben, deren Flachstäbe bis zu 10$^1/_2$ Zoll

oder 266^{mm} Breite haben, ein sehr günstiges Verhältniss $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_m}$ sich herausstellt; die schwächeren Stäbe, welche übrigens (zumal in Rücksicht auf die unterhalb angebrachte Fahrbahn) per □Zoll verhältnissmässig weniger in Anspruch genommen sind, geben ziemlich das Grenzverhältniss, welches zwischen Maschenweite und Gitterstabbreite noch zulässig ist; hienach soll also die Distanz der Gitterstabkreuzungen (die längs den Gitterstäben gemessene Maschenweite) höchstens das 18fache der Gitterstabbreite, im Allgemeinen aber bloss das 10 — 12fache betragen. — Diese Regel dürfte auch auf steife Gitterstäbe, wie solche z. B. in Figuren 237 und 238 dargestellt sind, Anwendung finden, und sehen wir auch bei den ausgeführten Brücken die Breite der T- und Ω-Eisen in entsprechendem Verhältnisse zur Maschenweite stehen. Flache Gitterstäbe befinden sich unter etwas abweichenden Verhältnissen, indem dieselben in der Ebene der Gitterwand verhältnissmässig grösseren Widerstand leisten; doch mögen hier andere Umstände wieder nachtheilig wirken, so dass man auch hier die Breite der Stäbe nicht wohl unter $^1/_{12}$ des Abstandes der Kreuzungspunkte annimmt. (Wie mehrfach erwähnt, werden Gitterbrücken mit durchaus flachen Stäben neuerdings selten angewendet.)

206. Ein weiteres Beispiel einer Gitterbrücke mit steifen gedrückten Stäben zeigt der Viadukt über die Saane bei Freiburg, wo neben den flachen Zugbändern gedrückte Stäbe von ⊔-Form angewendet sind; die beiden Rippen der letzteren sind indessen nur je 70^{mm} hoch, so dass die Steifigkeit der sonst üblichen T-Eisen nicht erreicht wird; es sind auch in Entfernungen von 5,58^{m}, beziehungsweise (gegen die Auflager) 4,18^{m}, besondere Vertikalabsteifungen hinzugefügt. — Die Brücke, welche im Jahrgang 1863 der Berliner Zeitschrift für Bauwesen beschrieben ist, hat noch die Eigenthümlichkeit, dass die Hauptträger über sieben Oeffnungen continuirlich hinweggehen; die fünf Mittelöffnungen haben je 38,8^{m}, die beiden Aussenöffnungen je 44,92^{m} Länge, so dass ein zusammenhängendes Gitter von 353,84^{m} Länge gebildet ist; die Continuität der Träger wurde nicht nur zum Hinüberschieben derselben, sondern insbesondere auch zur Aufstellung der eisernen Zwischenpfeiler benützt, wobei indess das Gitter durch besondere Spannketten armirt war. Die Anfertigung und Aufstellung des gesammten Eisenwerks geschah durch die Herren Schneider & Cie in Creusot, welche mit dem bekannten Hüttenwerke eine grosse Maschinenfabrik verbunden haben.

207. Da wo sich ausgesteifte Gitterstäbe kreuzen, sind in der Regel einzelne derselben gestossen, wodurch Stossplatten nothwendig werden; die Anbringung der letztern ist aber dadurch wesentlich erleichtert, dass an den betreffenden Stellen die Strebenkräfte verhältnissmässig klein sind.

Wenn beim vorliegenden Systeme die Vertikalständer fehlen (wie diess in der Regel der Fall ist), so dürfen die abwechslungsweise auf Zug und Druck in Anspruch genommenen Gitterstäbe keineswegs als Flacheisen construirt werden, da letztere auch verhältnissmässig kleine Drücke nicht aushalten können, sobald die freie Länge irgend erheblich ist. — Gitterstäbe, welche abwechslungsweise auf Druck und Zug in Anspruch genommen sind, fehlen aber bei keinem Gitterwerk und insbesondere sind es die mittleren Stäbe, welche bei einseitiger Belastung auch Druck auszuhalten haben; sodann aber ist (zumal bei geradlinigen Gurtungen) die in §. 20 erwähnte Modification der Strebenkräfte (in Folge deren bei untenliegender Fahrbahn die Strebendrücke vermindert werden) stets wesentlich geringer als der nach Gleichung 288) berechnete, in den Gitterstäben wirkende Druck; die zeitweise Pressung der mittleren Streben bleibt desshalb eine mathematische Nothwendigkeit.

Wenn daher in einzelnen Fällen von der Aussteifung der mittleren Gitterstäbe Umgang genommen wurde, so sind die möglichen Stellungen der Ueberlast nicht entsprechend berücksichtigt: wenn diese Mängel in der Ausführung weniger zu Tage getreten sind, so kann der Grund nur darin liegen, dass die relative Festigkeit der Gurtungen hier eingetreten ist und dass vermöge derselben andere Stäbe in erhöhtem Maasse zur Wirkung kamen.

Siebenter Abschnitt.

Ergänzungen und Schlussbetrachtungen.

§. 23. Ueber Röhrenbrücken.

208. Die Röhrenbrücken verhalten sich bezüglich ihrer Seitenwände wie andere Balkenbrücken und können die Seitenwände aus Fachwerk, Gitterwerk oder vollen Blechtafeln bestehen. Die Eigenthümlichkeit der Röhrenbrücken ist, dass die Gurtungen zweier (meist für ein Geleise bestimmten) Seitenwandungen zu einem Ganzen verbunden die vollständige Breite der Brücke einnehmen. Die Gurtungen bilden unterhalb den Boden, oberhalb die Decke der Röhre.

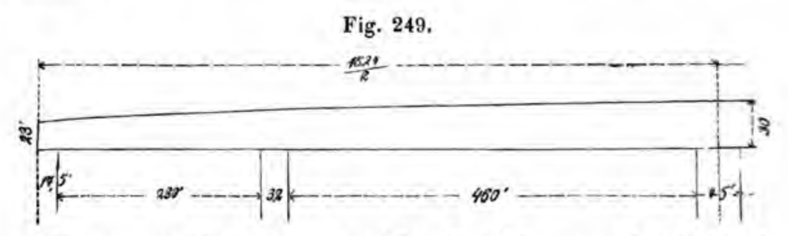
Die Formeln, welche in den vorhergehenden Abschnitten für Berechnung der Gurtungs- und Strebenkräfte gegeben sind, lassen sich direct auf die Röhrenbrücken anwenden, sobald nachgewiesen ist, dass die Gurtungskräfte gleichmässig über den ganzen Querschnitt verbreitet sind, welche Voraussetzung den Gleichungen 166) und 167) zu Grunde liegt. Ganz genau kann diese Bedingung bei den Röhrenbrücken nicht erfüllt werden, weil die Differenzen der Gurtungskräfte von den Strebenkräften aufgenommen werden müssen (wie aus den Gleichungen 18) und 173) hervorgeht), während die Strebenkräfte nur ausserhalb, d. h. zu beiden Seiten der breiten Gurtungsbänder wirken; die Gurtungen müssen also ausser den Längenspannungen auch noch Schubspannungen aufnehmen, veranlasst dadurch, dass die Differenzen der Gurtungskräfte zunächst an den Seitenwänden entstehen und mittelst der Scheerfestigkeit der Gurtungsbänder gegen die Mitte der letztern übertragen werden; diese mittleren Parthien werden daher immer etwas weniger in Anspruch genommen sein, als die den Seitenwänden zunächst gelegenen Gurtungstheile, wobei noch zu bemerken, dass die Gurtungen der

Röhrenbrücken in Folge ihrer grossen Breite stets aus einer Reihe von einzelnen Blechstreifen bestehen.

Um die Ungleichheit der Gurtungsspannungen auf ein unschädliches Minimum zurückzuführen, wird der seitliche Zusammenhang der einzelnen Gurtungsstreifen durch besondere Constructionsglieder unterstützt; es sind diess die Querrippen, welche vermöge ihrer in horizontalem Sinne vorhandenen relativen Festigkeit der gegenseitigen Verschiebung der einzelnen Gurtungsstreifen entgegenarbeiten. — Diese Querrippen dienen unterhalb zugleich als Querträger zur Aufnahme der Fahrbahn, oberhalb wie unterhalb geben sie zugleich rückwirkende Elemente für die Windverspannung, welche letztere durch die Gurtung selbst gebildet wird. — Insofern die Querrippen die Strebenkräfte auf die ganze Gurtungsbreite gleichmässig zu vertheilen haben, sind sie zunächst den Auflagern wesentlich mehr in Anspruch genommen, als gegen die Mitte der Brückenöffnungen; sie sollen also hier stärker, beziehungsweise zahlreicher angebracht werden.

209. Die Brittaniabrücke, welche mittelst Uebersetzung der Menaistrasse die Ueberfahrt zwischen England und Irland abkürzt, ist die erste und in mancher Hinsicht bedeutendste Röhrenbrücke; sie war bis vor Kurzem auch die am weitesten gespannte Balkenbrücke, ist aber in dieser Beziehung nunmehr durch die in Figur 228 dargestellte Brücke über den Leck übertroffen. — Die Brittaniabrücke, welche unter Oberleitung von Robert Stephenson erbaut wurde, hat vier Oeffnungen, wovon die beiden grösseren je 460′ englisch (140^m), die beiden kleineren je 230′ (70^m) Spannweite haben, wie aus Figur 249 des Näheren ersichtlich.

Fig. 249.

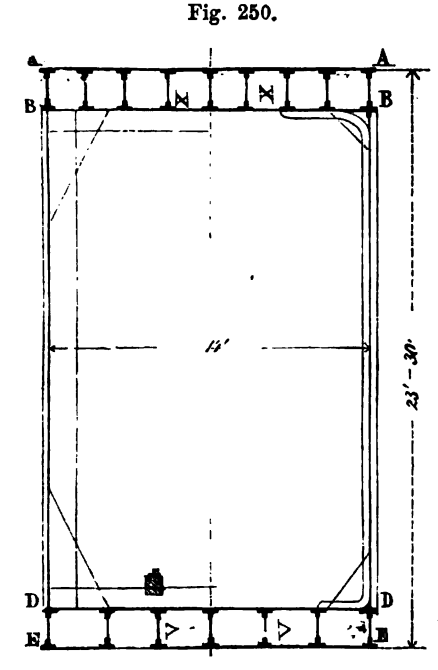


Die grosse Bedeutung, welche die Erbauung der Brittaniabrücke für die Anwendung eiserner Brückenconstructionen gehabt hat, liegt hauptsächlich darin, dass hier zum erstenmale das Schmiedeisen in grossem Maasstabe auch für die gepressten Trägertheile in Anwendung gekommen ist; die grosse Spannweite machte es insbesondere nothwendig, das Verhältniss zwischen Tragkraft und Eigengewicht genau zu untersuchen, was Veranlassung zu den äusserst wichtigen Versuchen von W. Fairbairn und E. Hodgkinson gab, welche Versuche sich insbesondere auch auf

die Festigkeit der Materialien (Schmied- und Gusseisen) bezogen. Eine genaue Beschreibung dieser Brücke und ihrer Baugeschichte verdanken wir dem mit der Ausführung betrauten E. Clark; das reich ausgestattete Werk desselben hat den Titel: „*The Brittania and Conway tubular bridges by Edvin Clark published under the supervision of Robert Stephenson.*"

Die Lage der Brücke war gegeben durch den sogenannten Brittaniafelsen, welcher breit genug ist, um einen kräftigen Mittelpfeiler aufnehmen zu können. Das erste Project Stephenson's zeigt zwei Bögen von 350′ Spannweite; die Admiralität verlangte aber ein lichtes Viereck von 460′ Weite und 105′ Höhe, wodurch die Bogenbrücke wegfiel. Man glaubte zu einer Kette greifen zu müssen und beabsichtigte, die Röhre als Aussteifung der Fahrbahn anzuwenden, indem die Aufhängung in anderer Weise als bei den gewöhnlichen Kettenbrücken gedacht war. — Dieses vorläufige Project der Brittaniabrücke betrachtete Stephenson als unbedingt richtig, falls eine noch grössere Weite zu überspannen wäre; man fand aber durch die schon erwähnten Versuche, dass eine Weite von 460′ englisch mit einer schmiedeisernen Röhre, d. h. mit einem geraden Balken ohne Hilfe einer Kette überspannt werden kann und setzte hienach die in Figur 249 ersichtlichen Hauptabmessungen fest, indem die Röhre als ein über sämmtliche Oeffnungen fortlaufendes Ganzes construirt, die Continuität über dem Mittelpfeiler aber nicht vollständig hergestellt wurde; die elastische Linie ist daselbst gebrochen, der Winkel, unter welchem beide Kurventheile zusammentreffen, wurde danach bemessen, dass die grössten Angriffsmomente über dem Auflager und innerhalb der freien Weite den grossen Oeffnungen möglichst gleichwerthig wurden. — Dieser bedeutsamen Anwendung der Theorie der elastischen Linie giengen directe Versuche voraus, welche an 36′ langen, 1″ dicken hölzernen Stäben angestellt und später durch Messungen an der fertigen Röhre bestätigt wurden. (Zu vergleich N°. **203**., wo ähnliche Versuche bei der Drogheda - Boyne - Brücke erwähnt sind.)

Fig. 250.



Weitere Untersuchungen constatirten, dass die Röhre bei der Biegung sich wirklich wie ein homogener Balken verhalte. — Ferner wurde empirisch an Metallröhren bestimmt, in welcher Anzahl und Stärke die Aussteifungen der Röhrenwände anzuwenden seien. Nach manchen missglückten Versuchen mit runden und elliptischen Röhren wurde der in Figur 250 dargestellte Querschnitt festgestellt. Die Decke, welche vorzugsweise gedrückt ist, hat mehr Zellen erhalten als der Boden, bei welch letzterem man insbesondere auf consequente und vollständige Anbringung der Stossplatten zu sehen hatte; eine eigenthümliche Anordnung der Stösse der doppelten Blechlagen des Röhrenbodens ist schon früher in Figur 51 dargestellt worden, und ist dieselbe durch beistehende Figur 251 näher erörtert; die in dieser Figur angegebenen kleinen Ringe stellen die Stösse der vertikalen Zellenwände

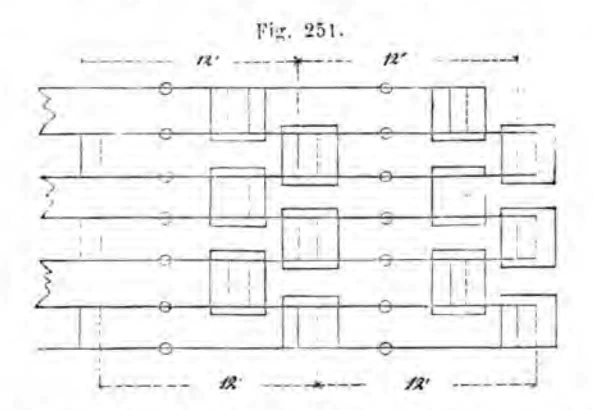


Fig. 251.

dar, welche zwischen den Stössen der horizontalen Blechlagen vertheilt sind; die in Figur 251 ersichtlichen Stossplatten sind 3' ($0{,}915^m$) lang, das Uebergreifen der Blechlagen beträgt je 1 Fuss ($0{,}305^m$).

Die Seitenwände der Röhre bestehen aus Blechen von 2' ($0{,}61^m$) Breite und einer Dicke von $^8/_{16}$—$^{10}/_{16}$ Zoll (13^{mm} bis 16^{mm}) Dicke. An den Stössen sind ⊥-Eisen als Deckplatten angewandt, wie diess in ähnlicher Weise bei der in Tafel VII. dargestellten Brücke von Langon ersichtlich ist.

Das Eigengewicht der Brittania-Brücke ist sehr bedeutend und beträgt für die grossen Röhren 3,30 tons per laufenden Fuss oder 11270 Kilo per Meter, für die kleinen Oeffnungen 2,6 tons oder 8670^m per Meter.

Die Aufstellung der Röhren geschah in der Weise, dass jede Oeffnung für sich zusammengesetzt wurde und zwar geschah diess bei den kleinen Oeffnungen auf einem festen Gerüste an Ort und

Stelle, bei den beiden grossen Oeffnungen aber auf besondern Werkplätzen; die fertigen grossen Röhren wurden sodann zwischen die Pfeiler geflösst und mittelst hydraulischen Pressen gehoben; die Verbindung der einzelnen Röhren geschah unter genauer Beobachtung und Berücksichtigung der Winkel der elastischen Linie, und wurde die Continuität, wie schon erwähnt, über dem Mittelpfeiler nur theilweise hergestellt. Auf diese Weise wurde ein übermässig grosses Angriffsmoment über diesem mittelsten Pfeiler vermieden und hatten die grossen Röhren ihre grösste Anstrengung während des Hebens auszuhalten; bei dem grossen Eigengewicht beträgt nämlich das Angriffsmoment in der Mitte der frei aufliegenden unbelasteten Röhre wesentlich mehr als das grösste Angriffsmoment, welches die belastete Brücke nach Verbindung der 4 Röhren auszuhalten hat.

210. Gleichzeitig mit der Brittaniabrücke wurde die Röhrenbrücke von Conway erbaut (1844—1848), welche eine einzige Oeffnung von 125^m Stützweite erhalten hat; dieselbe zeigt auch ziemlich dieselbe Anordnung, welche in Figur 250 für die Brittaniabrücke dargestellt ist. — Das Eisengewicht beträgt per laufenden Meter 9270 Kilo und entfallen hievon $58\,^0/_0$ auf die Blechplatten, $27\,^0/_0$ auf Winkel- und T-Eisen, $10\,^0/_0$ auf Deckplatten, $5\,^0/_0$ auf Nietenköpfe.

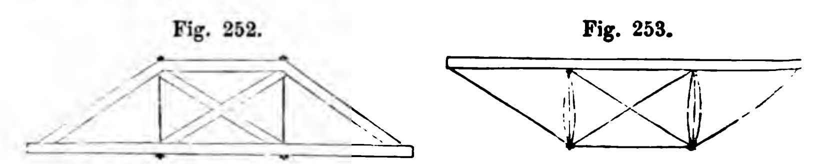
Eine ganz absonderliche Länge zeigt die Victoriabrücke bei Montreal, welche 1852 von Robert Stephenson projectirt und gleichfalls als Röhrenbrücke ausgeführt wurde; dieselbe hat 24 Oeffnungen von je $73{,}8^m$ und eine Mittelöffnung von $100{,}6^m$ Lichtweite; letztere grössere Röhre soll per laufenden Meter 6000^k wiegen. — Es sind diese Röhren nicht continuirlich, wesshalb auch der nur auf Zug in Anspruch genommene Boden mit Blechplatten ohne Längsrippen hergestellt wurde; bei der Decke ist die Zellenform für die grosse Mittelöffnung beibehalten, für die kleineren Röhren aber durch Rippen von T-Eisen ersetzt.

Eine Röhre mit Gitterwänden zeigt die Nogatbrücke bei Marienburg, welche gleichzeitig mit der Dirschauer Weichselbrücke (s. N⁰. **198.**) erbaut wurde, aber aus fortificatorischen Gründen eine möglichst geringe Höhe erhalten musste. — Boden und Decke dieser Brücke bestehen aus einer einzigen Blechlage, welche durch ⌐-förmige Längsrippen verstärkt und ausgesteift ist.

§. 24. Ueber Hängwerke.

211. Hängwerke und sogenannte **armirte Balken** können nach den Regeln für Fachwerkbrücken behandelt werden; doch macht es die geringe Anzahl und verhältnissmässige Grösse der Fache nothwendig, dass die einzelnen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ nach den Regeln, welche in N⁰. **124**. für den Fall der concentrirten Belastungen aufgestellt sind, und zwar nach den Gleichungen 170) — 173) berechnet werden. — Die in den Figuren 252 und 253 angegebenen Kreuzstreben können bei gleichförmiger Belastung ganz ausser Thätigkeit sein, sie sind aber durchaus nothwendig, sobald

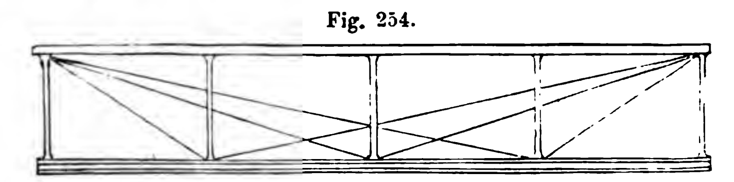
Fig. 252. Fig. 253.



eine einseitige Belastung eintritt. — Die Hängwerke und armirten Balken, deren einfachste Formen in den obenstehenden Figuren skizzirt sind, gehören in die Klasse der einfachen unsymmetrischen Fachwerke, deren Gurtungs- und Strebenkräfte nach den Gleichungen 186)—191) berechnet werden können, sobald die einzelnen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ nach den vorgenannten Gleichungen 170)—173) bestimmt worden sind.

212. Armirte Balken, d. h. Hängwerke, welche oberhalb durch ein gerades Längsband (Streckbalken) begrenzt sind, kann

Fig. 254.



man ohne Kreuzstreben construiren, wenn man für jede Hängsäule ein besonderes gezogenes Längsband anwendet, wie solches durch Figur 254 dargestellt ist; alsdann aber geht die wesentlichste Eigenthümlichkeit der Balkenbrücken verloren und wir haben eine Ketten- oder Hängbrücke vor uns; denken wir uns nämlich den obern Streckbaum durch Spann- oder Ankerketten ersetzt, so kommen auch die Hängsäulen in Wegfall und erhalten wir die in Figur 255 skizzirte Anordnung, für welche die Gleichungen 185) bis 191) nicht mehr anwendbar sind; die Berechnung geschieht, indem man die Punkte, an welchen die Fahrbahn aufgehängt ist,

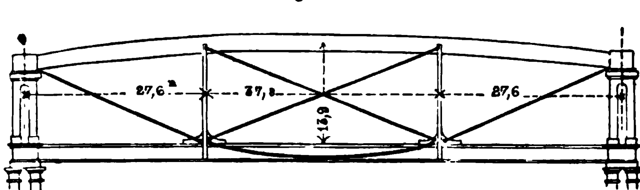
als feste Punkte, d. h. als Auflager betrachtet und die nach §. 8 bestimmten Auflagerdrücke nach den gegebenen Kettenrichtungen zerlegt. — Die Berechnung der Auflagerdrücke complizirt sich bei

Fig. 255.

Anwendung von continuirlichen Fahrbahnträgern durch die in Folge der Belastung eintretende Senkung der Stützpunkte, wofür die Regeln gleichfalls in §. 9 gegeben sind.

213. Ein Beispiel eines Hängwerkes von grösseren Dimensionen bietet die bekannte Brücke über den Wye bei Chepstow, deren Hauptöffnung in Figur 256 skizzirt ist. Diese Brücke ist von J. K. Brunel unmittelbar nach der Brittaniabrücke

Fig. 256.



und zwar ebenfalls ganz aus Schmiedeisen construirt worden. Wie bei der Brücke von Saltash, welche derselbe Brunel einige Jahre später erbaut hat, so besteht auch hier der gedrückte obere Streckbaum aus einer Röhre von (15^{mm} dickem) Kesselblech, wie solches aus der nachstehenden Figur 257 näher ersichtlich ist; die Röhren haben 2,75^{m} Durchmesser und sind in Entfernungen von 8^{m} durch starke Ringe ausgesteift. — Das untere Längsband und die Kreuzstreben sind als Ketten construirt; die Fahrbahn ist getragen durch Blechträger von 2,3^{m} Höhe, deren Blechwände nur 6^{mm} dick sind. Brunel hat über das Gewicht der Brücke folgende Notizen gegeben (s. Clark, Seite 103):

Es wiegt für ein Geleise:

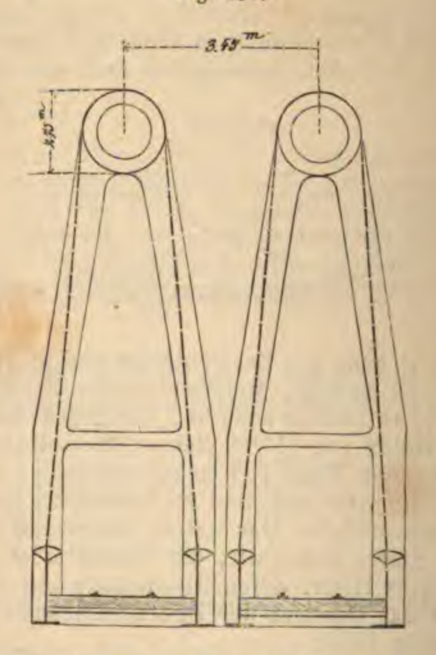
Röhre sammt Stossplatten	127, 5	tons,
Hiezu Bügel über den Pfeilern	7,75	"
Seitenplatten etc. zum Befestigen der Ketten . .	15,00	"
Dessgleichen für die Diagonalketten	2,25	"
Versteifungsringe in Abständen von 8 Meter . . .	4,25	"
Nietenköpfe etc.	4,75	"
Zusammen	161, 5	tons.

	Uebertrag	161,5 tons.
Ferner:		
Hauptbalken sammt Bolzen	. . . .	105,0 "
Diagonalketten	. . . .	23,0 "
Vertikalständer	. . . .	18,5 "
Sättel, Rollen an den Aufhängepunkten	. . . .	22,0 "
Fahrbahn, nämlich Hauptträger und Querträger	.	130,0 "
	Zusammen	460,0 tons.

Das Eisengewicht beträgt somit per Meter und Geleise bei 93^m Spannweite:

$$p' = 38\,l + 1400 = 4934 \text{ Kilo.}$$

Fig. 257.



Das bedeutende Gewicht der Fahrbahn ist durch die grosse Fachweite bedingt; im Uebrigen ist das Gewicht ziemlich entsprechend dem Gewichte der Saltashbrücke, wie solches in N°. **167.** angegeben ist.

§. 25. Continuirliche Träger über mehrere Oeffnungen.

214. Brücken mit mehreren Oeffnungen erhalten neuerdings vielfach frei aufliegende Träger, wie dies die bei den Fachwerkbrücken gegebenen Beispiele zeigen. — Anderseits werden von den französischen Ingenieuren continuirliche Brücken immer noch mit Vorliebe angewendet und zwar wird häufig eine grössere Zahl von Oeffnungen durch einen zusammenhängenden Träger überbrückt, wie diess das Beispiel der Saanebrücke bei Freiburg zeigt (N^0. **205.**). — Die französischen Schriften über Balkenbrücken geben daher stets auch eingehende Berechnungen der elastischen Linie unter weiterer Ausbildung des in N^0. **21.** und **22.** beschriebenen Verfahrens von Clapeyron.

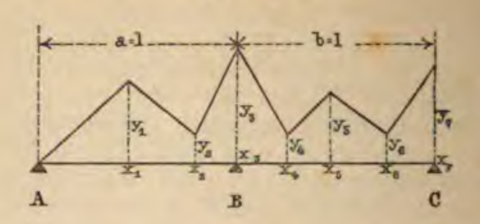
In den „*Annales des Ponts et Chaussées,* Jahrgang 1866" hat M Renaudot für eine Reihe von Fällen die hauptsächlichsten Werthe der Angriffsmomente 𝔐 und Vertikalkräfte 𝔙 entwickelt, und wollen wir diejenigen Resultate, welche sich auf vier und fünf gleich grosse Oeffnungen beziehen, in den Tabellen LIX. bis LXI. wiedergeben, theils als Beispiel der dortigen Behandlungsweise, theils der practischen Anwendung wegen, welche bei Gitter- oder Blechwandbrücken sich sehr bequem darbietet.

Bei 4 Oeffnungen lassen sich durch geeignete Betrachtungen auch die äussersten Lagen der Punkte 𝔙 = o aus den Resultaten der Tabelle LIX. entnehmen; bei 5 Oeffnungen ist diess nicht mehr thunlich. Wo die nachstehenden Tafeln LIX. bis LXI. nicht ausreichen (insbesondere bei abweichender Weite der Aussenöffnungen) kann man jederzeit das in den Nummern **21.** und **22.** angegebene Verfahren von Clapeyron anwenden, welches entsprechend den in den Nummern **74.**, sodann **81.** und **82.** behandelten Fällen auch bei Senkung der Zwischenstützen sich allgemein benützen lässt.

Tabelle

Continuirliche Träger mit

Fig. 258.



$\frac{k}{p}$	Grösste Angriffsmomente $\mathfrak{M}$.								
			$x_2=0,786\,l$	$x_3=l$	$x_4=0,268\,l$			$x_6=0,804\,l$	$x_7=$
	$\frac{x_1}{l}$	$\frac{y_1}{p\,l^2}$	$\frac{y_2}{p\,l^2}$	$\frac{y_3}{p\,l^2}$	$\frac{y_4}{p\,l^2}$	$\frac{x_5}{l}$	$\frac{y_5}{p\,l^2}$	$\frac{y_6}{p\,l^2}$	$\frac{y_7}{p\,l^2}$
0,00	0,393	0,0772	0,0000	0,1071	0,0000	0,563	0,0364	0,0000	0,071
1,00	0,420	0,1761	0,0421	0,2277	0,0491	0,527	0,1168	0,0402	0,178
1,25	0,423	0,2009	0,0526	0,2578	0,0614	0,526	0,1369	0,0502	0,20
1,50	0,425	0,2258	0,0631	0,2879	0,0737	0,526	0,1570	0,0603	0,232
1.75	0,427	0,2506	0,0737	0,3181	0,0859	0,524	0,1772	0,0703	0,258
2,00	0,429	0,2755	0,0842	0,3482	0,0982	0,524	0,1973	0,0804	0,287
2,50	0,431	0,3253	0,1052	0,4085	0,1228	0,523	0,2375	0,1004	0,33
3,00	0,433	0,2750	0,1263	0,4688	0,1473	0,522	0,2778	0,1205	0,392
4,00	0,436	0,4746	0,1684	0,5893	0,1964	0,521	0,3583	0,1607	0,50
5,00	0,438	0,5722	0,2105	0,7098	0,2455	0,521	0,4388	0,2009	0,6071

LIX.

4 gleich grossen Spannweiten.

Fig. 259.

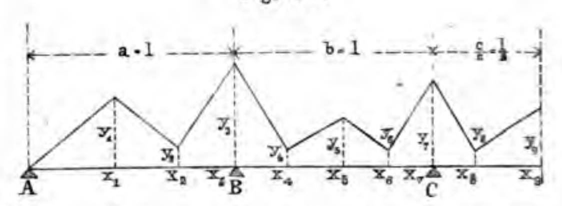
Grösste Vertikalkräfte 𝔙 und Auflagerreactionen A, B, C.

$x_0 = 0{,}000$	$x_1 = 0{,}3931$	$x_2 = 1$	$x_2 = 0{,}000$	$x_3 = 0{,}5361$	$x_4 = 1$	$\frac{B}{pl}$	$\frac{C}{pl}$
$\frac{y_0}{pl} = \frac{A}{pl}$	$\frac{y_1}{pl}$	$\frac{{}^a y_2}{pl}$	$\frac{{}^b y_2}{pl}$	$\frac{y_3}{pl}$	$\frac{y_4}{pl}$		
0,3929	**0,0000**	**0,6071**	**0,5357**	**0,0000**	**0,4643**	**1,1429**	**0,9286**
0,8393	0,0536	1,2277	1,1384	0,0670	1,0357	2,3661	2,0741
0,9509	0,0670	1,3828	1,2891	0,0837	1,1786	2,6716	2,3571
1,0625	0,0804	1,5379	1,4397	0,1004	1,3214	2,9777	2,6429
1,1741	0,0937	1,6931	1,5904	0,1172	1,4643	3,2835	2,9286
1,2857	0,1071	1,8482	1,7411	0,1339	1,6071	3,5893	3,2143
1,5089	0,1339	2,1586	2,0424	0,1647	1,8929	4,2009	3,7857
1,7321	0,1607	2,4688	2,3438	0,2009	2,1786	4,8125	4,3571
2,1786	0,2143	3,0893	2,9464	0,2679	2,7500	6,0357	5,5000
2,6250	0,2679	3,7098	3,5491	0,3349	3,3214	7,2589	6,6429

Tabellen

Continuirliche Träger mit

Fig. 260.



LX. Grösste Angriffsmomente

$\frac{k}{p}$	$\frac{x_1}{l}$	$\frac{y_1}{p\,l^2}$	$x_2 = 0{,}7891$ $\frac{y_2}{p\,l^2}$	$x_3 = l$ $\frac{y_3}{p\,l^2}$	$x_4 = 0{,}2\ldots$ $\frac{y_4}{p\,l^2}$
0,00	**0,395**	**0,0779**	**0,0000**	**0,1053**	**0,0000**
1,00	0,421	0,1773	0,0416	0,2249	0,0491
1,25	0,424	0,2022	0,0519	0,2548	0,0614
1,50	0,426	0,2272	0,0623	0,2847	0,0737
1,75	0,428	0,2522	0,0727	0,3146	0,0859
2,00	0,430	0,2771	0,0831	0,3445	0,0982
2,50	0,432	0,3271	0,1039	0,4043	0,1228
3,00	0,434	0,3771	0,1247	0,4641	0,1473
4,00	0,437	0,4771	0,1662	0,5837	0,1964
5,00	0,439	0,5771	0,2078	0,7033	0,2455

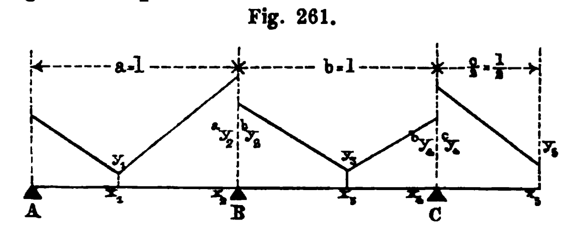
LXI. Grösste Angriffsmomente

$\frac{k}{p}$	$x_0 = 0{,}000$ $\frac{y_0}{p\,l} = \frac{A}{p\,l}$	$x_1 = 0{,}395\,l$ $\frac{y_1}{p\,l}$	$x_2 = l$ $\frac{{}^a y_2}{p\,l}$	$x_2 = 0{,}000$ $\frac{{}^b y_2}{p\,l}$	$x_3 = 0{,}52\ldots$ $\frac{y_3}{p\,l}$
0,00	**0,3947**	**0,0000**	**0,6053**	**0,5263**	**0,0000**
1,00	0,8421	0,0526	1,2240	1,1244	0,0718
1,25	0,9539	0,0658	1,3798	1,2739	0,0897
1,50	1,0658	0,0789	1,5347	1,4234	0,1077
1,75	1,1776	0,0921	1,6896	1,5730	0,1256
2,00	1,2895	0,1053	1,8445	1,7225	0,1435
2,50	1,5132	0,1316	2,1543	2,0215	0,1794
3,00	1,7368	0,1579	2,4641	2,3206	0,2153
4,00	2,1842	0,2105	3,0837	2,9187	0,2871
5,00	2,6316	0,2632	3,7033	3,5167	0,3589

LX. und LXI.

5 gleich grossen Spannweiten.

Fig. 261.



𝔐. Figur 260.

$\frac{x_5}{l}$	$\frac{y_5}{p\,l^2}$	$x_6 = 0{,}784\,l$ $\frac{y_6}{p\,l^2}$	$x_7 = l$ $\frac{y_7}{p\,l^2}$	$x_8 = 0{,}197\,l$ $\frac{y_8}{p\,l^2}$	$x_9 = \frac{l}{2}$ $\frac{y_9}{p\,l^2}$
0,526	0,0333	0,00 0	0,0789	0,0000	0,0461
0,520	0,1122	0,0423	0,1902	0,0397	0,1316
0,519	0,1320	0,0529	0,2180	0,0496	0,1530
0,518	0,1517	0,0635	0,2458	0,0595	0,1743
0,518	0,1715	0,0740	0,2736	0,0694	0,1957
0,518	0,1913	0,0846	0,3014	0,0793	0,2171
0,517	0,2308	0,1058	0,3571	0,0992	0,2599
0,516	0,2703	0,1269	0,4127	0,1190	0,3026
0,516	0,3756	0,1693	0,5239	0,1587	0,3882
0,515	0,4810	0,2119	0,6253	0,1983	0,4737

𝔙 und Auflagerreactionen A, B, C. Fig. 261.

$x_4 = l$ $\frac{{}^by_4}{p\,l}$	$x_4 = o$ $\frac{{}^cy_4}{p\,l}$	$x_5 = \frac{l}{2}$ $\frac{y_5}{p\,l}$	$\frac{B}{p\,l}$	$\frac{C}{p\,l}$
0,4737	0,5000	0,0000	0,1316	0,9737
1,0502	1,0909	0,0909	2,3493	2,1411
1,1944	1,2386	0,1136	2,6537	2,4330
1,3385	1,3864	0,1364	2,9581	2,7249
1,4827	1,5341	0,1591	3,2626	3,0167
1,6268	1,6818	0,1818	3,5670	3,3086
1,9151	1,9773	0,2273	4,1758	3,8923
2.2033	2,2727	0,2727	4,7847	4,4761
2,7799	2,8636	0,3636	6,0024	5,6435
3,3565	3,4545	0,4545	7,2201	6,8110

§. 26. Schlussbetrachtungen.

215. Die Beispiele von ausgeführten Brücken, welche in den vorhergehenden Abschnitten bei den einzelnen Typen der Balkenbrücken eingeschaltet sind, geben die Anwendung der im 2. und 3. Abschnitte aufgeführten allgemeinen Regeln zugleich mit der Behandlung der jeweiligen Constructionsgattung.

Continuirliche Träger sind behandelt in den Beispielen der Brücke von Langon N°. **114.**, Eipelbrücke N°. **191.**, Weichselbrücke bei Dirschau N°. **192.**, Boynebrücke von Drogheda N°. **203.** und Brittaniabrücke N°. **208.**

Diese Beispiele zeigen sämmtlich Blechwand- oder Gitterbrücken, während die Fachwerkbrücken meist frei aufliegend construirt sind; es ist jedoch kein Hinderniss, letztere ebenfalls continuirlich herzustellen.

Freiaufliegende, geradlinig horizontal begrenzte Träger bieten die einfachste Form der Balkenbrücken dar; ausser der in N°. **109.** — **113.** behandelten Blechbalkenbrücke sind insbesondere im fünften Abschnitte in §. 16 eine Reihe von geraden Fachwerken beschrieben und durch die lithographirten Tafeln IX bis XII. näher erläutert.

Freiaufliegende Träger mit gekrümmten Gurtungen werden sehr häufig als einfache unsymmetrische Systeme behandelt, ob sie nun parabolisch sind (§. 17) oder eine hievon abweichende Form zeigen (§. 18). Zwei vollständig berechnete Beispiele: die Mainbrücke bei Kitzingen N°. **172.** und **173.**, und die Colomakbrücke, N°. **179.** und **180.** zeigen die Anwendung der für beliebige Gurtungsform passenden Regeln; die Anmerkung am Schlusse von N°. **180.** zeigt den Unterschied zwischen diesen beiden Beispielen und kann je nach dem vorliegenden Falle das eine oder andere Verfahren angewendet werden.

Doppelte unsymmetrische Fachwerke zeigen die Donaubrücke bei Ingolstadt, N°. **159.** und **160.**, sowie die Elbbrücke bei Tangermünde, N°. **182.** und **183.** Die hier angewendeten Rechnungsmethoden lassen sich in ganz gleicher Weise auch auf dreifache Systeme anwenden.

Querträger von Eisenbahnbrücken sind berechnet in Nummern **110.**, **153.**, **157.** und **181.**, und zwar zeigt letzteres Beispiel einen Fachwerkträger, die Beispiele in N°. **110.** und **157.** Blechbalkenträger, während der in N°. **153.** beschriebene Querträger bezüglich der Gurtung als Fachwerkträger, bezüglich der Wandverstrebung als eine Combination von Blechwand und Fachwerk zu betrachten ist.

Schwellenträger werden meist als homogene I-förmige Träger angeordnet, für deren Berechnung Tabelle XXIX. mit Vortheil angewendet werden kann, nachdem die einzelnen Angriffsmomente $\mathfrak{M}$ (welchen die $\Sigma X y$ numerisch gleich sind) entweder aus den Tabellen XXX. oder nach Maassgabe der Figuren 123, 181 oder 217 bestimmt worden sind.

216. Ueber die in die statische Berechnung einzuführenden Eigengewichte der Eisenbahnbrücken sind in Tab. XVII[a]. Angaben gegeben, welche einer grössten Gurtungsspannung von 700 Kilo per Quadratcentimeter entsprechen. Die im Vorstehenden gegebenen Beispiele von ausgeführten Brücken sollen nun hiemit verglichen werden und zwar sind solche Constructionen ausgewählt worden, bei welchen die einzelnen Querschnittdimensionen entsprechend den in Aussicht genommenen Krafteinwirkungen angeordnet sind. Es findet jedoch auch bei diesen rationell construirten Brücken insofern noch eine Verschiedenheit statt, als bei der Berechnung theils abweichende Verkehrslasten, theils verschiedene Maximalspannungen angewendet wurden. In Tabelle LXII. sind daher neben den wirklich vorhandenen — per Meter und Geleise angegebenen — Eisengewichten p' auch stets die zugehörigen variablen (Verkehrs-) Belastungen, sowie die angenommenen Gurtungsspannungen verzeichnet.

Bei den betrachteten Brückenconstructionen war überall das Bestreben, das Material in allen Theilen der Hauptträger mit gleicher Maximalspannung (Pressung) anzustrengen, welche Spannung in der Tabelle als grösste Gurtungsspannung angegeben ist; selbstverständlich ist mit Rücksicht auf thunliche Einfachheit der Construction eine geringere Anstrengung einzelner Theile unvermeidlich, übrigens bei einzelnen der Beispiele mehr als bei andern vorhanden. Die Fahrbahn — Querträger und Schwellenträger in sich begreifend — wird meist auf eine niedrigere Maximalbelastung berechnet, weil diese Brückentheile von den Stössen der Eisenbahnfahrzeuge mehr in Anspruch genommen sind; diese verhältnissmässig geringere Anstrengung der Fahrbahntheile findet bei den meisten in Frage kommenden Brücken in ziemlich ähnlicher Weise statt.

Es ist nach diesen Erläuterungen anzunehmen, dass eine Brücke direct in demselben Maasse schwerer wird, je niedriger die grösste Gurtungsspannung $\mathfrak{A}$ bemessen ist; anderseits wird eine Brücke schwerer, je grösser das Eigengewicht und die Verkehrslast bei der statischen Berechnung angenommen werden.

Um daher die Gewichte der betrachteten Brücken richtig vergleichen zu können, muss in erster Linie das Eisengewicht auf dieselbe grösste Spannung reduzirt werden, für welche wir $\mathfrak{A} = 700$ angenommen und hienach die modifizirten Gewichte p_0' berechnet haben.

Tabelle

	Bezeichnung der Brücken.	Spannweite.	Variable Belastung — k — per lauf. Meter.	Hiebei grösste Spannung in den Gurtungen.	Eigengewicht per Meter und Geleise.
1.	Blechbalkenbrücke von 15m Spannweite nach §. 12. Eingeleisig, frei aufliegend.	15,0m	4750	650	33,3 l + 330 = 850
2.	Brenzbrücke bei Königsbronn. Eingeleisig, frei aufliegend, Fachwerk.	19,25m	4660	530	42,7 l + 308 = 1130
3.	Blau-Canalbrücke bei Ehrenstein. Eingeleisig, frei aufliegend, Gitterträger.	19,40m	4660	660	36,0 l + 500 = 1200
4.	Project der kleineren Oeffnungen der Elbbrücke bei Meissen. Eingeleisig, frei aufliegend, parabolisches Fachwerk.	21,6m	5440	700	27,0 l + 325 = 900
5.	Brahebrücke bei Czersk. Eingeleisig, frei aufliegend, parabolisches Fachwerk.	25,4m	4470	684	26,3 l + 338 = 1078
6.	Brücke über den Colomak. Eingeleisig, frei aufliegend, Fachwerk.	33,8m	4564	670	34,3 l + 460 = 1620
7.	Mainbrücke bei Kitzingen. Eingeleisig, frei aufliegend, System Pauli.	37,0m	3800	734	23,5 l + 314 = 1180
8.	Isarbrücke bei München. Eingeleisig, frei aufliegend, Fachwerk.	50,2m	5440	600	37,3 l + 668 = 2634
9.	Donaubrücke bei Ingolstadt. Eingeleisig, frei aufliegend, Fachwerk.	54,24m	4840	600	41,0 l + 685 = 2908

LXII.

$p' + k$	$p_0' =$ p' reduzirt auf $\mathfrak{A} = 700$.	k_a nach Tab. XVII^a^.	$q_a = p'_a + k_a$	$p'_a =$ Eigengewicht p_0' reduzirt im Verhältnisse $q_a : (p' + k)$	$k_a + p'_a$
5600	31,0 l + 306 = 770	4750	5520	30,5 l + 300 = 757	5507
5790	32,3 l + 233 = 855	4660	5515	31,0 l + 218 = 815	5475
5860	34,0 l + 470 = 1130	4660	5790	33,4 l + 464 = 1112	5772
6340	27,0 l + 325 = 900	4600	5500	23,6 l + 284 = 794	5394
5548	25,7 l + 330 = 982	4550	5532	25,7 l + 330 = 982	5532
6184	32,8 l + 440 = 1550	4440	5990	31,7 l + 428 = 1500	5940
4980	24,8 l + 330 = 1240	4420	5660	27,8 l + 376 = 1405	5825
8074	32,4 l + 630 = 2260	4230	6490	25,9 l + 504 = 1805	6035
7064	35,1 l + 587 = 2490	4200	6104	30,0 l + 500 = 2137	6337

Tabelle

	Bezeichnung der Brücken.	Spannweite.	Variable Belastung — k — per lauf. Meter.	Hiebei grösste Spannung in den Gurtungen.	Eigengewicht per Meter und Geleise.
10.	Elbbrücke bei Meissen. Eingeleisig, frei aufliegend, Fachwerk.	54,6m	4142	731	29,7 l + 34[illegible] = 1970
11.	Elbbrücke bei Tangermünde. Zweigeleisig, frei aufliegend, System Schwedler.	65,9m	3725	731	20,9 l + 44[illegible] = 1817
12.	Brücke bei Langon. Zweigeleisig, continuirlich, Blechwandbrücke.	68,0m *)	4000	700	27,0 l + 44[illegible] = 2274
13.	Boynebrücke bei Drogheda. Zweigeleisig, continuirlich, Gitterträger.	81,4m **)	3333	700	26,0 l + 29[illegible] = 2407
14.	Rheinbrücke bei Cöln. Zweigeleisig, continuirlich, Gitterträger.	98,22	2550	731	27,9 l + 42[illegible] = 3336
15.	Rheinbrücke bei Mainz. Eingeleisig, frei aufliegend, System Pauli.	105,2	2930	820	24,33 l + 67[illegible] = 3230
16.	Royal-Albertbrücke bei Saltash Eingeleisig, frei aufliegend, parabolisches Fachwerk.	138,68	3334	700	39,3 l + 112[illegible] = 6575

*) Mittlere Weite der 3 Oeffnungen, deren Durchschnittsgewicht angegeben ist.

**) Mittlere Oeffnung, auf welche allein die Gewichtsangabe sich bezieht.

LXII. (Schluss.)

$p' + k$	$p_0' =$ p' reduzirt auf $\mathfrak{A} = 700$.	k_a nach Tab. XVII^a^.	$q_a = p'_0 + k_a$.	$p_a' =$ Eigengewicht p_0' reduzirt im Verhältnisse $q_a : (p' + k)$	$k_a + p'_a$
6100	31,0 l + 360 = 2054	4200	6254	31,8 l + 370 = 2116	6316
5542	21,8 l + 460 = 1896	4000	5896	23,2 l + 490 = 2020	5916
6274	27,0 l + 445 = 2274	7000	6274	27,0 l + 445 = 2274	6274
5740	26,0 l + 290 = 2407	3850	6257	28,3 l + 316 = 2620	6470
5886	29,1 l + 438 = 3483	3700	7183	35,5 l + 534 = 4020	7720
6160	28,5 l + 792 = 3780	3650	7430	34,2 l + 952 = 4550	8200
9909	39,3 l + 1125 = 6575	3334	9909	39,3 l + 1125 = 6575	9909

In zweiter Linie ist eine und dieselbe Verkehrsbelastung zu Grunde zu legen, wesshalb wir für jede Spannweite die in Tabelle XVII^a^. angegebene variable Last k bei jeder Brücke beigesetzt und mit k_a bezeichnet haben.

Die Summe der je nach denselben Grundsätzen berechneten Gewichte p_0', beziehungsweise k_a, ist nun in Vergleichung zu bringen mit den in den vorderen Columnen angegebenen, bei der Projectirung der Brücken zu Grunde gelegten Werthe p',

beziehungsweise k, und ist anzunehmen, dass eine nach Tabelle XVII^a. und für eine Spannung $\mathfrak{A} = 700$ berechnete Brücke gleicher Construction und Spannweite im Verhältnisse $(p_0' + k_a) : (p' + k)$ schwerer ausfallen müsste, als die unter andern (aus der Tabelle ersichtlichen) Bedingungen projectirten Bauwerke in Wirklichkeit zeigen.

Die nach dem Verhältnisse $(p_0' + k_a) : (p' + k)$ modifizirten ideellen Eisengewichte sind in der Tabelle LXII. unter der Bezeichnung p'_a gegeben und ist schliesslich in der letzten Columne die Summe der Werthe p'_a und k_a gezogen, welche Totalbelastungen q_a einer gleichartigen Behandlung sämmtlicher Projecte entsprechen.

Diese letzte Columne der Werthe q_a zeigt die eigenthümliche Erscheinung, dass die einzelnen Werthe, soweit die Spannweiten zwischen 30^m und 80^m sich bewegen, nahezu constant sind, so verschiedenartig die angewandten Constructionen sind; es ist diess in Uebereinstimmung damit, dass die in der vorletzten Columne verzeichneten Werthe p_a' ziemlich stetig mit der Grösse der Spannweiten wachsen, während die nach Tabelle XVII^a. berechneten Werthe k_a entsprechend abnehmen.

Dass die Eigengewichte p' bei Spannweiten über 80^m wesentlich rascher zunehmen, als die Verkehrslast k abnimmt, ist schon oben in N^0. **198**. erläutert.

Als eine weitere Thatsache zeigt sich, dass die zweigeleisigen Brücken verhältnissmässig leichter sind, als die eingeleisigen; es ist diess auch theilweise die Ursache, warum die Kölner Rheinbrücke sich nach unserer Vergleichung fast ebenso leicht darstellt, als die Mainzer Rheinbrücke, welche besonders sorgfältig construirt ist; — allerdings konnte bei unserer Vergleichung eine immerhin vorhandene stärkere Anstrengung einzelner Constructionsglieder, welche bei einzelnen Brücken in höherem Maassstabe als bei anderen vorhanden ist, nicht in Betracht gezogen werden, so dass der Werth der einzelnen Constructionssysteme nicht unbedingt nach vorstehend aufgeführten Gewichten beurtheilt werden darf; wir werden aus der vorstehenden Tabelle vielmehr schliessen dürfen, dass sämmtliche Systeme, sofern sie rationell angewendet werden, für dieselbe Spannweite ziemlich übereinstimmende Eisengewichte ergeben, unterschieden hauptsächlich durch den Grad der Sorgfalt, welcher bei der Projectirung angewendet wurde.

Anhang.

Tabelle der trigonometrischen Functionen.

Aus den Bauzeichnungen lässt sich jederzeit tangens oder cotangens der betreffenden Winkel bestimmen; die Tabelle dient alsdann zur Bestimmung der übrigen trigonometrischen Functionen.

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
0	0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	0	90
	10	0,00291	0,99999	0,00291	343,77371	50	
	20	0,00582	0,99998	0,00582	171,88540	40	
	30	0,00873	0,99996	0,00873	114,58865	30	
	40	0,01164	0,99993	0,01164	85,93979	20	
	50	0,01554	0,99989	0,01455	68,75009	10	
1	0	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	0	89
	10	0,02036	0,99979	0,02036	49,10388	50	
	20	0,02327	0,99973	0,02328	42,96408	40	
	30	0,02618	0,99966	0,02619	38,18846	30	
	40	0,02908	0,99958	0,02910	34,36777	20	
	50	0,03199	0,99949	0,03201	31,24158	10	
2	0	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	0	88
	10	0,03781	0,99929	0,03783	26,43160	50	
	20	0,04071	0,99917	0,04075	24,54176	40	
	30	0,04362	0,99905	0,04366	22,90377	30	
	40	0,04653	0,99892	0,04658	21,47040	20	
	50	0,04943	0,99878	0,04949	20,20555	10	
3	0	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	0	87
	10	0,05524	0,99847	0,05533	18,07498	50	
	20	0,05814	0,99831	0,05824	17,16934	40	
	30	0,06105	0,99813	0,06116	16,34985	30	
	49	0,06395	0,99795	0,06408	15,60478	20	
	50	0,06685	0,99776	0,06700	14,92442	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
4	0	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	0	86
	10	0,07266	0,99736	0,07285	13,72674	50	
	20	0,07556	0,99714	0,07578	13,19688	40	
	30	0,07846	0,99692	0,07870	12,70620	30	
	40	0,08136	0,99668	0,08163	12,25051	20	
	50	0,08426	0,99644	0,08456	11,82617	10	
5	0	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	0	85
	10	0,09005	0,99594	0,09042	11,05943	50	
	20	0,09295	0,99567	0,09335	10,71191	40	
	30	0,09585	0,99540	0,09629	10,38540	30	
	40	0,09874	0,99511	0,09923	10,07803	20	
	50	0,10164	0,99482	0,10216	9,78817	10	
6	0	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	0	84
	10	0,10742	0,99421	0,10805	9,25530	50	
	20	0,11031	0,99390	0,11099	9,00983	40	
	30	0,11320	0,99357	0,11393	8,77681	30	
	40	0,11609	0,99324	0,11688	8,55555	20	
	50	0,11898	0,99290	0,11983	8,34496	10	
7	0	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	0	83
	10	0,12476	0,99219	0,12574	7,95302	50	
	20	0,12764	0,99182	0,12869	7,77035	40	
	30	0,13053	0,99144	0,13165	7,59575	30	
	40	0,13341	0,99106	0,13461	7,42871	20	
	50	0,13629	0,99067	0,13758	7,26873	10	
8	0	0,13916	0,99027	0,14054	7,11537	0	82
	10	0,14205	0,98986	0,14351	6,96823	50	
	20	0,14493	0,98944	0,14648	6,82694	40	
	30	0,14781	0,98902	0,14945	6,69116	30	
	40	0,15069	0,98858	0,15243	6,56055	20	
	50	0,15356	0,98814	0,15540	6,43484	10	
9	0	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	0	81
	10	0,15931	0,98723	0,16137	6,19703	50	
	20	0,16218	0,98676	0,16434	6,08444	40	
	30	0,16505	0,98629	0,16734	5,97576	30	
	40	0,16792	0,98580	0,17033	5,87080	20	
	50	0,17078	0,98531	0,17333	5,76128	10	
10	0	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	0	80
	10	0,17651	0,98430	0,17933	5,57638	50	
	20	0,17937	0,98378	0,18233	5,48451	40	
	30	0,18224	0,98325	0,18534	5,39552	30	
	40	0,18509	0,98272	0,18835	5,30928	20	
	50	0,18795	0,98218	0,19136	5,22566	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
11	0	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	0	79
	10	0,19366	0,98107	0,19740	5,06534	50	
	20	0,19652	0,98050	0,20042	4,98950	40	
	30	0,19937	0,97992	0,20345	4,91516	30	
	40	0,20222	0,97934	0,20648	4,84300	20	
	50	0,20507	0,97875	0,20952	4,77286	10	
12	0	0,20791	0,97815	0,21256	4,70464	0	78
	10	0,21076	0,97754	0,21560	4,63825	50	
	20	0,21360	0,97692	0,21864	4,57363	40	
	30	0,21644	0,97630	0,22169	4,51071	30	
	40	0,21928	0,97566	0,22475	4,44942	20	
	50	0,22212	0,97502	0,22781	4,38969	10	
13	0	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	0	77
	10	0,22778	0,97371	0,23393	4,27471	50	
	20	0,23062	0,97304	0,23700	4,21933	40	
	30	0,23345	0,97237	0,24008	4,16530	30	
	40	0,23627	0,97169	0,24316	4,11256	20	
	50	0,23910	0,97100	0,24624	4,06107	10	
14	0	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	0	76
	10	0,24474	0,96959	0,25242	3,96165	50	
	20	0,24756	0,96887	0,25552	3,91364	40	
	30	0,25038	0,96815	0,25862	3,86671	30	
	40	0,25320	0,96742	0,26172	3,82083	20	
	50	0,25601	0,96667	0,26483	3,77595	10	
15	0	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	0	75
	10	0,26163	0,96517	0.27107	3,68909	50	
	20	0,26443	0,96440	0,27419	3,64705	40	
	30	0,26724	0,96363	0,27732	3,60588	30	
	40	0,27004	0,96285	0,28046	3,56557	20	
	50	0,27284	0,96206	0,28360	3,52609	10	
16	0	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	0	74
	10	0,27843	0,96046	0,28990	3,44951	50	
	20	0,28123	0,95964	0,29305	3,41236	40	
	30	0,28402	0,95882	0,29621	3,37594	30	
	40	0,28680	0,95799	0,29938	3,34023	20	
	50	0,28959	0,95715	0.30255	3,30521	10	
17	0	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	0	73
	10	0,29515	0,95545	0,30891	3,23714	50	
	20	0,29793	0,95459	0,31210	3,20406	40	
	30	0,30071	0,95372	0,31530	3,17159	30	
	40	0,30348	0,95284	0,31850	3,13972	20	
	50	0,30625	0,95195	0,32171	3,10842	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
18	0	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	0	72
	10	0,31178	0,95015	0,32814	3,04749	50	
	20	0,31454	0,94924	0,33136	3,01783	40	
	30	0,31730	0,94833	0,33460	2,98868	30	
	40	0,32006	0,94740	0,33783	2,96004	20	
	50	0,32282	0,94646	0,34108	2,93189	10	
19	0	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	0	71
	10	0,32832	0,94457	0,34758	2,87700	50	
	20	0,33106	0,94361	0,35085	2,85023	40	
	30	0,33381	0,94264	0,35412	2,82391	30	
	40	0,33655	0,94167	0,35740	2,79802	20	
	50	0,33929	0,94068	0,36068	2,77254	10	
20	0	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	0	70
	10	0,34475	0,93869	0,36727	2,72281	50	
	20	0,34748	0,93769	0,37057	2,69853	40	
	30	0,35021	0,93667	0,37388	2,67462	30	
	40	0,35293	0,93565	0,37720	2,65109	20	
	50	0,35565	0,93462	0,38053	2,62791	10	
21	0	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	0	69
	10	0,36108	0,93253	0,38721	2,58161	50	
	20	0,36379	0,93148	0,39055	2,56046	40	
	30	0,36650	0,93042	0,39391	2,53865	30	
	40	0,36921	0,92935	0,39727	2,51715	20	
	50	0,37191	0,92827	0,40065	2,49597	10	
22	0	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	0	68
	10	0,37730	0,92609	0,40741	2,45451	50	
	20	0,37999	0,92499	0,41081	2,43422	40	
	30	0,38268	0,92388	0,41421	2,41421	30	
	40	0,38537	0,92276	0,41763	2,39449	20	
	50	0,38805	0,92164	0,42105	2,37504	10	
23	0	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	0	67
	10	0,39341	0,91936	0,42791	2,33693	50	
	20	0,39608	0,91822	0,43136	2,31826	40	
	30	0,39875	0,91706	0,43481	2,29984	30	
	40	0,40141	0,91590	0,43828	2,28167	20	
	50	0,40408	0,91472	0,44175	2,26374	10	
24	0	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	0	66
	10	0,40939	0,91236	0,44872	2,22857	50	
	20	0,41204	0,91116	0,45222	2,21132	40	
	30	0,41469	0,90996	0,45573	2,19430	30	
	40	0,41734	0,90875	0,45924	2,17749	20	
	50	0,41998	0,90753	0,46277	2,16090	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
25	0	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	0	65
	10	0,42525	0,90507	0,46985	2,12832	50	
	20	0,42788	0,90383	0,47341	2,11233	40	
	30	0,43051	0,90259	0,47698	2,09654	30	
	40	0,43313	0,90133	0,48055	2,08094	20	
	50	0,43575	0,90007	0,48414	2,06553	10	
26	0	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	0	64
	10	0,44098	0,89752	0,49134	2,03526	50	
	20	0,44359	0,89623	0,49495	2,02039	40	
	30	0,44620	0,89493	0,49858	2,00569	30	
	40	0,44880	0,89363	0,50222	1,99116	20	
	50	0,45140	0,89232	0,50587	1,97680	10	
27	0	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	0	63
	10	0,45658	0,88968	0,51319	1,94858	50	
	20	0,45917	0,88835	0,51688	1,93470	40	
	30	0,46175	0,88701	0,52057	1,92098	30	
	40	0,46473	0,88566	0,52427	1,90741	20	
	50	0,46690	0,88431	0,52798	1,89400	15	
28	0	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	0	62
	10	0,47204	0,88158	0,53545	1,86760	50	
	20	0,47460	0,88020	0,53920	1,85462	40	
	30	0,47716	0,87882	0,54296	1,84177	30	
	40	0,47971	0,87743	0,54673	1,82906	20	
	50	0,48226	0,87603	0,55051	1,81649	10	
29	0	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	0	61
	10	0,48735	0,87321	0,55812	1,79174	50	
	20	0,48989	0,87178	0,56194	1,77955	40	
	30	0,49242	0,87036	0,56577	1,76749	30	
	40	0,49495	0,86892	0,56962	1,75556	20	
	50	0,49748	0,86748	0,57348	1,74375	10	
30	0	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	0	60
	10	0,50252	0,86457	0,58124	1,72047	50	
	20	0,50503	0,86310	0,58513	1,70901	40	
	30	0,50754	0,86163	0,58904	1,69766	30	
	40	0,51004	0,86015	0,59297	1,68643	20	
	50	0,51254	0,85866	0,59691	1,67530	10	
31	0	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	0	59
	10	0,51753	0,85567	0,06483	1,65337	50	
	20	0,52002	0,85416	0,60881	1,64256	40	
	30	0,52250	0,85264	0,61280	1,63186	30	
	40	0,52498	0,85112	0,61681	1,62125	20	
	50	0,52745	0,84959	0,62083	1,61074	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
32	0	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	0	58
	10	0,53238	0,84650	0,62892	1,59002	50	
	20	0,53484	0,84495	0,63299	1,57981	40	
	30	0,53730	0,84339	0,63707	1,56969	30	
	40	0,53975	0,84182	0,64117	1,55966	20	
	50	0,54220	0,84025	0,64528	1,54972	10	
33	0	0,54464	0,83867	0,64941	1,53986	0	57
	10	0,54708	0,83708	0,65355	1,53010	50	
	20	0,54951	0,83549	0,65771	1,52043	40	
	30	0,55194	0,83389	0,66189	1,51084	30	
	40	0,55436	0,83228	0,66608	1,50133	20	
	50	0,55678	0,83066	0,67028	1,49190	10	
34	0	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	0	56
	10	0,56130	0,82741	0,67875	1,47330	50	
	20	0,56401	0,82577	0,68301	1,46411	40	
	30	0,56641	0,82413	0,68728	1,45501	30	
	40	0,56880	0,82248	0,69157	1,44598	20	
	50	0,57119	0,82082	0,69588	1,43703	10	
35	0	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	0	55
	10	0,57596	0,81748	0,70455	1,41934	50	
	20	0,57833	0,81580	0,70891	1,41061	40	
	30	0,58070	0,81412	0,71329	1,40195	30	
	40	0,58307	0,81242	0,71769	1,39336	20	
	50	0,58543	0,81072	0,72211	1,38484	10	
36	0	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	0	54
	10	0,59014	0,80730	0,73100	1,36800	50	
	20	0,59248	0,80558	0,73547	1,35968	40	
	30	0,59482	0,80386	0,73996	1,35142	30	
	40	0,59716	0,80212	0,74447	1,34323	20	
	50	0,59949	0,80038	0,74900	1,33511	10	
37	0	0,60181	0,79864	0,75355	1,32704	0	53
	10	0,60414	0,79688	0,75812	1,31904	50	
	20	0,60645	0,79512	0,76272	1,31110	40	
	30	0,60876	0,79335	0,76733	1,30323	30	
	40	0,61107	0,79158	0,77196	1,29541	20	
	50	0,61337	0,78980	0,77661	1,28764	10	
38	0	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	0	52
	10	0,61795	0,78622	0,78598	1,27230	50	
	20	0,62024	0,78442	0,79070	1,26471	40	
	30	0,62251	0,78261	0,79544	1,25717	30	
	40	0,62479	0.78079	0,80020	1,24969	20	
	50	0,62706	0,77897	0,80498	1,24227	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
39	0	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	0	51
	10	0,63158	0,77531	0,81461	1,22758	50	
	20	0,63383	0,77347	0,81946	1,22031	40	
	30	0,63608	0,77162	0,82434	1,21310	30	
	40	0,63832	0,76977	0,82923	1,20593	20	
	50	0,64056	0,76791	0,83415	1,19882	10	
40	0	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	0	50
	10	0,64501	0,76417	0,84407	1,18474	50	
	20	0,64723	0,76229	0,84906	1,17777	40	
	30	0,64945	0,76041	0,85408	1,17085	30	
	40	0,65196	0,75851	0,85912	1,16398	20	
	50	0,65386	0,75661	0,86419	1,15715	10	
41	0	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	0	49
	10	0,65825	0,75280	0,87441	1,14363	50	
	20	0,66044	0,75088	0,87955	1,13694	40	
	30	0,66262	0,74896	0,88473	1,13029	30	
	40	0,66480	0,74703	0,88992	1,12366	20	
	50	9,66697	0,74509	0,89515	1,11713	10	
42	0	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	0	48
	10	0,67129	0,74120	0,90569	1,10414	50	
	20	0,67344	0,73924	0,91099	1,09770	40	
	30	0,67559	0,73728	0,91633	1,09131	30	
	40	0,67773	0,73531	0,92170	1,08496	20	
	50	0,67987	0,73333	0,92709	1,07864	10	
43	0	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	0	47
	10	0,68412	0,72937	0,93797	1,06613	50	
	20	0,68624	0,72737	0,94345	1,05994	40	
	30	0,68835	0,72537	0,94896	1,05378	30	
	40	0,69046	0,72337	0,95451	1,04766	20	
	50	0,69256	0,72136	0,96008	1,04158	10	
44	0	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	0	46
	10	0,69675	0,71732	0,97133	1,02952	50	
	20	0,69883	0,71529	0,97700	1,02355	40	
	30	0,70091	0,71325	0,98270	1,01761	30	
	40	0,70298	0,71121	0,98843	1,01170	20	
	50	0,70505	0,70916	0,99420	1,00583	10	
45	0	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	0	45
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.

Druckfehler und Berichtigungen des ersten Theils.

Seite 31, Zeile 7 von oben lies $\frac{q}{24}$ anstatt $\frac{24}{q}$.

„ 31, „ 16 „ unten „ $q\,l^4$ „ $q\,l^2$.

„ 33, „ 7 „ „ „ $\frac{\mathfrak{M}\,l^2}{2\,E\,\Theta}$ „ $\frac{\mathfrak{M}\,C}{2\,E\,\Theta}$.

„ 32, „ 7 „ „ „ $\frac{q\,l^4}{24\,E\,\Theta}$ „ $\frac{q\,l^4}{24}$.

„ 40, „ 6 „ „ „ $d\,y$ „ $d\,z$.

„ 40, „ 8 „ „ „ $n\,p$ „ $o\,p$.

„ 42, „ 1 „ oben „ $\mathfrak{A}_y$ „ $1/2\,\mathfrak{A}_y$.

„ 42, „ 1 „ „ „ $\frac{d\,\mathfrak{D}}{d\,\alpha}$ „ $d\,\mathfrak{D}$.

„ 65, „ 14 „ „ „ Tonnen „ Kilogrammen.

„ 72, „ 7 „ „ „ Zug „ Stoss.

„ 100, in Gleichung IV. „ 720 „ 360.

„ 100, „ „ V. „ 400 „ 200.

„ 101 in Figur 66 sollte als Trägerdistanz nur $1{,}66^m$ angegeben sein.

„ 106, Zeile 12 von oben lies Figur 71 anstatt Figur 72.

„ 128 in Gleichung 124^b ist vor A das Zeichen — anzubringen.

„ 128, Zeile 4 von unten lies 108—109 anstatt 106—109.

„ 127 in Gleichung I. lies $\frac{A\,a^2}{3}$ anstatt $\frac{A\,a^3}{3}$.

„ 127, Zeile 3 von oben lies Coordinatenursprung in A anstatt in B.

„ 144, letzte Zeile lies $a_1 = a + \frac{A\,A_1}{2} + \frac{B\,B_1}{2}$.

„ 152 in Figur 97 lies anstatt P_1 gleichfalls: P.

„ 152 bei Fall 15 lies $P\frac{\lambda}{2}$ anstatt $P\frac{\lambda^2}{2}$.

„ 158 bei Figur 101 lies 3446 anstatt 3466.

„ 158 „ „ 101 „ 4381 „ 4281.

„ 158 „ „ 102 „ 4250 „ 4150.

„ 159 „ „ 105 „ 2941 „ 3141.

„ 169, Zeile 5 von unten lies 700 anstatt 600.

„ 171 in Gleichung 161) ist anstatt $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{B} - Q_y' - Q_y''}$ zu setzen $\frac{\mathfrak{B} - Q_y' - Q_y''}{\mathfrak{H}}$

„ 179, Zeile 8 von oben lies Parabelbögen anstatt Parallelbögen.

„ 183, „ 7 „ „ „ $\mathfrak{H}_0$ anstatt H_0.

„ 189, „ 10 „ unten „ per laufenden Meter anstatt per laufenden Fuss.

„ 191, „ 13 und 15 von unten lies Schubspannung anstatt Schubkraft.

„ 191, „ 9 von unten ist einzusetzen: nach Gleichung 55).

„ 194, „ 18 „ „ lies XXXV. anstatt XXXVI.

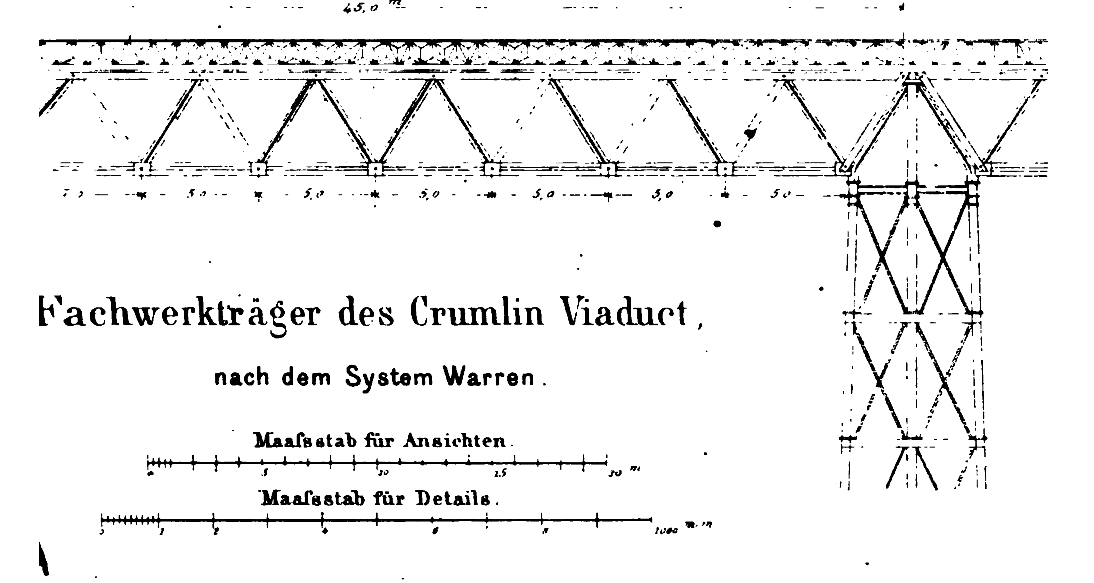
„ 198, „ 10 „ „ „ 64,08 . q „ 64,08 . 9.

In Tafel II., letzte Figur, lies $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 97) anstatt Maximum $\mathfrak{M}$ nach Gleichung 97).

Druckfehler und Berichtigungen des zweiten Theils.

Seite 5 in Fig. 129 lies $\mathfrak{M}_x = \frac{q\,l^2}{8} - \frac{q\,x^2}{2}$ $\left(\text{anstatt } = \frac{q\,l}{8} - \frac{q\,x_1^2}{2}\right)$
„ 8, Zeile 5 von unten lies Figur 130b anstatt 103b.
„ 19, „ 12 „ oben „ Facheintheilung anstatt Facheinheit.
„ 20 sind die Gleichungen 185) und 186) mit 186), beziehungsweise 187) zu bezeichnen; in denselben Gleichungen ist anstatt $\mathfrak{M}$ zu setzen $\mathfrak{M}'$.
„ 25, Zeile 4 von oben lies beistehender anstatt bestehender.
„ 27, Zeile 12 von oben lies Nummerzahl anstatt Nummernzahl.
„ 32, Zeile 22 und 28 von unten lies ω_n anstatt ω_u.
„ 41 in der Vertikalcolumne (2) lies 500 anstatt 250.
„ 51, Zeile 4 von oben lies max $\mathfrak{B}'_{1/2\,l} = \frac{1}{2}\,\frac{k\,l}{8} = \frac{5440 \times 50{,}2}{2\,.\,8}$
„ 60 in Figur 179 ist statt 4,63 zu setzen: 63,4.
„ 60, Zeile 9 von unten lies 280,3 anstatt 28,3.
„ 64 in Figur 182 lies $x_{7^1/_2}$ anstatt $x_{9^1/_2}$.
„ 66, Zeile 22 von oben lies Figur 182 anstatt 128.
„ 74, „ 17 „ „ „ 231) anstatt 230.
„ 74, „ 22 „ „ „ 232) „ 231.
„ 77 in Gleichung 238) ist zwei Mal anstatt U zu setzen: 2 l.
„ 77 „ „ 240) lies $- \frac{q}{2} (\lambda - {}^1/_2\, d)^2$ anstatt $= \ldots$
„ 77 „ „ 240) „ $\mathfrak{M}_{m-1}$ anstatt $\mathfrak{M}_m$.
„ 77 „ „ 241) „ $\mathfrak{M}_m$ „ $\mathfrak{M}_{m-1}$.
„ 78, Zeile 9 und folgende lies: Die Gleichungen 238) — 241) erleiden, wenn die Last von B nach A geht, nur insoweit eine Aenderung, als für A stets B, für B stets A gesetzt, ferner $\mathfrak{M}_m$ und $\mathfrak{M}_{m-1}$ und ebenso $\mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{B}_{m-1}$ gegeneinander vertauscht werden müssen.
„ 80 in Gleichung 248) lies $(\mathrm{tg}\,\beta_m + \mathrm{tg}_{m+1})$.
„ 80 „ „ 249) „ $(\mathrm{tg}\,\beta_{m-1} + \mathrm{tg}\,\gamma)$.
„ 127, Zeile 26 von unten lies 54,6 anstatt 21,6.
„ 136, „ 9 „ „ „ Gitterstäbe anstatt Gitterstärke.
„ 140, „ 13 „ oben „ **192** anstatt **191**. (Die Nummmer **192** auf Seite 141 ist alsdann mit **192a** zu bezeichnen oder ist als Fortsetzung von No. **192** zu betrachten.)
„ 144, Zeile 2 von unten ist die Nummer **194** zu streichen.
„ 154 lies Tabelle LVIII. anstatt LVII.
In Tafel XV. lies ${}^1/_2\, l = 32{,}95^m$ anstatt $32{,}45^m$.





Fachwerkträger des Crumlin Viaduct,

nach dem System Warren.

Maafsstab für Ansichten.

Maafsstab für Details.

Längen-Ansicht am Auflager.

A

B

C

D

Lith. u. Druck v. Schenberlen, Stuttgart

Grad.	Min.	sin.	cosin.	tang.	cotang.		
4	0	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	0	86
	10	0,07266	0,99736	0,07285	13,72674	50	
	20	0,07556	0,99714	0,07578	13,19688	40	
	30	0,07846	0,99692	0,07870	12,70620	30	
	40	0,08136	0,99668	0,08163	12,25051	20	
	50	0,08426	0,99644	0,08456	11,82617	10	
5	0	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	0	85
	10	0,09005	0,99594	0,09042	11,05943	50	
	20	0,09295	0,99567	0,09335	10,71191	40	
	30	0,09585	0,99540	0,09629	10,38540	30	
	40	0,09874	0,99511	0,09923	10,07803	20	
	50	0,10164	0,99482	0,10216	9,78817	10	
6	0	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	0	84
	10	0,10742	0,99421	0,10805	9,25530	50	
	20	0,11031	0,99390	0,11099	9,00983	40	
	30	0,11320	0,99357	0,11393	8,77681	30	
	40	0,11609	0,99324	0,11688	8,55555	20	
	50	0,11898	0,99290	0,11983	8,34496	10	
7	0	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	0	83
	10	0,12476	0,99219	0,12574	7,95302	50	
	20	0,12764	0,99182	0,12869	7,77035	40	
	30	0,13053	0,99144	0,13165	7,59575	30	
	40	0,13341	0,99106	0,13461	7,42871	20	
	50	0,13629	0,99067	0,13758	7,26873	10	
8	0	0,13916	0,99027	0,14054	7,11537	0	82
	10	0,14205	0,98986	0,14351	6,96823	50	
	20	0,14493	0,98944	0,14648	6,82694	40	
	30	0,14781	0,98902	0,14945	6,69116	30	
	40	0,15069	0,98858	0,15243	6,56055	20	
	50	0,15356	0,98814	0,15540	6,43484	10	
9	0	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	0	81
	10	0,15931	0,98723	0,16137	6,19703	50	
	20	0,16218	0,98676	0,16434	6,08444	40	
	30	0,16505	0,98629	0,16734	5,97576	30	
	40	0,16792	0,98580	0,17033	5,87080	20	
	50	0,17078	0,98531	0,17333	5,76128	10	
10	0	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	0	80
	10	0,17651	0,98430	0,17933	5,57638	50	
	20	0,17937	0,98378	0,18233	5,48451	40	
	30	0,18224	0,98325	0,18534	5,39552	30	
	40	0,18509	0,98272	0,18835	5,30928	20	
	50	0,18795	0,98218	0,19136	5,22566	10	
		cosin.	sin.	cotang.	tang.	Min.	Grad.







